De Cartesische rooster methode voor bewegende interne rand problemen

A.Bartal
Technische Wiskunde, Numerieke Wiskunde

Technische Universiteit Delft
november 2000

Afstudeercommissie
Prof dr.ir. P. Wesseling (TU Delft)
Dr. T. Jongen (Unilever)
Dr.ir. C. Vuik (TU Delft)
Ir. I. Wenneker (TU Delft)

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

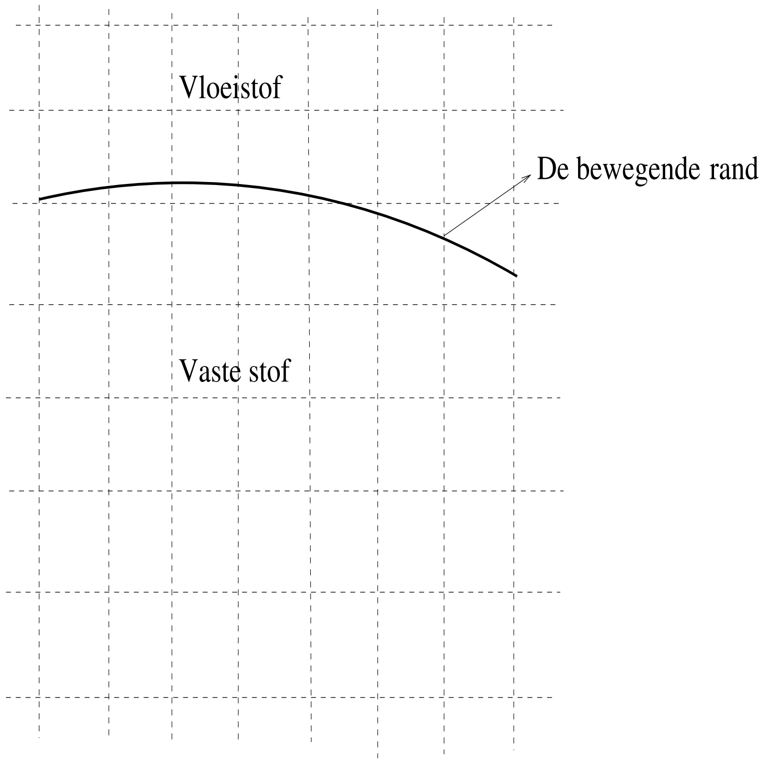
Inleiding

Stromnigsproblemen met bewegende randen komen in de praktijk vaak voor. Een speciaal geval zijn de problemen met interne bewegende randen, bijvoorbeeld een voorwerp in een vloeistofstroming. Het voorwerp beweegt onder invloed van de stroming maar tegelijkertijd heeft het voorwerp ook effect op het gedrag van de stroming. Er is dus sprake van een interactie tussen het voorwerp en de stroming. Dit type stromingen wordt bestudeerd in het laboratorium van Unilever te Vlaardingen. Omdat kennis hiervan nuttig is voor de productie bij Unilever een rol spelen. Unilever is een multinationaal bedrijf dat actief is in meer dan 88 landen. Er werken meer dan 270.000 mensen. 90% van de managers zijn intern opgeleid. Unilever werft jaarlijks ongeveer 100 PhDs. Unilever kent in de hele wereld zes onderzoeklaboratoria waarvan twee in England (Port Sunlight en Colworth), één in Nederland (Vlaardingen), één in Amerika (Edgewater), één in India en de laatste in China. Unilever investeert jaarlijks circa 550 miljoen dollar in onderzoek en werkt samen met universiteiten over de hele wereld om op de hoogte van de nieuwe technieken en technologieën te zijn. De interesse van Unilever is gericht op volgende produkten: margarine, thee, ijs, levensmiddelen en huishoudelijke produkten. De meest bekende produkten zijn: Organics shampoo, Dove, Omo,... etc.

Hoofdstuk 2

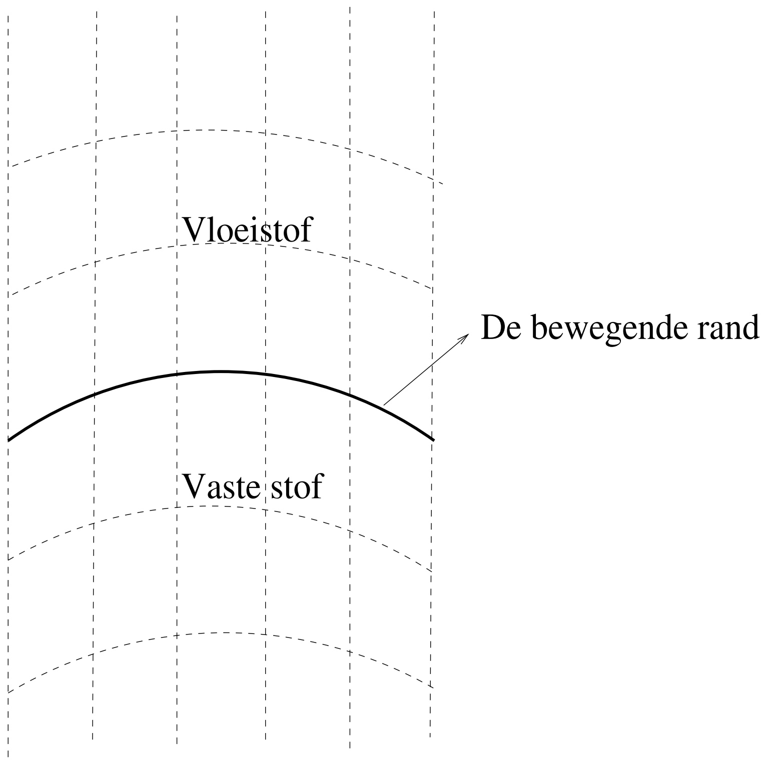
Probleembeschrijving

Stromingen met bewegende interne randen leiden tot een gekoppeld niet lineair systeem dat analytisch moeilijk is op te lossen. Daarom stapt men over naar numerieke methoden om zulke problemen op te lossen.
We gaan eerst de Euler en Lagrange methoden behandelen daarna worden andere methoden kort beschreven.
Er zijn een paar oplosmethoden voor de problemen met bewegende randen bekend bijvoorbeeld Lagrange en Euler methode of een combinatie van de twee. Bij de Lagrange beschrijvingswijze beweegt de waarnemer met de stroom mee, dit in tegenstelling tot de Euler beschrijvingswijze waarin de waarnemer niet met de stroom beweegt. De keuze voor een efficiënte en robuuste methode hangt af van het fysische probleem. Als de interne bewegende rand het doel van het onderzoek is en getraceerd moet worden d.w.z dat de positie van de rand in de tijd vastgelegd moet worden, dan het is verstandig om de Lagrange methode te gebruiken. Maar als wij geinteresserd zijn in het bepalen van de eigenschappen van een stroming, op een vastgelegde positie bijvoorbeeld de druk op een muur, dan is het raadzaam om de methode van Euler te gebruiken (zie pagina 6 in [3]).
Als wij de Lagrange beschrijvingswijze hanteren dan verandert de mesh in de tijd (zie figuur 2.2). Dit leidt tot veel rekenwerk. Bij de methode van Euler blijft de mesh onveranderd in tijd en dus kost minder rekenwerk (zie figuur 2.1).
De methode, die wij zullen gebruiken, heet de Cartesische rooster methode (zie [2]). Dit is een combinatie van de sterke punten van de Lagrange methode en de Euler methode.
Een andere methode voor de interne bewegende randen problemen is de zogeheten kromlijnige rooster methode. Het voordeel van deze methode is dat het opleggen van randvoorwaarden vereenvoudigd is en de nauwkeurigheid van de solver wordt niet beinvloed door de aanwezigheid van de interne 'moving bodies'. Het nadeel is dat de transformatie van de vergelijkingen naar de kromlijnig coordinaten leidt tot een complex stelsel en daarmee kunnen de stabiliteit, de convergentie



Figuur 2.1: De stilstaande mesh methode van Euler

en de efficiëntie van de solver nadelig beinvloed worden.
Een andere klasse van methoden voor interne 'moving bodies', zijn de zogeheten ïmmersed boundary" methoden waarin de bewegende randen als een discrete verzameling van volume of oppervlakte krachten worden gerepresenteerd. Deze methode is met succes toegepast op viskeuse stromingen (zie [4,5,6]). Het nadeel daarvan is gerelateerd aan de representatie van een puntvormige kracht op een mesh met een eindige afmeting (zie [7]).
Nadat in hoodstuk 3 de bewegingsvergelijkingen voor de stromingsleer afgeleid zijn, zullen we in hoodstuk 4 een beschrijving geven van de Cartesische rooster methode. In de volgende hoofdstukken zullen een aantal ééndimensionale stromingsproblemen opgelost worden.



Figuur 2.2: De bewegende mesh methode van Lagrange

Hoofdstuk 3

De basis vergelijkingen voor de stromingsleer

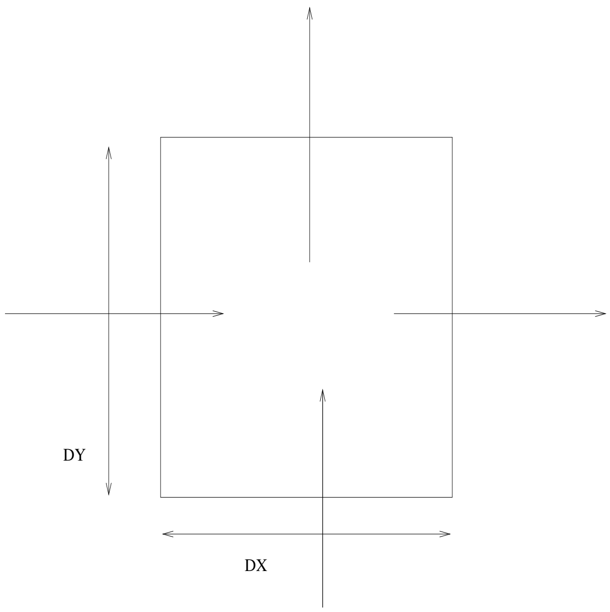
Stromingsleer is een breed veld met verschillende disciplines en specialiteiten. Binnen de stromingsleer houdt men zich bezig met het bestuderen van de bewegingen in een fluidum. De te bestuderen fluida omvatten een groot aantal vloeibare stoffen, die voor vele toepassingen interessant zijn. De meest bekende soorten van fluida zijn:

- gassen, zoals lucht en het toepassingsgebied is bijvoorbeeld: de luchtvaart, meteorologie.
- vloeistoffen, zoals water en het toepassingsgebied is bijvoorbeeld: oceanografie en industrie.
- bloed en het toepassingsgebied is de biologische stromingsleer.
- olie in bijvoorbeeld warmtewisselaars en lagers.

Fluida bewegen onder invloed van de actie van externe krachten. Die krachten zijn in twee soorten te onderscheiden:

- Volumekrachten bijvoorbeeld zwaartekracht
- Oppervlaktekrachten bijvoorbeeld spanningskrachten en de druk.

De stroming van een fluidum wordt gekarakteriseerd door de druk, dichtheid, temperatuur, snelheid en viscositeit.
Een fluidum met een constante viscositeit wordt een Newtons fluidum genoemd, anders heet het Niet-Newtons. Om de stroming van een fluidum uit te rekenen dient men begin- en randvoorwaarden op te geven. Dan ligt, door de behoudswetten van massa en impuls, het gedrag in plaats en tijd van het fluidum vast.



Figuur 3.1: Instroom en uitstroom voor een twee dimensionale stroming

In de volgende hoofdstuk worden de basisvergelijkingen van de stromingsleer, namelijk massabehoud en impulsbehoud, besproken.

3.1 Behoud van massa voor een stationaire stroming

Omdat er geen massaproduktie plaatsvindt concluderen we dat de massa, die bij een stilstaand denkbeeldig volume in een stationair probleem naar binnenstroomt, gelijk is aan de massa die er uitstroomt (zie figuur 3.1).

In formulevorm volgt:

$$\Delta y(\rho u(x,y))|_{x+\Delta x,y} + \Delta x(\rho v(x,y))|_{y+\Delta y,x} = Uit$$

en

$$\Delta y(\rho u(x,y))|_{x,y}\Delta t + \Delta x(\rho v(x,y))|_{x,y} = In$$

dan is

$$Uit = In,$$

waarbij ρ staat voor de dichtheid, $u(x,y)$ staat voor de snelheid in de x-richting en $v(x,y)$ de snelheid in de y-richting.

Delen door $\Delta y \Delta x$ geeft:

$$\frac{(\rho u(x,y))|_{x+\Delta x,y} - (\rho u(x,y))|_{x,y}}{\Delta x} + \frac{(\rho v(x,y))|_{x,y+\Delta y} - (\rho v(x,y))|_{x,y}}{\Delta y} = 0. \tag{3.1}$$

Neem de limiet Δx en Δy naar nul dan volgt:

$$\frac{\partial \rho u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \rho v(x,y)}{\partial y} = 0.$$

Voor een onsamendrukbare stroming geldt dan:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 0.$$

Dit is de continuiteitsvergelijking. Deze vergelijking is ook voor een instationaire stroming geldig.

3.2 Behoud van impuls

De behoudswet van impuls zegt dat de verandering in de impuls in een volume gelijk is aan de totale kracht op dit volume. In het geval dat de zwaartekracht de enige extern werkende kracht is, luidt de formule van de behoudswet :

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho g_i,$$

waarin g_i de component is van de versnelling van de zwaartekracht in de richting van de de Cartesische coordinaat x_i. Hier wordt gebruik gemaakt van de Einstein sommatie-conventie (herhaald indexen).

Voor de spanningstensor τ krijgen we, in het geval van Newtonse vloeistoffen, de volgende uitdruking :

$$\tau_{ij} = 2\mu D_{ij} - \frac{2}{3}\mu\delta_{ij} div\mathbf{u}$$

met de deformatietensor D:

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$$

waarbij μ de dynamische viscositeit is. Voor het afleiden van de bovenstaande vergelijkingen (zie paginas 5 t/m 9 [1]).

3.3 Begin- en randvoorwaarden

Om tot een eenduidige oplossing voor de basisvergelijkingen te komen moeten de begin- en randvoorwaarden gegeven zijn.

3.3.1 Beginvoorwaarden

Voor instationaire stromingen worden op een begintijdstip t_0 de waarden van de snelheid $\mathbf{u}$ en de druk p gegeven.

$$\mathbf{u}|t_0 = \mathbf{u}_0,$$

$$p|t_0 = p_0.$$

3.3.2 Randvoorwaarden

We kunnen twee soorten randvoorwaarden onderscheiden.
Dirichlet:

$$\mathbf{u} = \mathbf{f},$$

Neumann:

$$a_{ij}(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j})n_i = f,$$

op $\Gamma 2 \subset \partial\Omega$ waarbij a_{ij} reëel is , Ω het reken gebied en $\Gamma 2$ een gedeelte is van de rand.
In de volgende paragraaf zullen we een voorbeeld hiervan zien (zie figuur 5.1).

Hoofdstuk 4

De Cartesische rooster methode

In deze paragraaf zullen we eerst de Cartesische rooster methode met stationaire randen ("Moving bodies") (zie [2]), daarna zullen we bekijken hoe deze methode met bewegende interne randen omgaat.
Voordat we laten zien hoe de methode werkt, is het nuttig om een paar eigenschappen van de Cartesische rooster methode te noemen.

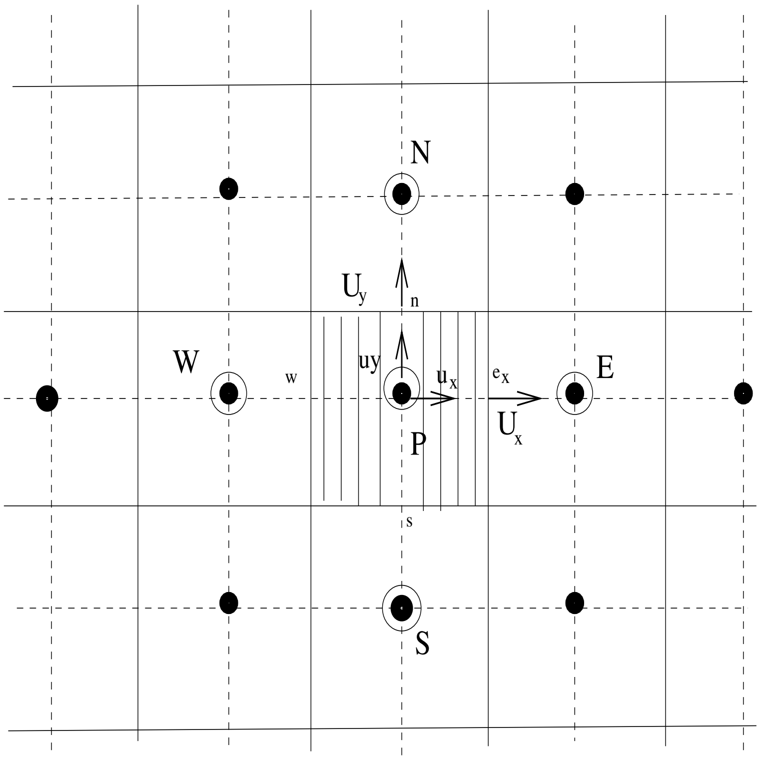
- Deze methode wordt vooral gebruikt om instationaire, viskeuse incompressibele stromingen met bewegende interne randen te simuleren.
- De methode is gebaseerd op een eindige volume methode, met een tweede orde nauwkeurig centrale-differentie schema, en een fractionele-stap procedure.
- Een nieuwe interpolatie procedure is gebruikt in de buurt van de bewegende rand om de tweede orde ruimtelijke nauwkeurigheid te behouden.

Merk op dat de aanwezigheid van de bewegende interne randen de conditie van de lineaire operatoren vergroot en dat leidt tot traagheid in de iteratieve oplossingen van de vergelijkingen. Een remedie voor dit probleem is om een geconjugeerd gradiënt methode te gebruiken.

4.1 Stroming met stationaire randen

In dit geval laten we de bewegende interne randen buiten beschouwing.
We gaan uit van de instationaire, viskeuze en incompressibele Navier-Stokes vergelijkingen. De integraal formulering van de dimensieloze Navier-Stokes vergelijkingen is:

$$\int_{cs} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0, \tag{4.1}$$



Figuur 4.1: Het snelheidsveld wordt gepresenteerd door de snelheidscomponenten op de cel-zijde en op cel-centrum Ux, Uy en u_x, u_y

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\mathbf{u}dV+\int_{cs}\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{n}})dS=-\int_{cs}p\hat{\mathbf{n}}dS+\frac{1}{Re}\int_{cs}\bigtriangledown\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS \tag{4.2}$$

$\mathbf{u}$ en p zijn gedefinieerd in het centrum van het controle volume. Formule (4.1) beschrijft massabehoud en formule (4.2) het impulsbehoud.

De symbolen cs en cv staan voor controle oppervlakte van het cv respectievelijk controle volume en $\hat{\mathbf{n}}$ de uitwendige normaal vector op het controle volume (zie figuur 4.1). Het gearceerde gebied is ons controle volume

De randvoorwaarde op de stilstaande externe randen is gegeven door

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=\mathbf{v}(\mathbf{x},t),$$

waarbij $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ een gegeven snelheid op de rand van de stroming. Re staat voor het Reynolds getal . Een tweede orde nauwkeurige, twee-stap druk-correctie methode wordt gebruikt om van tijd niveau "n" naar "$n+1$" te gaan. Om van $\mathbf{u}^n$ naar $\mathbf{u}^{n+1}$ te gaan, wordt eerst als tussenstap een snelheid $\mathbf{u}^\star$ berekend. De snelheid $\mathbf{u}^\star$ wordt bepaald door de volgende vergelijking op te lossen

$$\begin{aligned}\int_{cv}\frac{\mathbf{u}^\star-\mathbf{u}^n}{\Delta t}dV &= \frac{1}{2Re}\int_{cs}(\bigtriangledown\mathbf{u}^\star+\bigtriangledown\mathbf{u}^n)\cdot\hat{\mathbf{n}}dS\\ &\quad -\frac{1}{2}\int_{cs}[3\mathbf{u}^n(\mathbf{U}^n\cdot\hat{\mathbf{n}})-\mathbf{u}^{n-1}(\mathbf{U}^{n-1}\cdot\hat{\mathbf{n}})]dS\end{aligned} \tag{4.3}$$

waarin $\mathbf{u}^\star$ voldoet aan de randvoorwaarde:

$$\mathbf{u}^\star = \mathbf{v}^{n+1}.$$

U staat voor de snelheid van de stroming op de zijkanten van het control-volume. De convectie termen van de formule(2) zijn in de tijd gediscretiseerd m.b.v een Adams-Bashforth schema. Voor de discretisatie van de diffusie termen valt de keuze op de impliciete Crank-Nicolson schema omdat hiermee de stabiliteit verbeterd wordt.

De volgende stap is de druk-correctie stap:

$$\int_{cv} \frac{\mathbf{u^{n+1}} - \mathbf{u}^\star}{\Delta t} dV = -\int_{cv} \bigtriangledown \mathbf{p}^{n+1} dV. \tag{4.4}$$

Als we opleggen dat de uiteindelijke snelheid voldoet aan formule (4.1) dan geldt

$$\int_{cs} (\mathbf{U}^{n+1} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS = 0. \tag{4.5}$$

De combinatie van formule (4.4) en de formule (4.5) geeft:

$$\int_{cs} \bigtriangledown (\mathbf{p}^{n+1}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{1}{\Delta t} \int_{cs} (\mathbf{U}^\star \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS \tag{4.6}$$

$\mathbf{U}^\star$ wordt hierbij door een lineaire interpolatie van de nabijgelegen snelheden bepaald. Wanneer $\mathbf{U}^\star$ bekend is dan kan de laatste vergelijking van de druk opgelost worden en daarmee de snelheden $\mathbf{u}^{n+1}$ en $\mathbf{U}^{n+1}$ via

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^\star - \Delta t (\bigtriangledown p^{n+1})_{cc} \tag{4.7}$$

en

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^\star - \Delta t (\bigtriangledown p^{n+1})_{fc}. \tag{4.8}$$

De indices cc en fc staan voor 'cel center' respectievelijk 'face center'.

De drukgradiënt in de 'cel center' in de x-richting is bepaald door

$$(\frac{\partial p}{\partial x})_P = \frac{(p_E - p_W)}{2\Delta x}. \tag{4.9}$$

Dezelfde gradiënt op de 'east face' is gegeven door :

$$(\frac{\partial p}{\partial x})_e = \frac{(p_E - p_P)}{\Delta x}. \tag{4.10}$$

in één dimensionaal geval luidt formule (4.7) als volgt:

$$u_x{}^{n+1} = u_x{}^\star - \Delta t (\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x})_P \tag{4.11}$$

het invullen van formule (4.9) in formule (4.11) geeft:

$$u_x{}^{n+1} = u_x{}^{\star} - \Delta t \frac{(p^{n+1}{}_E - p^{n+1}{}_W)}{2\Delta x} \tag{4.12}$$

in één dimensionaal geval luidt formule (4.8) als volgt:

$$U^{n+1}{}_x = U^{\star}{}_x - \Delta t (\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x})_e \tag{4.13}$$

het invullen van formule (4.10) in formule (4.14) geeft:

$$U^{n+1}{}_x = U^{\star}{}_x - \Delta t \frac{(p^{n+1}{}_E - p^{n+1}{}_P)}{\Delta x} \tag{4.14}$$

Merk op dat het snelheidsveld van de gehanteerde Cartesische methode bestaat uit twee verschillende maar gerelateerde snelheden. De snelheid $\mathbf{u}$, in de cel center, die aan de impuls vergelijkingen voldoet en de snelheid $\mathbf{U}$ die aan de continuiteitsvergelijking voldoet.

4.2 Stroming met bewegende interne randen

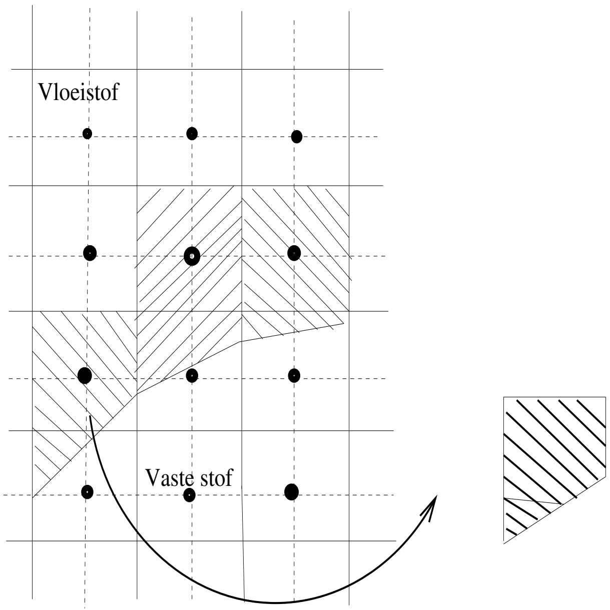
In deze paragraaf kijken we naar een bewegende interne rand in een vloeistof. De bewegende rand wordt representeerd m.b.v een reeks van rechte lijnstukken. De cel die een gedeelte van de bewegende rand bevat en waarvan het centrum in de vloeistof ligt, wordt vervormd zodat de stukken die in de vaste stof liggen weggelaten worden. De geknipte cel waarvan het centrum in de vaste stof ligt wordt meegenomen door de nabijgelegen cellen. Als resultaat worden cellen met een trapezium vorm gevormd (zie figuren 5 en 6). Merk op dat de vervorming kan leiden tot de creatie van vijf-zijdige of driehoekige cellen.

In de 'body fitted grid' methode, kan de aanwezigheid van meer bewegende randen ("Multiple moving bodies") de topologie van het rooster complexer maken. Dit in tegenstelling tot de huidige methode die met meer bewegende randen net zo goed werkt als met één bewegende rand. Deze methode is ook toepasbaar op de problemen met interne bewegende randen tussen twee vloeistoffen.

Het doel is om de massa, convectie en diffusie fluxen en drukgradiënten op de zijkanten van deze cellen te bepalen zonder dat de global tweede-orde nauwkeurigheid van de solver verloren gaat.

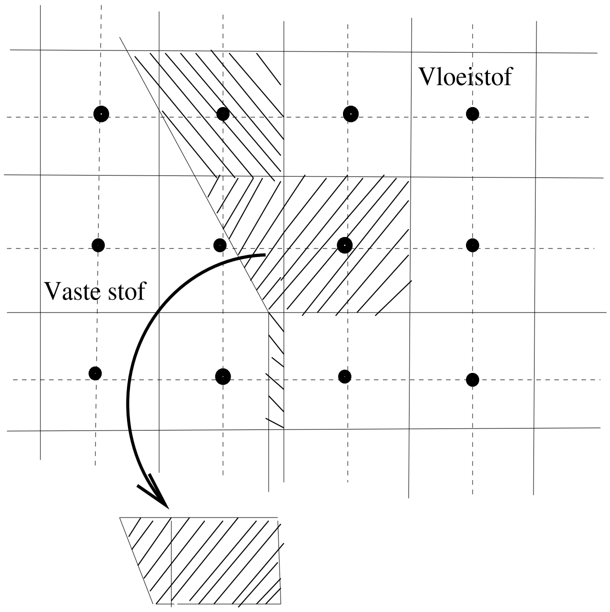
Voor de normale cellen kunnen de fluxen en de drukgradiënten op de zijkanten van de cellen bepaald worden, m.b.v een lineaire benadering tussen de buurcellen, met een twee-orde nauwkeurigheid. Voor de cellen met een trapezium vorm is dat niet het geval.

Het probleem zit in het feit dat sommige middelpunten van de zijkanten van de trapeziumvormige cellen niet op één lijn liggen of dat de nabijgelegen cel-centers niet aan dezelfde kant staan. De oplossing aan het probleem is om een twee-dimensionale interpolatie te gebruiken, waarmee de



Figuur 4.2: Het ontstaan van de trapeziumvormige cellen wanneer de bewegende rand aan het zuiden van de centrum van de cel ligt

tweede-orde nauwkeurigheid van de solver behouden wordt.
De discretisatie van de advectie-diffusie en de Poisson vergelijkingen geeft aanleiding tot een groot lineair stelsel. Om dat stelsel op te lossen is het noodzaklijke om de betreffende matrix te factoriseren. De struktuur van de matrix, in het geval zonder de bewegende interne randen, lijkt op die in het geval van de aanwezigheid van de bewegende interne randen. Alleen de rijen van de matrix die corresponderen met de trapeziumvormige cellen worden anders. Er worden aan die rijen extra termen toegevoegd. Het verkregen stelsel kan m.b.v een iteratieve methode opgelost worden. Eén van de meeste gebruikte iterative methoden is de successieve-overrelaxatie methode. Het toepassen van deze methode op de gediscretiseerde Poisson vergelijking, bij aanwezigheid van de bewegende interne randen, leidt tot complicaties. Een remedie is ook het gebruik van de Krylov methoden. Ze zijn toepasbaar op algemene ijle matrices en dus voor de bewegende interne randen problemen. Een speciale methode uit deze klasse van de methoden is Bi-CGSTAB methode. Net als de geconjugeerde gradiënten methode hangt, de snelheid waarmee de Bi-CGSTAB methode convergeert sterk af van de gekozen preconditioner. Udaykumar et al hebben bewezen dat line-SOR beter is dan de Jacobi preconditioner (zie [2]). Daarom wordt in de beschreven Cartesische rooster methode van de Bi-CGSTAB methode met line-SOR preconditioner gebruik gemaakt.



Figuur 4.3: Het ontstaan van de trapeziumvormige cellen wanneer de bewegende rand ten oosten van de centrum van de cel ligt

4.3 De colocated methode versus de Mittal methode

4.3.1 Inleiding

In deze paragraaf zullen we eerst de colocated methode aan de hand van een twee-dimensionale stationaire convectie-diffusie vergelijking bespreken. Daarna zullen we de interpolatie methode van Mittal toepassen op een twee-dimensionale Laplace vergelijking.

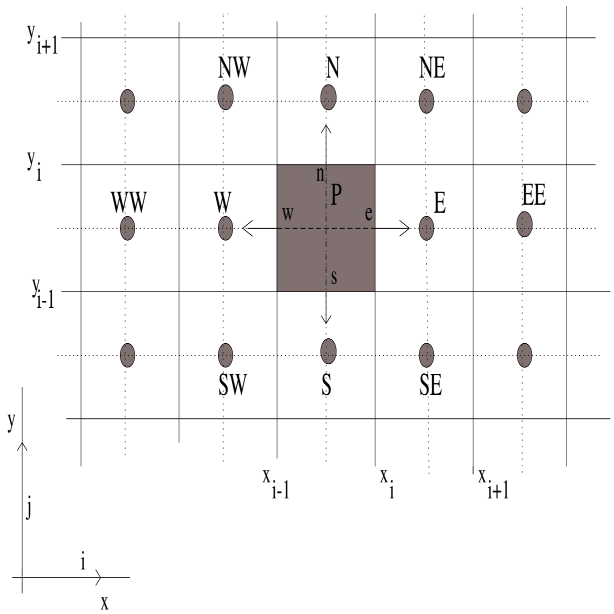
4.3.2 De colocated methode

Het rekengebied wordt in een eindige aantal control-volumes verdeeld zie figuur 4.4. Ieder control-volume bevat één roosterpunt in het centrum. In dit punt worden de onbekenden ϕ (de snelheidscomponenten u, v en p) bepaald. Dat is de zogenaamd colocated grid methode. We gaan uit van een twee-dimensionale stationaire convectie-diffusie vergelijking :

$$\int_S (\rho v \cdot \phi) dS = \int_S \Gamma_\phi \nabla\phi \cdot n dS + \int_V S_\phi dV. \tag{4.15}$$

De convectie term voor de variabele ϕ door het zijvlak 'e' kunnen we schrijven als:

$$F_e^c = \int_{S_e} \rho\phi v \cdot n dS \approx \dot{m}_e \phi_e. \tag{4.16}$$



Figuur 4.4: Het controle volume gevormd door de aanwezigheid van de interne bewegende rand

waarbij $\dot{m}_e$ de massaflux die door het zijvlak 'e' stroomt en de variabele ϕ_e is de snelheidsvector op het zijvlak 'e'.
Benaderen van ϕ_e met central differentie schema (CDS) geeft

$$F_e^c = \dot{m}_e(1 - \lambda_e)\phi_P + \dot{m}_e\lambda_e\phi_E, \tag{4.17}$$

waarbij $\lambda_e = \frac{x_e - x_P}{x_E - x_P}$. Analoog voor de andere randen geldt:

$$F_w^c = \dot{m}_w(1 - \lambda_w)\phi_P + \dot{m}_w\lambda_w\phi_W, \tag{4.18}$$

$$F_n^c = \dot{m}_n(1 - \lambda_n)\phi_P + \dot{m}_n\lambda_n\phi_N, \tag{4.19}$$

$$F_s^c = \dot{m}_s(1 - \lambda_s)\phi_P + \dot{m}_s\lambda_s\phi_S. \tag{4.20}$$

De convectie term in (4.16) wordt dan:

$$\begin{aligned} F_e^c + F_w^c + F_s^c + F_n^c = (\sum_c \dot{m}_c)\phi_P - (\sum_c \dot{m}_c\lambda_c)\phi_P + \\ + (\lambda_e\dot{m}_e\phi_E + \lambda_w\dot{m}_w\phi_W + \lambda_n\dot{m}_n\phi_N + \lambda_s\dot{m}_s\phi_S), \end{aligned} \tag{4.21}$$

waarbij $c = e, w, n, s$. In vergelijking (4.21) is de eerste term in het rechterlid nul en dat volgt uit de wet van massabehoud. De vergelijking (4.21) kan gereduceerd worden tot:

$$\sum_c F_c = -A_P^c \phi_P + \sum_{nb} A_{nb}^c \phi_{nb}, \tag{4.22}$$

waarbij waarbij nb de buurpunten (E, W, S, N) van het punt P en

$$A_E^c = \dot{m}_e \lambda_e, \tag{4.23}$$
$$A_W^c = \dot{m}_w \lambda_w, \tag{4.24}$$
$$A_N^c = \dot{m}_n \lambda_n, \tag{4.25}$$
$$A_S^c = \dot{m}_s \lambda_s, \tag{4.26}$$
$$A_P^c = (A_E^c + A_W^c + A_N^c + A_S^c), \tag{4.27}$$

Voor de diffusie term krijgen we:

$$F_e^d = \int_{S_e} \Gamma_\phi grad\phi \cdot ndS \approx (\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x})_e \Delta y. \tag{4.28}$$

De afgeleide op de zijvlak 'e' bepalen we met CDS:

$$F_e^d \approx \frac{\Gamma_\phi \Delta y}{x_E - x_P}(\phi_E - \phi_P), \tag{4.29}$$

De diffusie termen voor de andere zijvlakken zijn:

$$F_w^d \approx \frac{\Gamma_\phi \Delta y}{x_P - x_W}(\phi_P - \phi_W), \tag{4.30}$$

$$F_n^d \approx \frac{\Gamma_\phi \Delta x}{x_N - x_P}(\phi_N - \phi_P), \tag{4.31}$$

$$F_s^d \approx \frac{\Gamma_\phi \Delta x}{x_P - x_S}(\phi_P - \phi_S). \tag{4.32}$$

De diffusie term in (4.15) kunnen we schrijven als:

$$A_P^d \phi_P = A_E^d \phi_E + A_W^d \phi_W + A_N^d \phi_N + A_S^d \phi_S \tag{4.33}$$

met

$$A_E^d = -\frac{\Gamma_\phi \Delta y}{x_E - x_P}, \tag{4.34}$$
$$A_W^d = -\frac{\Gamma_\phi \Delta y}{x_P - x_W}, \tag{4.35}$$
$$A_N^d = -\frac{\Gamma_\phi \Delta x}{x_N - x_P}, \tag{4.36}$$
$$A_S^d = -\frac{\Gamma_\phi \Delta x}{x_P - x_S}, \tag{4.37}$$
$$A_P^d = (A_E^d + A_W^d + A_N^d + A_S^d). \tag{4.38}$$

Voor de bronterm geldt:

$$Q_p = \int_S S_\phi dS \approx (S_C + S_P\phi_P)\Delta V_P = (S_C + S_P\phi_P)\Delta x \Delta y. \tag{4.39}$$

waarbij de bronterm gelineariseerd is.
De convectie-diffusie vergelijking in (4.15) kunnen we als volgt schrijven:

$$A_P\phi_P = A_E\phi_E + A_W\phi_W + A_N\phi_N + A_S\phi_S + b_P \tag{4.40}$$

met

$$A_E = A_E^c + A_E^d, \tag{4.41}$$

$$A_W = A_W^c + A_W^d, \tag{4.42}$$

$$A_N = A_N^c + A_N^d, \tag{4.43}$$

$$A_S = A_S^c + A_S^d, \tag{4.44}$$

$$A_P = A_P^c + A_P^d. \tag{4.45}$$

Het rechterlid b_P is dan te schrijven als:

$$b_P = S_C\Delta x\Delta y. \tag{4.46}$$

De vergelijking (4.40) wordt korter geschreven als :

$$A_P\phi_P = \sum_{nb} A_{nb}\phi_{nb} + b_P, \tag{4.47}$$

waarbij nb de buurpunten (E, W, S, N) van het punt P.

4.3.3 De interpolatie methode van Mittal

In deze paragraaf gaan we de interpolatie methode van Mittal besproken aan de hand van een voorbeeld. De keuze valt op de Poisson vergelijking in twee dimensie. Merk op dat de interpolatie methode van Mittal wordt pas nuttig en gebruikt als wij met interne rand te maken hebben zie figuur 4.5. De vergelijking van Poisson ziet het er als volgt:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{op} \quad (0,1)\times(0,1), \tag{4.48}$$

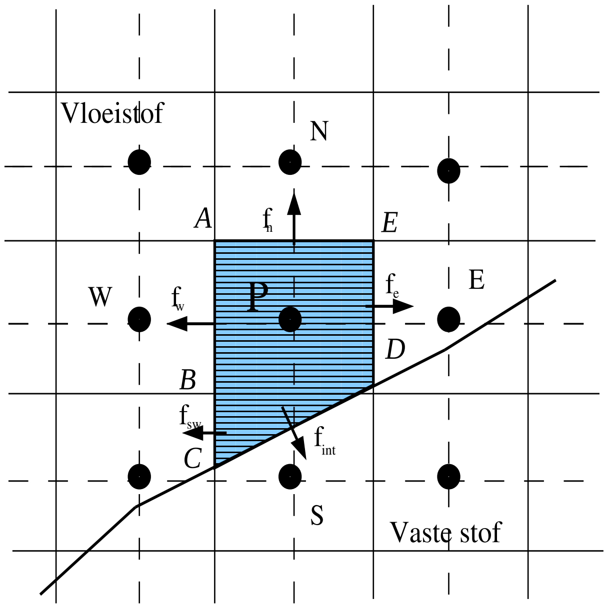
met de volgende randvoorwaarden:

$$\phi(0,y) = 0, \tag{4.49}$$

$$\phi(x,0) = 0, \tag{4.50}$$

$$\phi(1,y) = y, \tag{4.51}$$

$$\phi(x,1) = x. \tag{4.52}$$



Figuur 4.5: Het controle volume gevormd door de aanwezigheid van de interne bewegende rand

De exacte oplossing van de gegeven Poisson vergelijking en randvoorwaarden is $\phi(x, y) = xy$. De Poisson vergelijking wordt met de Eindige Volume Methode (EVM) gediscretiseerd. We integreren over het control-volume ABCDE zie figuur 4.5. Maar eerst gaan we het divergentiestelling van Gauss toepassen:

$$\int_S \nabla\phi \cdot ndS, \tag{4.53}$$

waarbij S en zijvlak van het control-volume ABCDE. De zijde ABC kan in twee stukken verdeeld worden: AB van cel P en BC van cel S. De integraal op de zijde AC is:

$$\int_{AC} \frac{\partial\phi}{\partial x} dy = \int_{AB} \frac{\partial\phi}{\partial x} dy + \int_{BC} \frac{\partial\phi}{\partial x} dy, \tag{4.54}$$

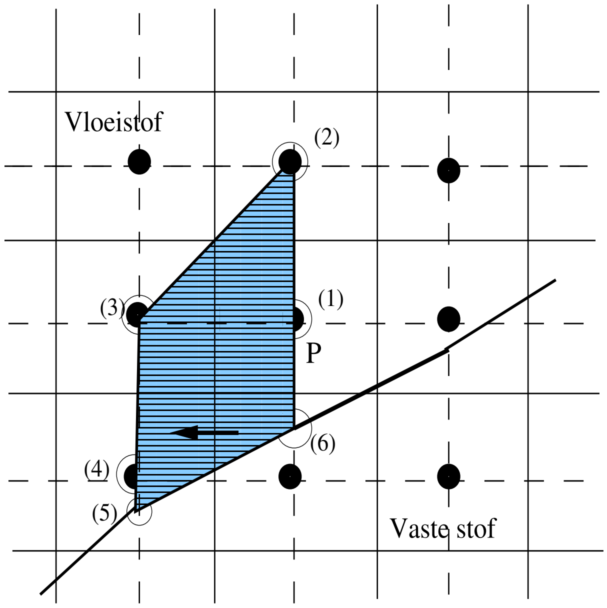
een tweede-orde benadering van deze integraal kan verkregen worden door:

$$\int_{AC} \frac{\partial\phi}{\partial x} dy \approx f_w(y_A - y_B) + f_{sw}(y_B - y_C) \quad \text{(de middenpunt regel)}, \tag{4.55}$$

waarin f_w respectievelijk f_{sw} zijn de waarden van de $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ in het midden van de lijnstukken AB respectievelijk BC. Analoog kan de integral over de zijde ED benaderd worden door:

$$\int_{DE} \frac{\partial\phi}{\partial x} dy \approx f_e(y_E - y_D), \tag{4.56}$$

waar f_e is de waarde van de flux in het midden van de zijde ED. Voor cellen die ver van de interne rand liggen kunnen we deze fluxen bepalen met een tweede orde nauwkeurigheid via een lineaire interpolatie en daarom willen we ook de fluxen f_w, f_{sw} en f_e met een tweede orde nauwkeurigheid



Figuur 4.6: Het zes-punten stencil voor het benaderen van f_{sw} waarin ϕ_5 en ϕ_6 bekend zijn

bepalen. Benaderen van de flux f_w tot een tweede orde nauwkeurigheid kan door de centrale differentie te gebruiken:

$$(\frac{\partial\phi}{\partial x})_w = \frac{\phi_P - \phi_W}{x_P - x_W}. \tag{4.57}$$

Voor het bepalen van de fluxen f_e en f_{sw} gebruiken we een twee dimensionaal interpolatie polynoom die lineair is in x en kwadratisch is in y. De reden dat wij de functie ϕ lineair in x kiezen is dat de zijde BC in het midden van het beschouwde trapezium zie figuur 4.6. De globale vorm van deze functie ziet er als volgt uit:

$$\phi = c_1xy^2 + c_2y^2 + c_3xy + c_4y + c_5x + c_6, \tag{4.58}$$

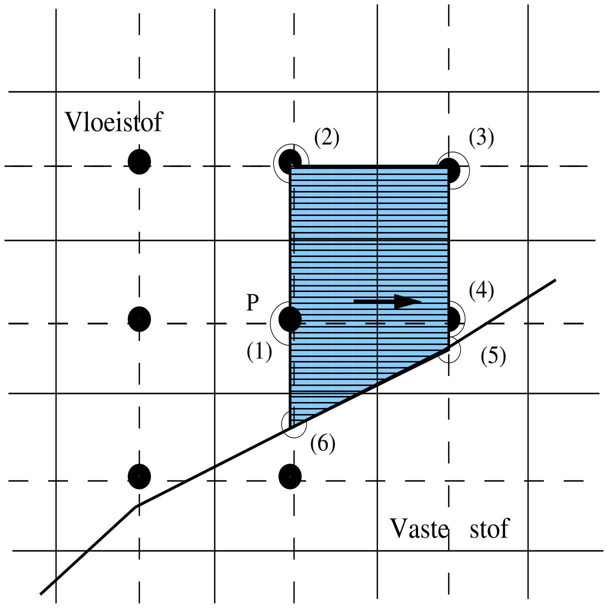
en dus

$$(\frac{\partial\phi}{\partial x})_{sw} = c_1y^2 + c_3y + c_5, \tag{4.59}$$

We gaan de zes coëfficienten c_n voor $n = 1, \cdots, 6$ bepalen als functie van de zes locaties zie figuur 4.6 door het volgende stelsel op te lossen:
In matrix notatie:

$$A\mathbf{C} = \phi \tag{4.60}$$

waarin $A = \begin{pmatrix} x_1y_1^2 & y_1^2 & x_1y_1 & y_1 & x_1 & 1 \\ x_2y_2^2 & y_2^2 & x_2y_2 & y_2 & x_2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_6y_6^2 & y_6^2 & x_6y_6 & y_6 & x_6 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_6 \end{pmatrix}$ en $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_6 \end{pmatrix}$, de coëfficienten



Figuur 4.7: Het zes-punten stencil voor het benaderen van f_e

worden gegeven door de volgende uitdruking:

$$c_n = \sum_{j=1}^{6} b_{nj}\phi_j \quad \text{voor n=1,}\cdots\text{, 6} \tag{4.61}$$

waarin b_{nj} de elementen van de inverse van de Vandermonde matrix in (8.1). De waarde van $(\frac{\partial\phi}{\partial x})$ in het midden van de zijde BC wordt gegeven door formule (4.59) en door gebruik te maken van formule 4.61 krijgen we:

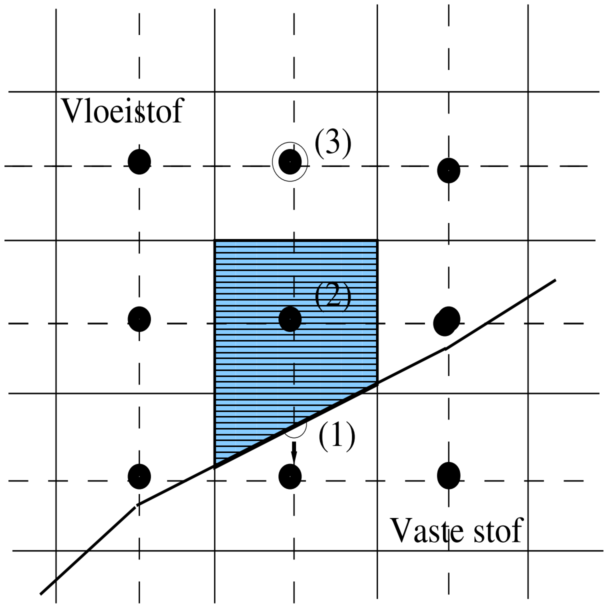
$$(\frac{\partial\phi}{\partial x})_{sw} = \sum_{j=1}^{6} \beta_j\phi_j, \tag{4.62}$$

waarin

$$\beta_j = b_{1j}{y_{sw}}^2 + b_{3j}y_{sw} + b_{5j}, \tag{4.63}$$

merk op dat β hangt alleen af van de mesh and van de orientatie van de interne bewegende rand. Een analoge interpolatie procedure kan gebruikt worden om f_e te benaderen. Ook hier is een lineair-quadratische interpolatie is gebruikt zie figuur 4.7. Een analoge vergelijking aan vergelijking (4.62) kan verkregen worden.

En als laatst gaan wij de flux in het midden van de zijd CD (f_{int}), met een twee orde nauwkeurigheid, bepalen. Deze flux kan gesplist worden in twee fluxen: de flux langs de x-richting en



Figuur 4.8: Het zes-punten stencil voor het benaderen van f_{int}

de flux lansg de y-richting:

$$(\frac{\partial \phi}{\partial n}) = (\frac{\partial \phi}{\partial x})n_x + (\frac{\partial \phi}{\partial y})n_y, \tag{4.64}$$

waarin n_x en n_y de twee componenten van de eenheidsvector loodrecht op de zijde CD. Omdat wij de vorm van de interne bewegende rand kennen betekent ook dat n_x en n_y bekend zijn. De onbekenden nu zijn de fluxen $(\frac{\partial \phi}{\partial x})$ en $(\frac{\partial \phi}{\partial y})$. De flux $(\frac{\partial \phi}{\partial y})$ kan benaderd worden met een twee-orde nauwkeurigheid door van uit te gaan dat de global vorm van de functie ϕ ziet er als volgt uit:

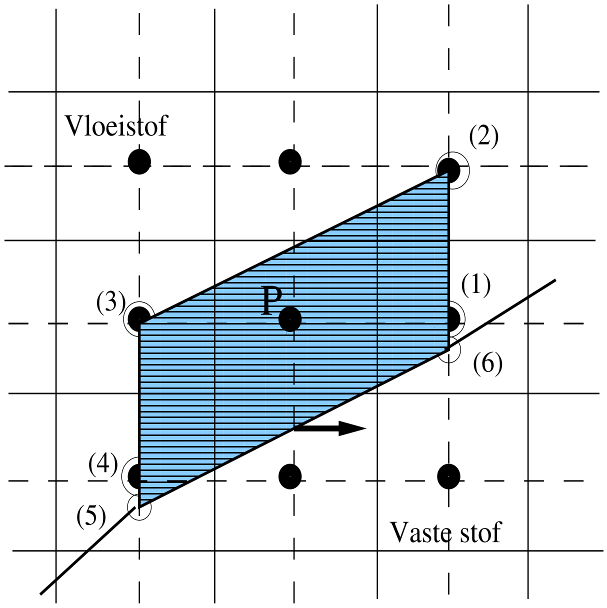
$$\phi = a_1 y^2 + a_2 y + a_3, \tag{4.65}$$

en dus

$$(\frac{\partial \phi}{\partial y})_{int} = 2a_1 y_{int} + a_2 = \sum_{j=1}^{3} \tau_j{}^y \phi_j, \tag{4.66}$$

waar de coëfficienten $\tau_j{}^y$ alleen van de geometrie van de cel aan de rand afhangen. Om die te bepalen zullen we de volgende stencil gebruiken zie figuur 4.8. Om $\frac{\partial \phi}{\partial x}$, met een twee-orde nauwkeurigheid, te bepalen zullen we aannemen dat de oplossing ϕ lineair in x en kwadratisch in y. De reden dat wij ϕ lineair in x nemen is dat de zijde CD in het midden van het beschouwde trapezium ligt zie figuur 4.9 . Dezelfde procedure om $(\frac{\partial \phi}{\partial x})_{sw}$ te benaderen wordt ook voor $(\frac{\partial \phi}{\partial x})_{int}$ gebruikt. We krijgen de volgende uitdruking voor $(\frac{\partial \phi}{\partial x})_{int}$:

$$(\frac{\partial \phi}{\partial x})_{int} = \sum_{j=1}^{6} \tau_j{}^x \phi_j, \tag{4.67}$$



Figuur 4.9: Het zes-punten stencil voor het benaderen van f_{int}

waarin de coëifficienten ${\tau_j}^x$ alleen van de positie en de oriëntatie de bewegende interne rand afhangen. Tenslot voor de normale flux $(\frac{\partial \phi}{\partial n})_{int}$ krijgen volgende uitdruking:

$$(\frac{\partial \phi}{\partial n})_{int} = \sum_{j=1}^{9} \tau_j \phi_j, \tag{4.68}$$

waar de coëifficienten τ_j worden bepaald door gebruik te maken van formules (4.64), (8.18) en (5.16). Daarmee zijn de fluxen van trapeziumvormige control-volume bepaald aan de hand van variables die met de positie en de oriëntatie van de interne bewegende rand te maken hebben.

4.3.4 Conclusie

In de besproken colcated methode treden twee problemen op: het eesrte probleem heeft te maken met het oplossen van de druk Poisson vergelijking (grid-grid druk oscillaties) en het tweede probleem is om aan de continuiteit vergelijking te voldaan. Een remedie is de fully staggered methode, waarin de druk ligt op de cel-centrum en de snelheid op de zijde-centrum van een control-volume, te gebruiken. Het nadeel van de methode is dat die vergroot de complexiteit van de solver want de impulse en de continuiteit vergelijking worden op verschillende locaties gediscretiseerd. De Cartesische Rooster methode is gekenmerkt door het feit dat de snelheidsveld wordt gerepresenteerd door twee verschillende variables: de cel-centrum snelheid die voldoet aan de impulse vergelijking en de zijde-centrum snelheid die voldoet aan de continuiteit vergelijking. Daarmee zijn de problemen omtrent de druk oscillaties en het voldaan aan de continuiteit vergelijking tegelijkertijd opgelost. Nog een ander voordeel van de Cartesische rooster methode is dat omdat ook binnen de bewegende lichaam gedisretiseerd wordt, het is dan mogelijk om binnen de bewegende lichaam de warmteoverdracht vergelijkingen op te lossen als wij geintereseerd zijn om de tempurature van het lichaam te bepalen. In de voedingsmiddelen industrie is dat een belangrijk resultaat want bij hogere temperature worden de bactiëren gedood en is daarmee het voedsel steriel geworden. We kunnen concluderen dat de Cartesische Rooster Methode meer voordelen dan de Colocated en fully staggered methode heeft.

Hoofdstuk 5

Newtonse stroming

5.1 De Poiseuille stroming met vaste randen

De Poiseuille stroming is een bekend voorbeeld van een viskeuze stroming in de vloeistofdynamica. Tussen twee horizontale wanden stroomt een onsamendrukbaar fluidum met een constante dynamische viscositeit μ. Er moet langs de platen een drukgradient aanwezig zijn om de stroming in stand te houden, want er is wrijving aan de wand. De twee wanden bevinden zich op een afstand L en hebben snelheid nul. De stroming is stationair (zie figuur5.1).

Het is een klassiek voorbeeld om de Navier-Stokes vergelijkingen te bestuderen. Voor kleine waarden van het Reynoldsgetal is de stroming stationair en laminair en is het snelheidsprofiel parabolisch.

Figuur 5.1: Parabolisch profiel van de snelheid voor de Poiseuille stroming

5.1.1 De analytische oplossing

De grootheden u, v en p zijn functies van x en y.
De basisvergelijkingen voor de stationaire stroming langs de wanden luiden als volgt:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \mu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}), \tag{5.1}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \mu(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}), \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{5.3}$$

$$u(x, 0) = 0, \tag{5.4}$$

$$u(x, L) = 0, \tag{5.5}$$

$$p(0, y) = p^0, \tag{5.6}$$

$$p(D, y) = p^1, \tag{5.7}$$

waarin D de afstand in de x-richting is. Stel dat de snelheid $v(x, y)$ constant is. Omdat de snelheid aan de randen nul is volgt

$$v(x, y) = 0.$$

Gezien de continuiteitsvergelijking volgt dat :

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 0$$

en dus dat $u(x, y)$ alleen van y afhangt.
Uit de formule (8.2) volgt dat:

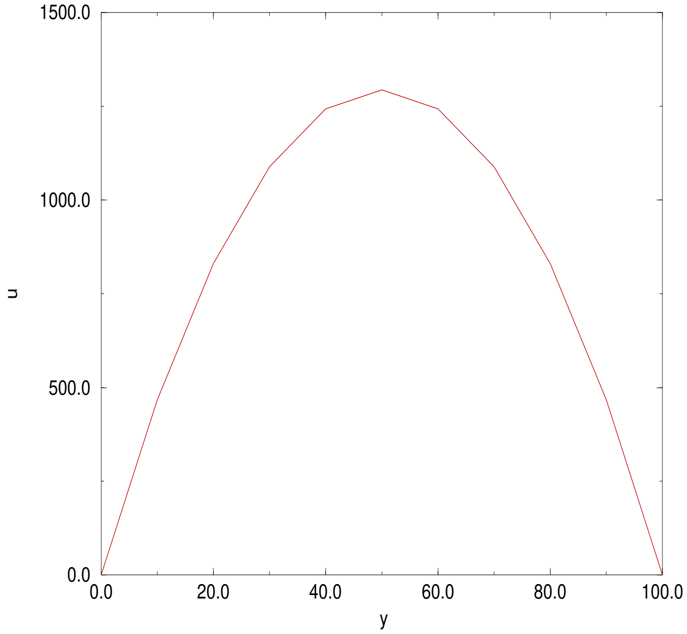
$$\frac{-1}{\rho}\frac{\partial p(x, y)}{\partial y} = 0$$

en dus dat de druk $p(x, y)$ alleen van x afhangt.
Dit invullen in de formule (8.1) geeft:

$$\mu\frac{d^2 u(y)}{dy^2} = \frac{1}{\rho}\frac{dp(x)}{dx} = k,$$

waarbij k een constante is.
Het is eenvoudig (met verwerken van de randvoorwaarden) in te zien dat:

$$u(y) = \frac{1}{2\mu}ky(y - L)$$



Figuur 5.2: Het profiel van de analytische oplossing van de snelheid voor de Poiseuille stroming

en

$$p(x) = p^0 + k\rho x,$$

waarbij $k = \frac{p^1 - p^0}{\rho D}$. Dit is drukval per lengteeenheid. Omdat $p^0 \geq p^1$ is k negatief. Dit wordt ook in de volgende hoofdstukken gebruikt. Voor het profiel van de analytische oplossing van de snelheid (zie figuur(5.2)).

5.1.2 De numerieke oplossing

De volgende stap is het volgende probleem numeriek op te lossen:

$$\mu \frac{d^2 u(y)}{dy^2} = \frac{1}{\rho} \frac{dp(x)}{dx}, \tag{5.8}$$

$$u(0) = 0, \tag{5.9}$$

$$u(L) = 0, \tag{5.10}$$

Dit probleem heet Fully-Developed channel flow en om de numerieke oplossing in de tijd naar de analytische oplossing te laten convergeren, stappen we over naar het zogeheten Pseudo-transient probleem:

$$\frac{\partial u(y,t)}{\partial t} = -k + \mu \frac{\partial^2 u(y,t)}{\partial y^2}, \quad 0 \leq y \leq L, \quad 0 \leq t, \tag{5.11}$$

$$u(0,t) = 0, \tag{5.12}$$

$$u(L,t) = 0, \tag{5.13}$$

$$u(y,0) = 0. \tag{5.14}$$

Waarbij gebruik gemaakt is van het feit dat $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = k.$ We gaan eerst het probleem discretiseren.

De expliciete methode van Euler

Voor het oplossen van probleem (8.11) t/m (8.17) voeren we een rooster in:

$$y_i = i\Delta y,$$

voor

$$i = 0, \cdots, N,$$

en

$$\Delta y = \frac{L}{N}.$$

waarbij N is het aantal lijnstukken.
Verder verdelen we het tijdsinterval $[0,T]$ in N_T intervallen met lengte Δt. Definieer $t^n = n\Delta t$ en $\hat{u}_i^n$ is de numerieke benadering van $u(u_i, t^n) = u(i\Delta y, n\Delta t)$. De tijdsintegratie met de expliciete methode van Euler geeft:

$$(\frac{\partial u(y,t^n)}{\partial t})_i \approx \frac{\hat{u}_i^{n+1} - \hat{u}_i^n}{\Delta t}. \tag{5.15}$$

De ruimtelijke discretisatie geeft:

$$(\frac{\partial^2 u(y,t^n)}{\partial y^2})_i \approx \frac{\hat{u}_{i-1}^n - 2\hat{u}_i^n + \hat{u}_{i+1}^n}{(\Delta y)^2}. \tag{5.16}$$

Neem

$$\frac{\mu \Delta t}{(\Delta y)^2} = \eta. \tag{5.17}$$

Het invullen van de formules (8.18) en (5.16) in de formule (8.11) geeft:

$$\hat{u}_i^{n+1} = \hat{u}_i^n - k\Delta t + \eta \hat{u}_{i-1}^n - 2\eta \hat{u}_i^n + \eta \hat{u}_{i+1}^n. \tag{5.18}$$

of

$$\hat{u}_i^{n+1} = -k\Delta t + \eta \hat{u}_{i-1}^n + (1-2\eta)\hat{u}_i^n + \eta \hat{u}_{i+1}^n \tag{5.19}$$

In matrix notatie luidt het discretisatie schema :

$$A\mathbf{\hat{u}^n} + \mathbf{r} = \mathbf{\hat{u}^{n+1}}, \tag{5.20}$$

waarbij

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \eta & 1-2\eta & \eta & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \eta & 1-2\eta & \eta \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.21}$$

en

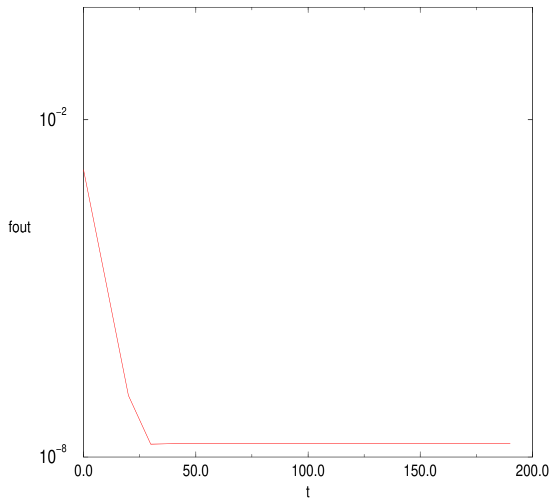
$$\mathbf{\hat{u}^{n+1}} = \begin{pmatrix} \hat{u}_0^{n+1} \\ \vdots \\ \hat{u}_N^{n+1} \end{pmatrix} \tag{5.22}$$

en

$$\mathbf{\hat{u}^{n}} = \begin{pmatrix} \hat{u}_0^{n} \\ \vdots \\ \hat{u}_N^{n} \end{pmatrix} \tag{5.23}$$

en

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -k\Delta t \\ \vdots \\ -k\Delta t \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.24}$$



Figuur 5.3: De fout tussen de numerieke oplossing berekend met de expliciete methode van Euler en de analytische oplossing gaat na 20 tijdstapen naar 10^{-8}

$$u(y,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.25}$$

en

$$\hat{u}_0^{n+1} = 0 \tag{5.26}$$

$$\hat{u}_N^{n+1} = 0 \tag{5.27}$$

Voor bepaalde waarden van de parameters wordt in FORTRAN een programma geschreven. Die waarden zijn:
$\mu = 1$, $N = 10$, $\Delta t = 10$, $L = 1$, $k = -1$, $t_{begin} = 0$ en $t_{end} = 200$, waarin t_{begin} staat voor de begintijd en t_{end} voor de eindtijd. Er blijkt uit de resultaten dat de numerieke oplossing in de tijd naar de analytische oplossing convergeert (zie figuur 9).
De fout E_1 is de maximale fout:

$$E_1 = max(u_i^n - \hat{u}_i^n)$$

$$\text{voor } \; i = 0, \cdots, N.$$

De impliciete methode van Euler

Als we hetzelfde probleem oplossen met de impliciete tijdsintegratie methode van Euler krijgen we:

$$\hat{u}_i^{n+1}(1+2\eta) = \hat{u}_i^n + \eta\hat{u}_{i-1}^{n+1} + \eta\hat{u}_{i+1}^{n+1} - k\Delta t, \tag{5.28}$$

$$\text{voor } i = 1, \cdots, N-1,$$

of

$$\hat{u}_i^{n+1}(1+2\eta) - \eta\hat{u}_{i-1}^{n+1} - \eta\hat{u}_{i+1}^{n+1} = \hat{u}_i^n - k\Delta t, \tag{5.29}$$

en

$$\hat{u}_0^n = 0, \tag{5.30}$$

$$\hat{u}_N^n = 0. \tag{5.31}$$

Het discretisatie schema in matrixvorm wordt:

$$M_{IE}\mathbf{\hat{u}^{n+1}} = \mathbf{\hat{u}^n} + \mathbf{r}, \tag{5.32}$$

waarbij

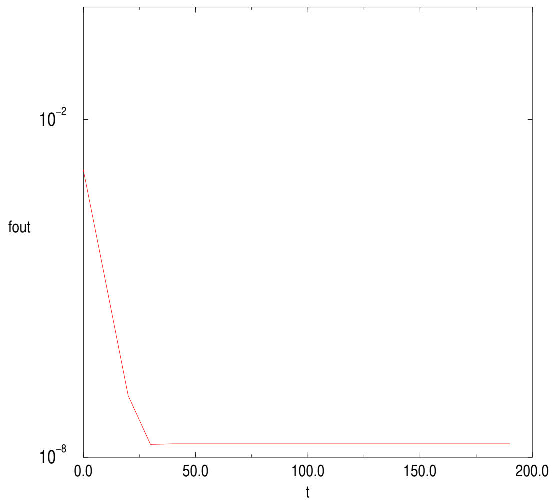
$$M_{IE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\eta & 1+2\eta & -\eta & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -\eta & 1+2\eta & -\eta \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.33}$$

Formules 5.22 tot en met 7.16 blijven ook in dit geval geldig.
Na oplossen van het lineaire stelsel krijgen we $\mathbf{\hat{u}}^{n+1}$. Analoog aan het geval waar de expliciete methode van Euler gebruikt wordt, is een programma in FORTRAN geschreven met dezelfde waarden van de parameters als het vorige geval. Er blijkt dat de numerieke oplossing in de tijd naar de analytische oplossing convergeert(zie figuur 5.4).

5.2 De Poiseuille stroming met bewegende randen

5.2.1 De analytische oplossing

In dit geval beweegt de bovenste plaat met een snelheid u_{top} in de x-richting en de onderste plaat beweegt met een snelheid u_{bodem} in de x-richting.



Figuur 5.4: De fout tussen de oplossing berekend met de impliciete methode van Euler en de analytische oplossing gaat na 20 tijdstapen naar 10^{-8}

De formules (8.1) t/m (8.4) blijven ook in dit geval geldig, alleen de formules (5.4) en (5.5) worden vervangen door:

$$u(x,0) = u_{bodem}, \tag{5.34}$$

$$u(x,L) = u_{top}, \tag{5.35}$$

$$\tag{5.36}$$

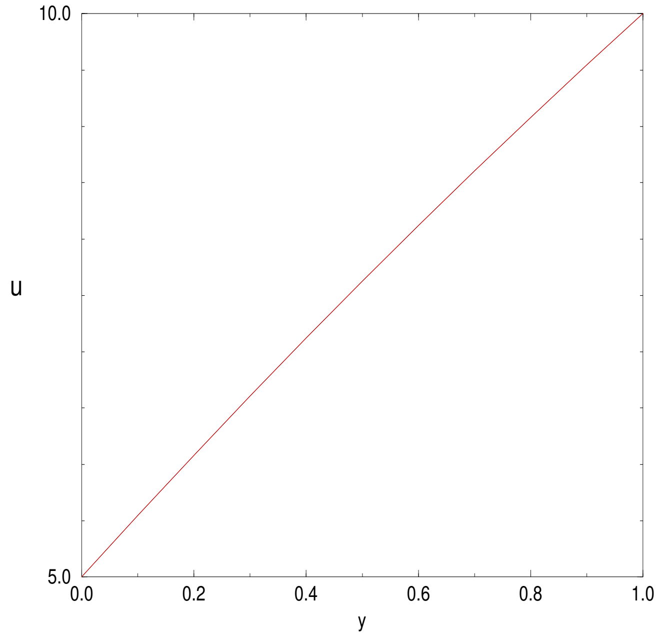
$$u(x,y,0) = \begin{pmatrix} u_{bodem} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_{top} \end{pmatrix}.$$

Analoog aan het geval waar de randen stil staan (zie formule (8.7)) hebben we met de volgende formule te maken:

$$\mu \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = k.$$

Na verwerken van de randvoorwaarden komen we tot de volgende uitdruking :

$$u(y) = \frac{k}{2\mu}y^2 + Cy + u_{bodem}.$$



Figuur 5.5: De analytische snelheid voor het bewegend rand probleem voor $k = -1$

waarin

$$C = \frac{u_{top} - u_{bodem}}{L} - \frac{k}{2\mu}.$$

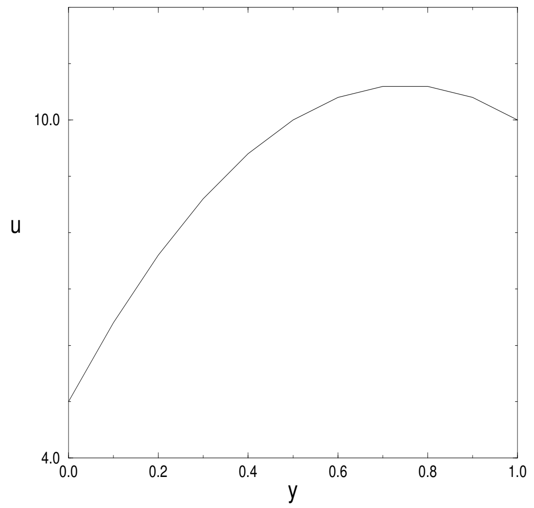
Dit is de analytische oplossing voor de snelheid.

De druk wordt gegeven door:

$$p = p_0 + k\rho x,$$

waarbij $k = \frac{p^1 - p^0}{\rho D}$ Voor $k = -1$,$u_{bodem} = 5$ en $u_{top} = 10$ het profiel van de analytische snelheid is lineair (zie figuur 5.5).

Voor $k = -20$,$u_{bodem} = 5$ en $u_{top} = 10$ het profiel van de analytische snelheid is parabolisch (zie figuur 5.6).



Figuur 5.6: De analytische snelheid voor het bewegend rand probleem $k = -20$

5.2.2 De numerieke oplossing

De expliciete methode van Euler

De formules (8.18) t/m (7.14) zijn ook in dit geval geldig. Alleen (7.15) en (7.16) worden vervangen door:

$$\hat{u}_0^{n+1} = u_{bodem}, \tag{5.37}$$

$$\hat{u}_N^{n+1} = u_{top}. \tag{5.38}$$

We nemen nu $u_{bodem} = 5$ en $u_{top} = 10$. Voor de andere parameters maken we gebruik van dezelfde waarden als in de vorige gevallen. Er blijkt ook in dit geval dat de numerieke oplossing na 20 tijdstappen naar de analytische oplossing convergeert (zie figuur 5.7).

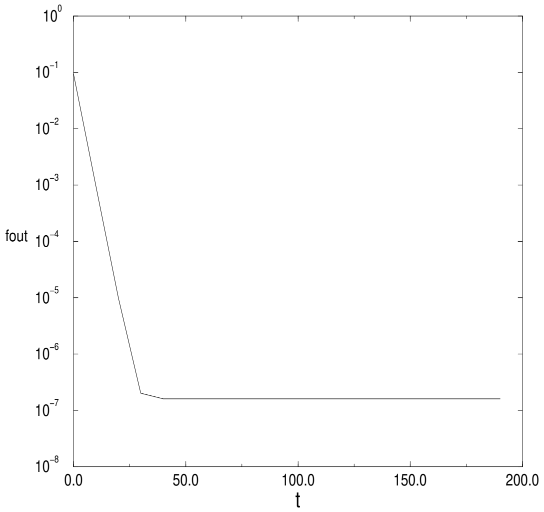
De impliciete methode van Euler

De formules (7.17),(7.18), (7.21) en (7.22) blijven ook in dit geval geldig . Alleen de formules (7.19) en (7.20) en worden vervangen door de volgende formules:

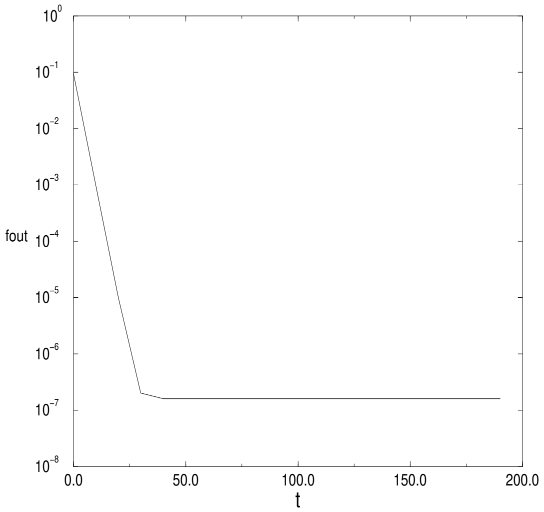
$$\hat{u}_0^n = u_{bodem}, \tag{5.39}$$

$$\hat{u}_N^n = u_{top}, \tag{5.40}$$

Ook hier is een programma in Fortran geschreven en er blijkt daaruit dat de numerieke oplossing in de tijd naar de analytische oplossing nadert(zie figuur 5.8) .



Figuur 5.7: Het gedrag van de fout in het geval van de expliciete methode van Euler en bewegende randen



Figuur 5.8: Het verloop van de fout in het geval van de impliciete methode van Euler en bewegende randen

Hoofdstuk 6

Niet-Newtonse stroming

Tot nu toe waren wij bezig binnen het kader van Newtonse fluida. Voor niet-Newtonse fluida, wordt het verband tussen de spanningstensor en snelheid vastgelegd door een stelsel van partiële differentiaal vergelijkingen. Voor verschillende soorten van fluida zijn modellen bekend. We zullen ons beperken tot Power Law model. In dit model is de viscositeit afhankelijk van de afgeleide van de snelheid.

6.1 Poiseuille stroming met vaste randen

Analoog aan paragraaf 4.1 gaan we, in het geval van niet-Newtonse fluida, proberen de analytische en de numerieke oplossing van de snelheid te bepalen en ze te vergelijken. Eerst bepalen we de analytische oplossing van de snelheid.

6.1.1 De analytische oplossing

In deze paragraaf kijken we naar het geval waar de viscositeit niet constant is. We postuleren $v = 0$, $u = u(y,t)$. Dan reduceert de impulsvergelijking tot volgende formule:

$$\frac{d(\mu \frac{du}{dy})}{dy} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = k, \tag{6.1}$$

waarin

$$\mu = C|\frac{du}{dy}|^{e-1} \quad \text{(De power wet)}, \tag{6.2}$$

$$\text{en} \quad k = \frac{p^1 - p^0}{\rho D}. \tag{6.3}$$

C en e zijn positieve constanten. In principe mag de parameter e elke positieve waarde aannemen, maar ons interesse gaat uit naar de waarden die tussen 0 en 1 liggen.
Neem

$$C_1 = \frac{k}{C}. \tag{6.4}$$

We kunnen twee gebieden onderscheiden:

$$0 \leq y \leq \frac{L}{2} \text{ en } \frac{L}{2} \leq y \leq L. \tag{6.5}$$

Gebied 1: $0 \leq y \leq \frac{L}{2}$.
Gezien het parabolisch verloop van de analytische oplossing van de snelheid voor het Newtonse geval nemen we aan dat $\frac{du}{dy} \geq 0$ op $0 \leq y \leq \frac{L}{2}$ geldt
We zullen dit na afloop controleren. Het invullen van de formules (6.2) en (6.4) in (6.1) geeft:

$$\frac{d(\frac{du}{dy})^e}{dy} = C_1. \tag{6.6}$$

De algemene vorm van de oplossing luidt :

$$u(y) = \frac{e}{C_1(e+1)}[(C_1 y + C_2)^{1+\frac{1}{e}}] + C_3, \tag{6.7}$$

waarbij C_2 en C_3 constanten zijn die met de randvoorwaarden te bepalen zijn. Uit de aanname dat:

$$\frac{du}{dy}(\frac{L}{2}) = 0, \tag{6.8}$$

volgt dat:

$$C_2 = -\frac{C_1 L}{2}.$$

We hebben aangenomen dat $u(0) = 0$ en daaruit volgt dat:

$$C_3 = -\frac{e}{C_1(e+1)}[(C_2)^{1+\frac{1}{e}}].$$

Het invullen van C_2 en C_3 in de algemene vorm van de oplossing (6.7) geeft:

$$u(y) = \frac{e}{C_1(e+1)}[(C_1 y + C_2)^{1+\frac{1}{e}} - (C_2)^{1+\frac{1}{e}}]. \tag{6.9}$$

Het differentiëren van formule (6.9) geeft:

$$\frac{du}{dy} = (C_1 y - \frac{C_1 L}{2})^{\frac{1}{e}}. \tag{6.10}$$

Omdat C_1 negatief is (immers $C_1 = \frac{k}{C}$ en $k \leq 0$ en $y \leq \frac{L}{2}$) volgt dat de aanname over het teken van de afgeleide van u klopt.

Gebied 2: $\frac{L}{2} \leq y \leq L$
We nemen nu aan dat $\frac{du}{dy} \leq 0$ op $\frac{L}{2} \leq y \leq L$
We zullen dit na afloop controleren. In dit geval wordt formule (6.2) wordt:

$$\mu = C(-\frac{du}{dy})^{e-1}. \tag{6.11}$$

neem $v = -u$ dan formule wordt (6.11) :

$$\mu = C(\frac{dv}{dy})^{e-1}. \tag{6.12}$$

Het invullen van de formule (6.12) in de formule (6.1) geeft:

$$\frac{d(\frac{dv}{dy})^e}{dy} = \bar{C_1}, \tag{6.13}$$

waarin

$$\bar{C_1} = -\frac{k}{C}.$$

De algemene vorm van de oplossing luidt:

$$v(y) = \frac{e}{\bar{C_1}(e+1)}[(\bar{C_1}y + \bar{C_2})^{1+\frac{1}{e}}] + \bar{C_3}. \tag{6.14}$$

waarbij $\bar{C_2}$ en $\bar{C_3}$ zijn constanten die met de randvoorwaaarden te bepalen zijn:

$$\frac{dv}{dy}(\frac{L}{2}) = 0. \tag{6.15}$$

Hieruit volgt dat:

$$\bar{C_2} = -\frac{\bar{C_1}L}{2}. \tag{6.16}$$

Gegeven is

$$v(L) = 0.$$

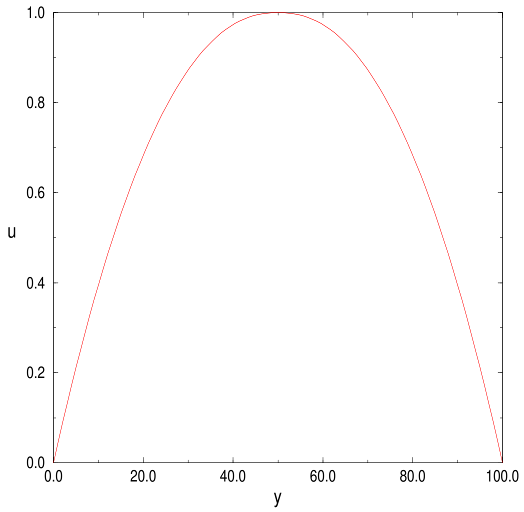
Hieruit volgt dat

$$\bar{C_3} = -\frac{e}{\bar{C_1}(e+1)}[(\bar{C_1}L + \bar{C_2})^{1+\frac{1}{e}}]. \tag{6.17}$$

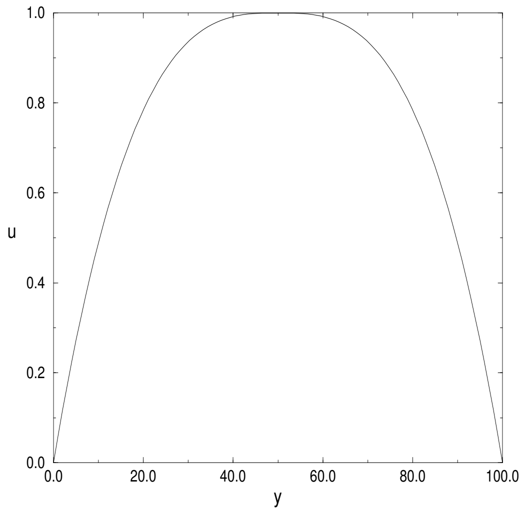
Het invullen van formules (6.16) en (6.17) in formule (6.14) levert:

$$u(y) = -\frac{e}{\bar{C_1}(e+1)}[(\bar{C_1}(y - \frac{L}{2}))^{1+\frac{1}{e}} - (\bar{C_1}\frac{L}{2})^{1+\frac{1}{e}}], \tag{6.18}$$

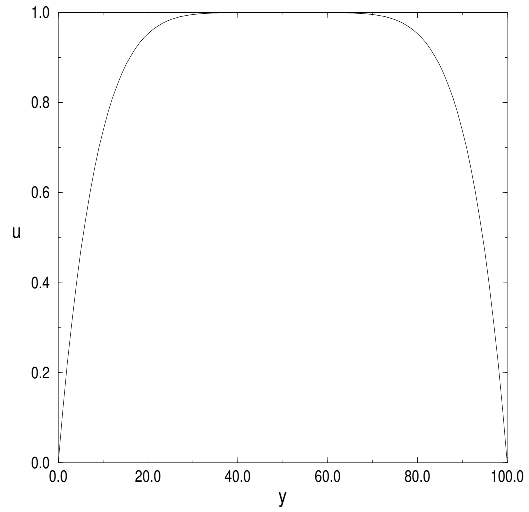
Analoog kan ook nagegaan worden dat de aanname klopt en dat beide analytische oplossingen dezelfde waarde op $\frac{L}{2}$ hebben (daarmee is de continuiteit gegarandeerd). In beide gevallen is nagegaan dat de twee aananmes, die over het teken van de snelheid zijn gemaakt, kloppen. De volgende stap is om het analytische resultaat numeriek te gaan controleren.
Om een beeld te krijgen over het profiel van de analytische snelheid zie figuren (6.1) t/m (6.3).



Figuur 6.1: Het profiel van de analytische snelheid voor $e = 0.8$



Figuur 6.2: Het profiel van de analytische snelheid voor $e = 0.5$



Figuur 6.3: Het profiel van de analytische snelheid voor $e = 0.2$

6.1.2 De numerieke oplossing

Eerst gebruiken we de expliciete methode van Euler als de numerieke tijdsintegratie methode.

De expliciete methode van Euler

We gaan uit van de volgende vergelijkingen:

$$\frac{\partial u(y,t)}{\partial t} = -k + \frac{\partial(\mu \frac{\partial u(y,t)}{\partial y})}{\partial y}, \tag{6.19}$$

$$u(0,t) = 0, \tag{6.20}$$

$$u(L,t) = 0, \tag{6.21}$$

$$u(y,0) = 0, \tag{6.22}$$

Na het toepassen van de tijd en ruimtelijke discretisatie krijgen we: Neem

$$\beta = \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}$$

$$\begin{aligned}\hat{u}_i^{n+1} &= -k\Delta t + \beta[\mu_{i-\frac{1}{2}}\hat{u}_{i-1}^n + \\ &(\frac{1}{\beta} - (\mu_{i-\frac{1}{2}} + \mu_{i+\frac{1}{2}}))\hat{u}_i^n + \\ &+\mu_{i+\frac{1}{2}}\hat{u}_{i+1}^n]\end{aligned} \tag{6.23}$$

waarbij

$$\mu_{i-\frac{1}{2}} = C(|\frac{\partial u(y,t)}{\partial y}|)^{e-1}|_{i-\frac{1}{2}} \tag{6.24}$$

en

$$\mu_{i+\frac{1}{2}} = C(|\frac{\partial u(y,t)}{\partial y}|)^{e-1}|_{i+\frac{1}{2}}. \tag{6.25}$$

Het discretisatie schema in matrixvorm wordt:

$$A\mathbf{\hat{u}^{n+1}} = \mathbf{\hat{u}^n} + \mathbf{r}, \tag{6.26}$$

waarbij

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ -\beta\mu_{\frac{1}{2}} & 1+\beta(\mu_{\frac{1}{2}}+\mu_{\frac{3}{2}}) & -\beta\mu_{\frac{3}{2}} & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -\beta\mu_{N-\frac{3}{2}} & 1+\beta(\mu_{N-\frac{3}{2}}+\mu_{N-\frac{1}{2}}) & -\beta\mu_{N-\frac{1}{2}} & \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.27}$$

en

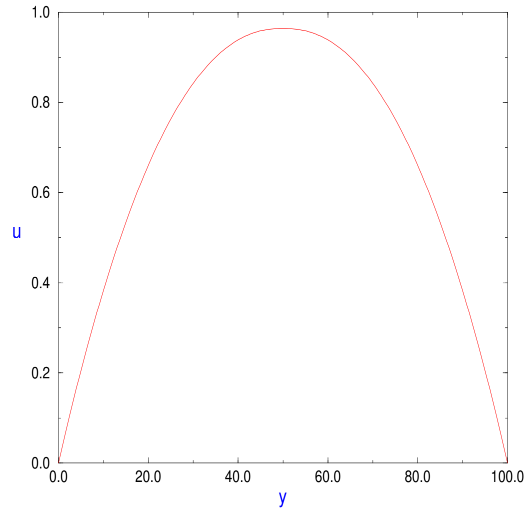
$$\mathbf{\hat{u}^{n+1}} = \begin{pmatrix} \hat{u}_0^{n+1} \\ \vdots \\ \hat{u}_N^{n+1} \end{pmatrix} \tag{6.28}$$

en

$$\mathbf{\hat{u}^n} = \begin{pmatrix} \hat{u}_0^n \\ \vdots \\ \hat{u}_N^n \end{pmatrix} \tag{6.29}$$

en

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -k\Delta t \\ \vdots \\ -k\Delta t \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6.30}$$



Figuur 6.4: Het profiel van de numerieke snelheid voor $e = 0.8$ na 200000 stappen

Voor de volgende waarden van de parameters is in Fortran een programma geschreven: $N = 200$, $Dt = 0.01$, $L = 100$, $u(\frac{L}{2}) = 1$, $t_{begin} = 0$, $t_{end} = 20000$, $u_{bodem} = 0$, $u_{top} = 0$, $C = 1$.
Om een idee te krijgen van de invloed die e heeft op het profiel van de numerieke snelheid, gaan we de waarden van e variëren(zie figuur 6.4 t/m 6.6).

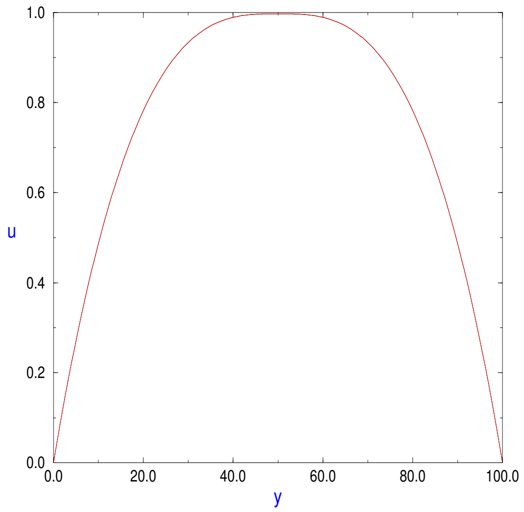
Merk op dat naarmate e naar nul nadert hoe meer het profiel van de numerieke snelheid vlakker wordt. Als e naar 1 gaat krijgen we het parabolische profiel van de snelheid voor een constante viscositeit terug.
Om een idee te hebben over de fout tussen de analytische oplossing en de numerieke oplossing zie figuren (6.8) t/m (6.9).

Er blijkt uit de figuur (6.8) t/m (6.10) dat inderdaad de fout tussen de analytische en de numerieke snelheid klein wordt.

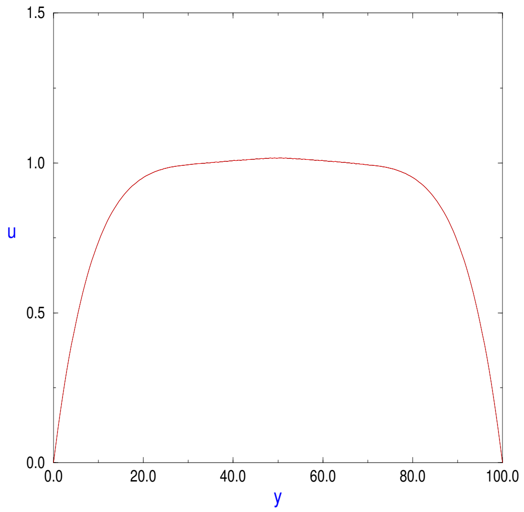
De impliciete methode van Euler

Formules (7.19) tot en met (7.21) blijven geldig. Formule (7.18) wordt vervangen door de volgende formule:

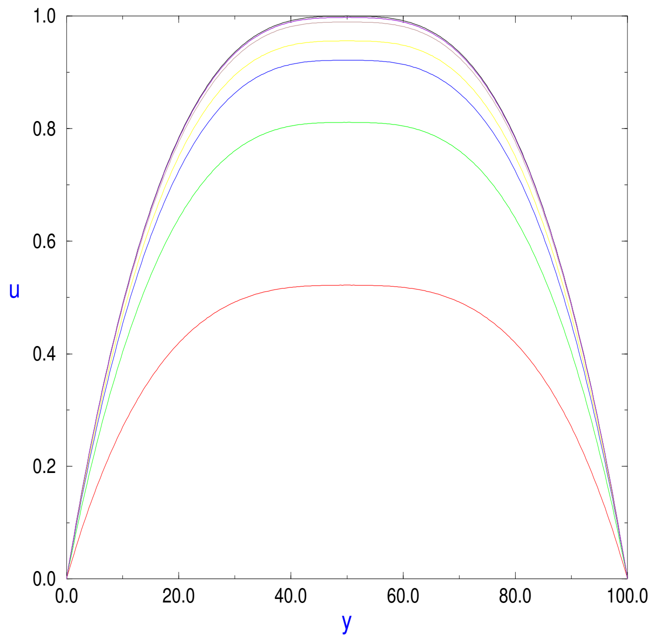
$$\hat{u}_i^{n+1}(1 + \beta(\mu_{i-\frac{1}{2}} + \mu_{i+\frac{1}{2}})) - \beta\mu_{i-\frac{1}{2}}\hat{u}_{i-1}^{n+1} + \beta\mu_{i+\frac{1}{2}}\hat{u}_{i+1}^{n+1} = \hat{u}_i^n - k\Delta t, \tag{6.31}$$



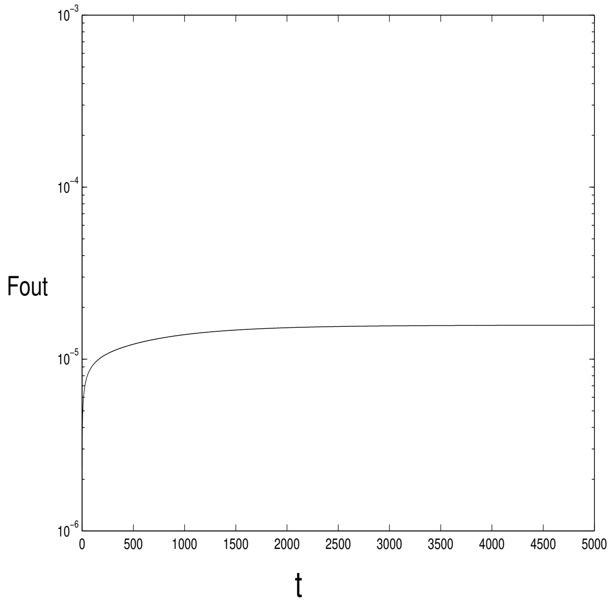
Figuur 6.5: Het profiel van de numerieke snelheid voor $e = 0.5$ na 200000 stappen



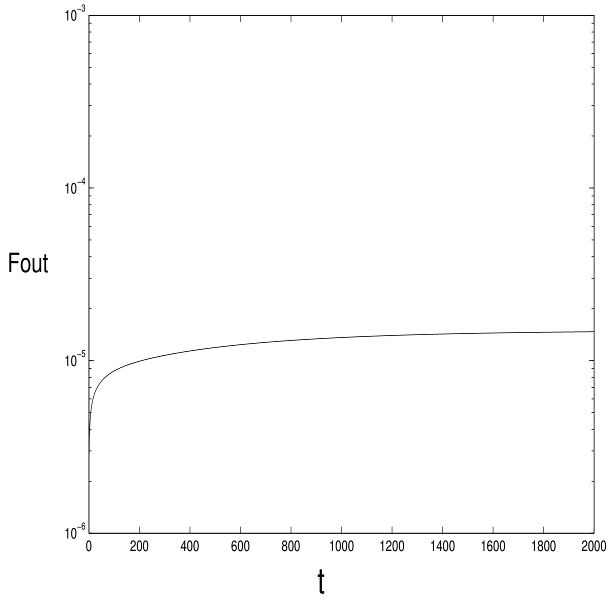
Figuur 6.6: Het profiel van de numerieke snelheid voor $e = 0.2$ na 200000 stappen



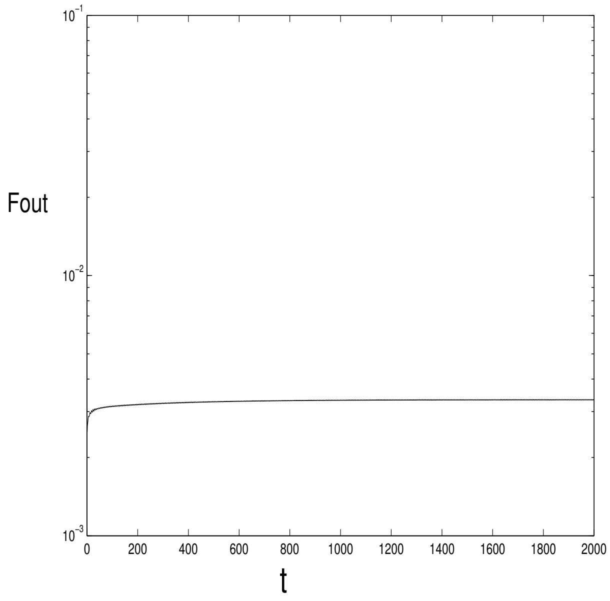
Figuur 6.7: De numerieke snelheid stijgt in de loop van de tijd naar de analytische snelheid voor $e = 0.5$



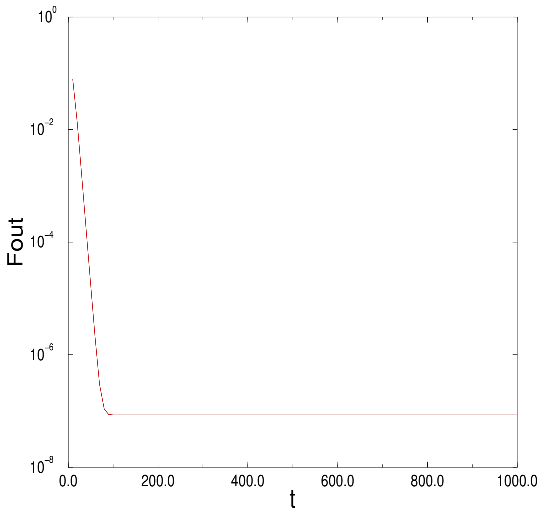
Figuur 6.8: De fout E1 tussen de numerieke oplossing berekend met de expliciete methode van Euler en de analytische oplossing voor $e = 0.9$



Figuur 6.9: De fout tussen de numerieke oplossing berekend met de expliciete methode van Euler en de analytische oplossing voor $e = 0.8$



Figuur 6.10: Het gedrag van de fout tussen de analytische en de numerieke snelheid voor $e = 0.5$



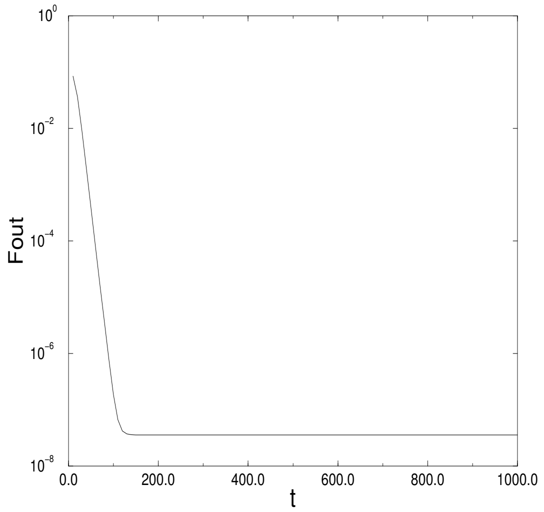
Figuur 6.11: De fout E1 tussen de numerieke oplossing berekend met de impliciete methode van Euler en de analytische oplossing voor $e = 0.9$

$$\text{voor} \quad i = 1, \cdots, N-1, \tag{6.32}$$

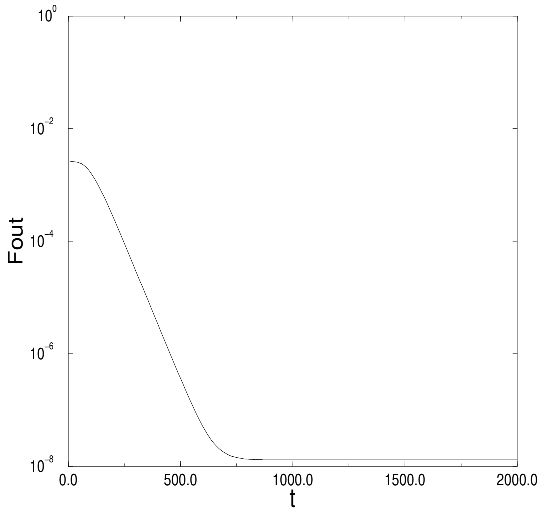
formule (7.22) wordt vervangen door de volgende formule :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ -\beta\mu_{\frac{1}{2}} & 1+\beta(\mu_{\frac{1}{2}}+\mu_{\frac{3}{2}}) & -\beta\mu_{\frac{3}{2}} & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -\beta\mu_{N-\frac{3}{2}} & 1+\beta(\mu_{N-\frac{3}{2}}+\mu_{N-\frac{1}{2}}) & -\beta\mu_{N-\frac{1}{2}} & \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.33}$$

waarbij $\mu_{i-\frac{1}{2}}$ respectivelijk $\mu_{i+\frac{1}{2}}$ voldoen aan (6.24) respectivelijk (6.25). Om een idee te krijgen van het profiel van de fout zie figuren : Er blijkt uit de figuur (6.11) t/m (6.13) dat inderdaad de fout tussen de analytische en de numerieke snelheid klein wordt.



Figuur 6.12: De fout tussen de numerieke oplossing berekend met de impliciete methode van Euler en de analytische oplossing voor $e = 0.8$



Figuur 6.13: De fout tussen de numerieke oplossing berekend met de impliciete methode van Euler en de analytische oplossing voor $e = 0.2$

6.2 Poiseuille stroming met bewegende randen

6.2.1 De analytische oplossing van de snelheid

We nemen aan de onderste plaat stil staat en de bovenste plaat met een snelheid U_{top} beweegt. We nemen aan dat op $y = y^\star$ de snelheid u zijn maximum aanneemt.
In deze paragraaf komen twee analytische methoden aan de orde om tot de analytische oplossing te komen .

De eerste methode
De formules (6.1) t/m (6.4) blijven ook in dit geval geldig .
We kunnen twee gevallen onderscheiden:
Geval I: $u(y)$ heeft geen intern maximum.
Geval II: $u(y)$ heeft een intern maximum.
Geval I: We nemen aan dat $U_{top} \geq 0$ en dus analoog aan het geval I op het gebied 1 van de paragraaf 7.1.1(dus in het geval van vaste randen), we krijgen met de volgende formule te maken :

$$u(y) = \frac{e}{C_1(e+1)}[(C_1 y + C_2)^{1+\frac{1}{e}} - (C_2)^{1+\frac{1}{e}}], \tag{6.34}$$

waarbij C_2 een constante is, die bepaald moet worden aan de hand van de randvoorwaarden:

$$u(L) = U_{top}. \tag{6.35}$$

Het invullen van formule (6.35) in formule (6.34) levert:

$$U_{top} = \frac{e}{C_1(e+1)}[(C_1 L + C_2)^{1+\frac{1}{e}} - (C_2)^{1+\frac{1}{e}}]. \tag{6.36}$$

De constante C_1 voldoet aan de volgende vergelijking:

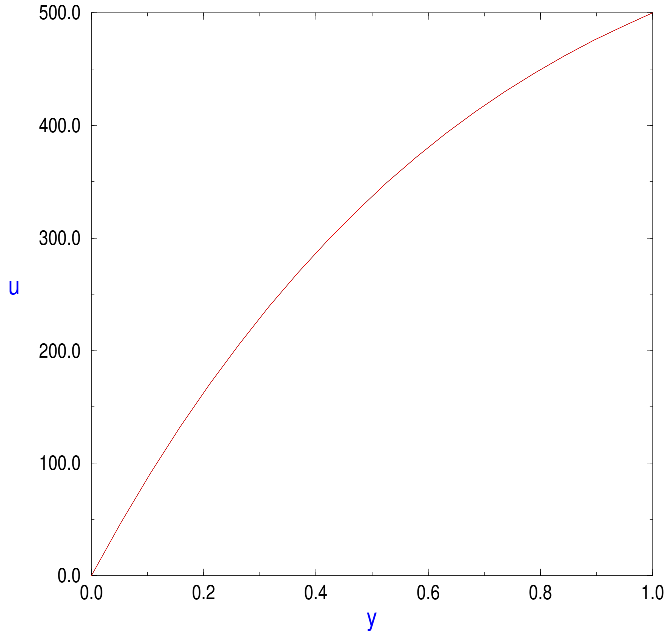
$$C_1 = \frac{k}{C}. \tag{6.37}$$

De iteratieve methode van Newton-Raphson toegepast om de constante C_2 te bepalen. Gegeven een startwaarde x_0, het iteratie proces luidt dan :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{(\frac{df}{dx})(x_k)}. \tag{6.38}$$

In dit geval wordt de functie f gegeven door :

$$f(C_2) = (C_1 L + C_2)^{1+\frac{1}{e}} - (C_2)^{1+\frac{1}{e}} - U_{top} C_1 (\frac{e+1}{e}) \tag{6.39}$$



Figuur 6.14: Het verloop van de analytische snelheid voor $e = 0.2$

en zijn afgeleide is gelijk aan:

$$\acute{f}(C_2) = (\frac{e+1}{e})[(C_1L + C_2)^{\frac{1}{e}} - (C_2)^{\frac{1}{e}}].$$

In figuur 6.14 is het profiel van de analytische snelheid te zien voor het geval $e = 0.2$.

Geval II: $u(y)$ heeft een intern maximum. Analoog aan de vorige paragraaf kunnen we ook hier twee gebieden onderscheiden:

$$0 \leq y \leq y^\star \text{ en } y^\star \leq y \leq L. \tag{6.40}$$

Gebied 1: $0 \leq y \leq y^\star$

We nemen aan dat $\frac{du}{dy} \geq 0$ op $0 \leq y \leq y^\star$ geldt.

De formule voor de snelheid lijkt op formule (**??**) namelijk:

$$u(y) = \frac{e}{C_1(e+1)}[(C_1y + C_2)^{1+\frac{1}{e}} - (C_2)^{1+\frac{1}{e}}] \tag{6.41}$$

waarin

$$C_2 = -C_1y^\star. \tag{6.42}$$

Analoog aan het vorige paragraaf kan ook hier nagegaan worden dat de aanname klopt.

Gebied 2: $y^\star \leq y \leq L$

We nemen nu aan dat $\frac{du}{dy} \leq 0$ op $y^\star \leq y \leq L$

op analoge wijze aan de vorige paragraaf wordt de volgende formule verkregen:

$$u(y) = -\frac{e}{\bar{C}_1(e+1)}[(\bar{C}_1(y-y^\star))^{1+\frac{1}{e}} - (\bar{C}_1(L-y^\star))^{1+\frac{1}{e}}] + U_{top}. \tag{6.43}$$

Om $y^\star$ te bepalen gaan we de continuiteit van de snelheid u op $y = y^\star$ opschrijven. De combinatie van de formules (6.41) en (6.43) op $y = y^\star$ levert na een vereenvoudiging:

$$-(\bar{C}_1(L-y^\star))^{1+\frac{1}{e}} - U_{top}\bar{C}_1\frac{e+1}{e} = -(C_2)^{1+\frac{1}{e}} \tag{6.44}$$

of

$$(-C_1(L-y^\star))^{1+\frac{1}{e}} - U_{top}C_1\frac{e+1}{e} = (-C_1y^\star)^{1+\frac{1}{e}}. \tag{6.45}$$

Stel dat :

$$f(y^\star) = -(-C_1(L-y^\star))^{1+\frac{1}{e}} + U_{top}C_1\frac{e+1}{e} + (-C_1y^\star)^{1+\frac{1}{e}}, \tag{6.46}$$

dan wordt de afgeleide van $f(y^\star)$:

$$\frac{df}{dy^\star} = -C_1\frac{e+1}{e}[(-C_1(L-y^\star))^{1+\frac{1}{e}} + (-C_1y^\star)^{\frac{1}{e}}]. \tag{6.47}$$

Na het toepassen van de iteratieve methode van Newton-Raphson op f wordt dan $y^\star$ verkregen.

De volgende stap is om een andere methode te gebruiken om aan de expliciete vorm van de snelheid te komen.

De tweede methode

We gaan uit van de volgende vergelijking (zie [8] pg 218):

$$\frac{d}{dy}(\mu\frac{du(y)}{dy}) = \frac{1}{\rho}\frac{dp(x)}{dx} = k \tag{6.48}$$

$$\text{waarbij} \quad k = \frac{p^1 - p^0}{\rho D}. \tag{6.49}$$

De formules (6.48) en (6.49) impliceren dat:

$$\mu \frac{du(y)}{dy} = (\frac{p^0 - p^1}{\rho D}) L(\lambda - \xi). \tag{6.50}$$

Waarbij λ een constante die bepaald moet worden en $\xi = \frac{y}{L}$.

De variable μ voldoet aan de formule (6.2).

We kunnen twee gevallen onderscheiden:

Geval I: de snelheid $u(y)$ heeft geen intern maximum.

Geval II: de snelheid $u(y)$ heeft een intern maximum.

Geval I:$\mu = C\frac{du}{dy}^{e-1}$

Dit invullen in de formule (6.50) geeft:

$$(\frac{du}{dy})^e = (\frac{p^0 - p^1}{C\rho D}) L(\lambda - \xi). \tag{6.51}$$

Neem

$$s = \frac{1}{e}$$

en

$$\alpha = (\frac{p^0 - p^1}{C\rho D}) L$$

Het integreren van formule (6.51) geeft:

$$u(y) = \alpha^s (-L)(\frac{1}{s+1})(\lambda - \xi)^{1+s} + C_1 \tag{6.52}$$

Nu gaan we de randvoorwaarden verwerken:

Ten eerste: $u(0) = 0$, dit invullen in de formule (6.52) geeft:

$$C_1 = \alpha^s L(\frac{1}{s+1})(\lambda)^{1+s} \tag{6.53}$$

het invullen van de formule (6.53) in de formule (6.52) geeft:

$$u(y) = \alpha^s L(\frac{1}{s+1})[(\lambda)^{1+s} - (\lambda - \xi)^{1+s}] \tag{6.54}$$

Ten tweede : $u(L) = U_{top}$, dit invullen in de formule (6.52) geeft:

$$\alpha^s (-L)(\frac{1}{s+1})(\lambda - 1)^{1+s} + C_1 = U_{top} \tag{6.55}$$

De combinatie van de formule (6.53) en de laatste formule levert:

$$\alpha^s L(\frac{1}{s+1})[(\lambda)^{1+s} - (\lambda-1)^{1+s}] = U_{top} \tag{6.56}$$

de combinatie van formule (6.54) en formule (6.56) geeft:

$$\frac{u(y)}{U_{top}} = \frac{[(\lambda)^{1+s} - (\lambda-\xi)^{1+s}]}{[(\lambda)^{1+s} - (\lambda-1)^{1+s}]} \tag{6.57}$$

Uit de formule (6.56) volgt dat :

$$\alpha(\frac{L}{U_{top}})^{\frac{1}{s}} = [\frac{s+1}{(\lambda)^{1+s} - (\lambda-1)^{1+s}}]^{\frac{1}{s}} \tag{6.58}$$

Neem

$$\Lambda = \alpha(\frac{L}{U_{top}})^{\frac{1}{s}}$$

de formule (6.58) wordt:

$$\Lambda = [\frac{s+1}{(\lambda)^{1+s} - (\lambda-1)^{1+s}}]^{\frac{1}{s}} \tag{6.59}$$

Om geen intern maximum te hebben is het vereist dat Λ voldoet aan de volgende beperking:

$$\Lambda \leq (s+1)^{\frac{1}{s}} \tag{6.60}$$

De methode van Newton kan op formule (6.58) toegepast worden om λ te bepalen en daarmee de gezochte snelheid.

Het is nagegaan dat formule (6.57) aan formule (6.51) voldoet.

Geval II: Analoog aan het eerste geval worden de volgende formules gevonden: i.p.v de formule (6.57) komt de formule (zie [8] pg 189) :

$$\frac{u(y)}{U_{top}} = \frac{[(\lambda)^{1+s} - (\lambda-\xi)^{1+s}]}{[(\lambda)^{1+s} - (1-\lambda)^{1+s}]} \tag{6.61}$$

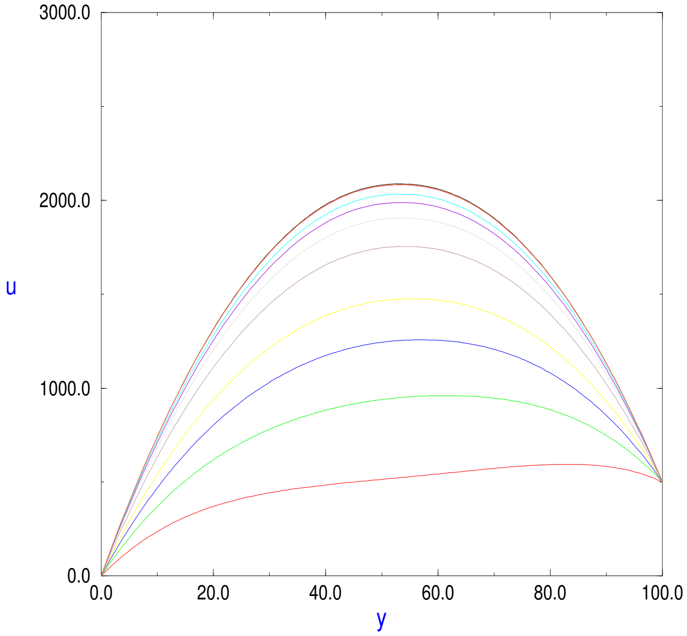
de formule (6.60) wordt vervangen door:

$$\Lambda \geq (s+1)^{\frac{1}{s}} \tag{6.62}$$

de formule (6.59) wordt vervangen door:

$$\Lambda = [\frac{s+1}{(\lambda)^{1+s} - (1-\lambda)^{1+s}}]^{\frac{1}{s}} \tag{6.63}$$

Ook in dit geval het is nagegaan dat formule (6.57) aan formule (6.51) voldoet. Door gebruik te maken van de twee methoden, wordt in beide gevallen dezelfde analytische snelheid verkregen.



Figuur 6.15: De numerieke snelheid stijgt in de loop van de tijd naar de analytische snelheid voor $e = 0.9$

6.2.2 De numerieke oplossing van de snelheid

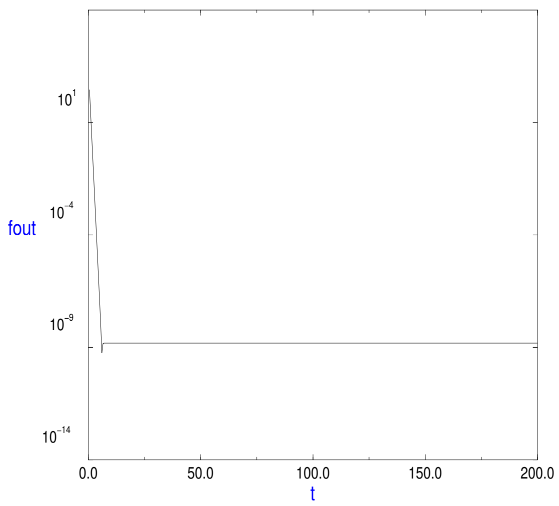
De expliciete methode van Euler

Analoog aan de paragraaf 7.1.2 de formules (6.19), (6.20) en (6.22)t/m(6.25) blijven geldig, alleen de formule (6.21) wordt vervangen door de volgende formule:

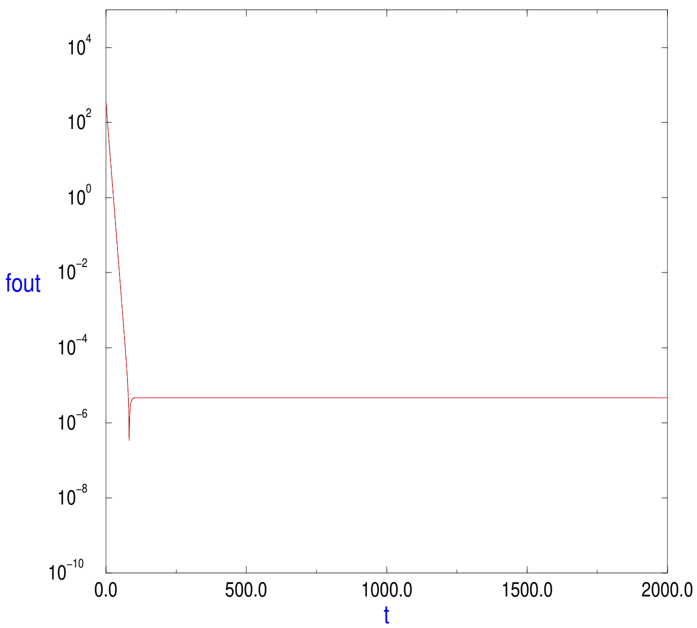
$$u(L,t) = U_{top}. \tag{6.64}$$

Om een idee te hebben over de fout tussen de analytische oplossing en de numerieke oplossing zie figuren (6.16 t/m 6.17).

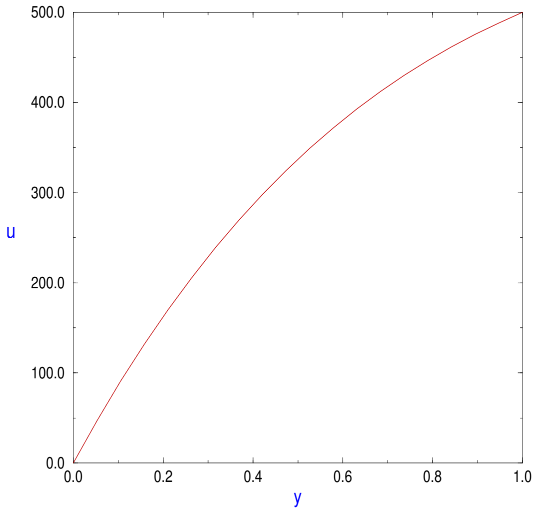
Er blijkt ook hier uit de figuren (6.16 t/m 6.17) dat inderdaad de fout tussen de analytische en de numerieke snelheid naar 10^{-9} respectievelijk 10^{-5} gaat.



Figuur 6.16: Het gedrag van de fout tussen de analytische en de numerieke snelheid voor $e = 0.9$ met bewegende randen



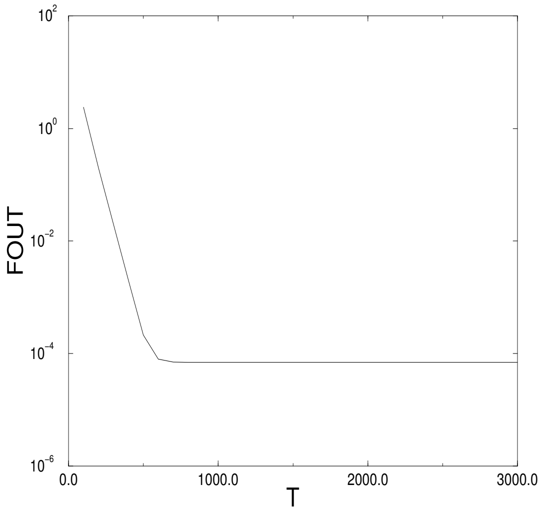
Figuur 6.17: Het gedrag van de fout tussen de analytische en de numerieke snelheid voor $e = 0.5$ met bewegenden randen



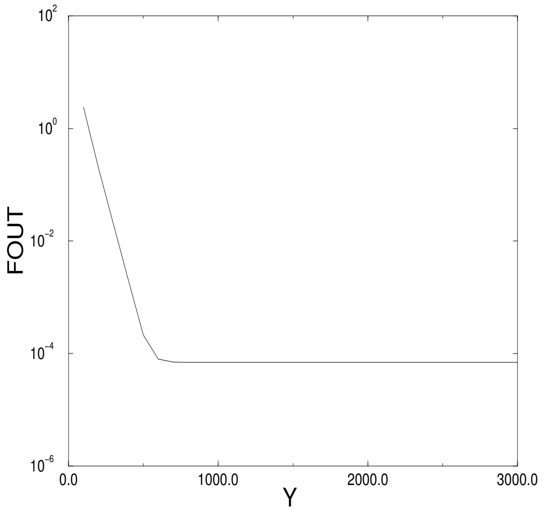
Figuur 6.18: Het verloop van de numerieke snelheid voor $e = 0.2$

De impliciete methode van Euler

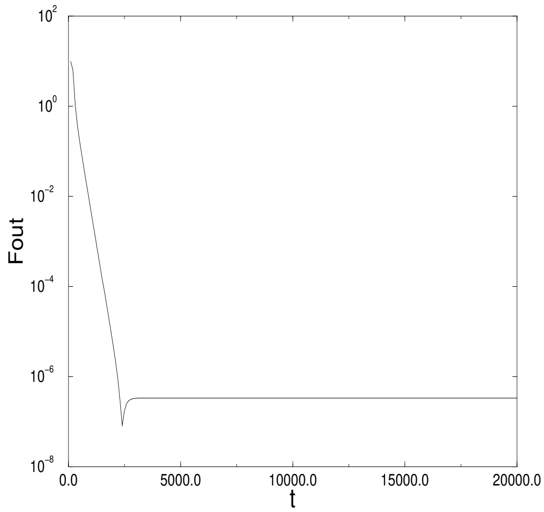
Formules (6.31) tot en met (6.33) en formules (5.39) tot en met (5.40) blijven geldig. Ook hier is een programma in Fortran 77 geschreven. Om het gedrag van de fout te bekijken zie figuren (6.19) t/m (6.21) Er blijkt uit de figuur (6.19) t/m (6.21) dat inderdaad de fout tussen de analytische en de numerieke snelheid klein wordt.



Figuur 6.19: De fout E1 tussen de numerieke oplossing berekend met de impliciete methode van Euler en de analytische oplossing voor $e = 0.9$



Figuur 6.20: De fout tussen de numerieke oplossing berekend met de impliciete methode van Euler en de analytische oplossing voor $e = 0.8$



Figuur 6.21: De fout tussen de numerieke oplossing berekend met de impliciete methode van Euler en de analytische oplossing voor $e = 0.2$

Hoofdstuk 7

De Equidistante Rooster Methode

7.1 Inleiding

Beschouw een niet-Newtonse vloeistof die stroomt tussen twee bewegende parallelle randen. Om een dergelijk probleem op te lossen gebruiken we een zogenaamde pseudotransiente aanpak. Bij deze aanpak wordt het stationaire probleem vervangen door een niet-stationair probleem. Door nu in de pseudotijd te stappen, hopen we naar de stationaire oplossing te convergeren.
Als wij geintereseerd zijn in het bepalen van de orde van de fout van de plaatsdiscretisatie dan is het handig om in het tijdsiteratieproces, de analytische oplossing als beginoplossing te nemen. De redenen hiervoor zijn: de convergentie is sneller en omdat bij niet-Newtonse vloeistoffen er is sprake van de niet-lineairiteit en is het veiliger om in de buurt van de analytische oplossing te starten. Immers dit is wat je in een praktische situatie zal gebruiken. Maar als het doel is om de tijdstap methode te testen, dan is het handig om de nuloplossing als beginoplossing te nemen.
In paragraaf 2 wordt het matrix-verband tussen de expliciete en de impliciete methode van Euler behandeld. In paragraaf 3 wordt de Equidistante Rooster Methode (ERM), voor de interne bewegende randen en voor een niet-Newtonse vloeistof behandeld. In paragraaf 4 wordt de theta tijdsdiscretisatie methode behandeld.

7.2 Het verband tussen de expliciete en de impliciete methode van Euler

We gaan uit van het zogeheten Pseudo-transient probleem:

$$\frac{\partial u(y,t)}{\partial t} = -k + \mu \frac{\partial^2 u(y,t)}{\partial y^2}, \quad 0 \le y \le L, \quad 0 \le t, \tag{7.1}$$

$$u(0,t) = u_{bottom}, \tag{7.2}$$

$$u(L,t) = u_{top}, \tag{7.3}$$

$$u(y,0) = 0. \tag{7.4}$$

Waarbij gebruik gemaakt is van het feit dat $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = k$. Voor het discretiseren van het probleem voeren we een rooster in:

$$y_i = i\Delta y,$$

voor

$$i = 0, \cdots, N,$$

en

$$\Delta y = \frac{L}{N}.$$

waarbij N is het aantal lijnstukken.
Verder verdelen we het tijdsinterval $[0,T]$ in N_T intervallen met lengte Δt. Definieer $t^n = n\Delta t$ en $\hat{u}_i^n$ is de numerieke benadering van $u(y_i,t^n) = u(i\Delta y, n\Delta t)$. De tijdsintegratie met de expliciete methode van Euler geeft:

$$(\frac{\partial u(y,t^n)}{\partial t})_i \approx \frac{\hat{u}_i^{n+1} - \hat{u}_i^n}{\Delta t}. \tag{7.5}$$

De ruimtelijke discretisatie geeft:

$$(\frac{\partial^2 u(y,t^n)}{\partial y^2})_i \approx \frac{\hat{u}_{i-1}^n - 2\hat{u}_i^n + \hat{u}_{i+1}^n}{(\Delta y)^2}. \tag{7.6}$$

Neem

$$\frac{\mu}{(\Delta y)^2} = \eta. \tag{7.7}$$

Het invullen van de formules (7.5) tot en met (7.7) in de formule (7.1) geeft:

$$\hat{u}_i^{n+1} = \hat{u}_i^n - \Delta t(k - \eta\hat{u}_{i-1}^n + 2\eta\hat{u}_i^n - \eta\hat{u}_{i+1}^n). \tag{7.8}$$

of

$$\hat{u}_i^{n+1} = -k\Delta t + \eta\Delta t\hat{u}_{i-1}^n + (1 - 2\eta\Delta t)\hat{u}_i^n + \eta\Delta t\hat{u}_{i+1}^n \tag{7.9}$$

In matrix notatie luidt het discretisatie schema :

$$\mathbf{\hat{u}^{n+1}} = M_{EE}\mathbf{\hat{u}^n} + \mathbf{r}, \tag{7.10}$$

waarbij

$$M_{EE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \eta\Delta t & 1-2\eta\Delta t & \eta\Delta t & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \eta\Delta t & 1-2\eta\Delta t & \eta\Delta t \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.11}$$

formule (7.11) kan omgeschreven worden als :

$$M_{EE} = I + \Delta t A \tag{7.12}$$

waarbij de matrix A voldoet aan volgende formule:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \eta & -2\eta & \eta & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \eta & -2\eta & \eta \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.13}$$

en waarbij I de eenheidsmatrix is.
De vectoren $\mathbf{\hat{u}^n}$ en $\mathbf{r}$ worden gegeven door

$$\mathbf{\hat{u}^n} = \begin{pmatrix} \hat{u}_0^n \\ \vdots \\ \hat{u}_N^n \end{pmatrix}, \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -k\Delta t \\ \vdots \\ -k\Delta t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Merk op dat de beginvoorwaarde wordt gegeven door:

$$\mathbf{u}(y,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.14}$$

en

$$\hat{u}_0^{n+1} = u_{bottom} \tag{7.15}$$

$$\hat{u}_N^{n+1} = u_{top} \tag{7.16}$$

Als we hetzelfde probleem oplossen met de impliciete tijdsintegratie methode van Euler krijgen we:

$$\hat{u}_i^{n+1}(1+2\eta\Delta t) = \hat{u}_i^n + \eta\Delta t\hat{u}_{i-1}^{n+1} + \eta\Delta t\hat{u}_{i+1}^{n+1} - k\Delta t, \tag{7.17}$$

$$\text{voor } \; i = 1, \cdots, N-1,$$

of

$$\hat{u}_i^{n+1}(1+2\eta\Delta t) - \eta\Delta t\hat{u}_{i-1}^{n+1} - \eta\Delta t\hat{u}_{i+1}^{n+1} = \hat{u}_i^n - k\Delta t, \tag{7.18}$$

en

$$\hat{u}_0^{n+1} = 0, \tag{7.19}$$

$$\hat{u}_N^{n+1} = 0. \tag{7.20}$$

Het discretisatie schema in matrixvorm wordt:

$$M_{IE}\mathbf{\hat{u}^{n+1}} = \mathbf{\hat{u}^n} + \mathbf{r}, \tag{7.21}$$

waarbij

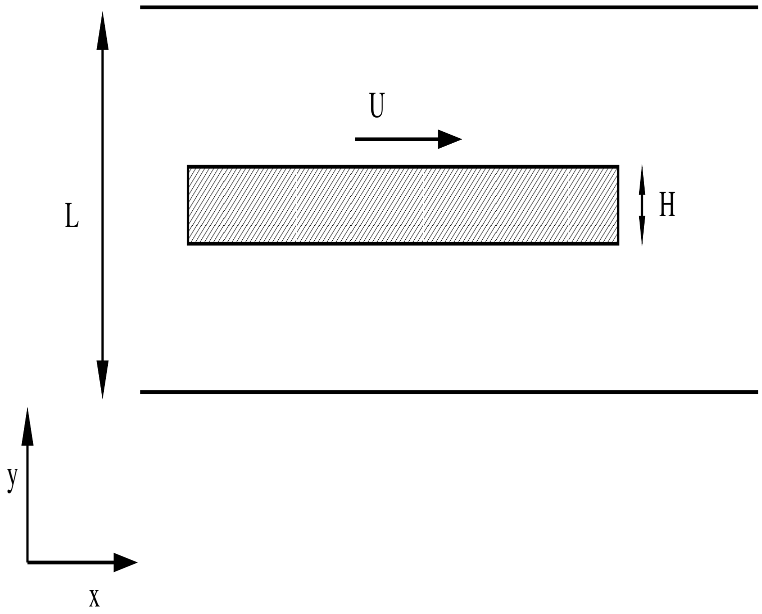
$$M_{IE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\eta\Delta t & 1+2\eta\Delta t & -\eta\Delta t & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -\eta\Delta t & 1+2\eta\Delta t & -\eta\Delta t \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.22}$$

formule (7.22) kan hergeschreven worden als:

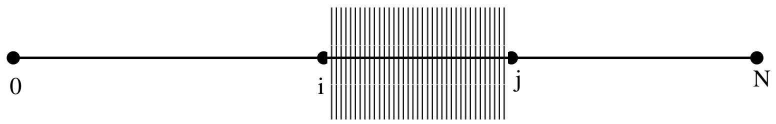
$$M_{IE} = I - \Delta t A, \tag{7.23}$$

combinatie van formules (7.21) en (7.23) leidt tot volgende vergelijking:

$$\mathbf{\hat{u}^{n+1}} = (I - \Delta t A)^{-1}(\mathbf{\hat{u}^n} + \mathbf{r}) \tag{7.24}$$



Figuur 7.1: een interne bewegende plaat tussen twee parallelle platen



Figuur 7.2: De cel die tussen de indexen i en j ligt is de geblokkeerd cel

7.3 De Equidistante Rooster Methode (ERM)

7.3.1 Newtonse stroming

Stel dat een horizontale plaat met een hoogte H beweegt, met een constante snelheid U langs de x-richting, tussen twee parallelle platen zie figuur(7.1) . Om het eenvoudig te houden zullen we aannemen dat de randen van de interne bewegende plaat samenvallen met de roosterpunten langs de hoogte van de twee parallelle platen. Om de methode te beschrijven beperken we ons tot één plaat maar de methode is toepasbaar voor een willekeurig aantal interne bewegende platen (zie figuur 7.2). Het gearceerde gebied geeft de bewegende rand aan. Eén van de meeste voor de hand liggende methode om dit probleem op te lossen , d.w.z bepalen van de exacte en de numerieke snelheid, is het rekengebied te verdelen, in het geval van één interne bewegende plaat, in twee deelrekengebieden en het oorspronkelijk probleem wordt in twee deelproblemen gesplitst:

Het eerste deelprobleem luidt:

$$\frac{\partial u(y,t)}{\partial t} = -k + \mu \frac{\partial^2 u(y,t)}{\partial y^2}, \quad 0 \leq y \leq y(i), \quad 0 \leq t, \tag{7.25}$$

$$u(0,t) = u_{bottom}, \tag{7.26}$$

$$u(y(i),t) = U, \tag{7.27}$$

$$u(y,0) = 0. \tag{7.28}$$

Het tweede deelprobleem luidt:

$$\frac{\partial u(y,t)}{\partial t} = -k + \mu \frac{\partial^2 u(y,t)}{\partial y^2}, \quad y(j) \leq y \leq L, \quad 0 \leq t, \tag{7.29}$$

$$u(y(j),t) = U, \tag{7.30}$$

$$u(L,t) = u_{top}, \tag{7.31}$$

$$u(y,0) = 0. \tag{7.32}$$

Waarbij u_{bottom} respectievlijk u_{top} de snelheid van onderstaande plaat respectievelijk de bovenstaande plaat en U de snelheid in de x-richting waarmee de interne rand beweegt. Voor $k = i, \cdots, j$, geldt dat $u(k) = U$. Het voordeel van de Equidistante Rooster Methode (ERM) is dat die eenvoudig te programmeren. Er wordt maar één matrix ingevoerd en dus de LU-decompositie wordt maar één keer geimplementeerd. Deze methode houdt in dat de snelheid op een gekozen plaats opgelegd wordt. De matrix en de rechterlid in de discretisatie vergelijking wordt aangepast zodanig dat de gekozen interne rand, met de beginindex i en eindindex j, de gewenste snelheid U krijgt.

$$A = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & & & & & & & & & \\
-\eta & 2\eta & -\eta & & & & & & & & & \\
& \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & & & \\
& & -\eta & 2\eta & -\eta & & & & & & & \\
& & & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\
& & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\
& & & & & 0 & 0 & 0 & & & & \\
& & & & & & -\eta & 2\eta & -\eta & & & \\
& & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
& & & & & & & & -\eta & 2\eta & -\eta & \\
& & & & & & & & & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \tag{7.33}$$

in formule (7.33) is te zien dat $A(k,k) = A(k,k-1) = A(k,k+1) = 0$ voor $k = i, \cdots, j$ waarin i respectievelijk j de beginindex respectievelijk de eindindex van de interne rand (zie figuur(7.2)). Het rechterlid wordt ook aangepast door de variabelen $(\hat{\mathbf{u}}^{\mathbf{n}} + \mathbf{r})(k)$, voor $k = i, \cdots, j$, gelijk aan de waarde U te nemen. $\mathbf{r}$ voldoet aan volgende formule:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -k\Delta t \\ \vdots \\ -k\Delta t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -k\Delta t \\ \vdots \\ -k\Delta t \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ en } \mathbf{u}^{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} u_{bottom} \\ {u^n}_1 \\ \vdots \\ {u^n}_{i-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ {u^n}_{j+1} \\ \vdots \\ u_{top} \end{pmatrix}.$$

De matrix in formule (7.33) kan in drie matrices gesplitst worden namelijk:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & & \\ & A_{22} & \\ & & A_{33} \end{pmatrix}, \tag{7.34}$$

waarbij

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & & \\ -\eta & 2\eta & -\eta & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -\eta & 2\eta & -\eta & \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.35}$$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.36}$$

en

$$A_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & & \\ -\eta & 2\eta & -\eta & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -\eta & 2\eta & -\eta & \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.37}$$

Merk op dat de matrices A_{11} respectievelijk A_{33} zijn de discretisatie matrices zijn van het eerste deelprobleem respectievelijk het tweede deelprobleem. Die twee matrices zijn allemaal terug te vinden in de algemene matrix A van het oorspronkelijk probleem.
Er is een programma in FORTRAN 77 geschreven om in dit geval de analytische en de numerieke snelheid te bepalen en ze te vergelijken (zie Appendix A).

7.3.2 Niet-Newtonse stroming

De ERM methode is ook toepasbaar voor een niet-Newtonse stroming. Formules (7.33) tot en met (7.37) worden door de volgende formules vervangen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & & & \\ -\mu_{\frac{1}{2}} & \mu_{\frac{1}{2}}+\mu_{\frac{3}{2}} & -\mu_{\frac{3}{2}} & & & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & -\mu_{i-\frac{1}{2}} & \mu_{i-\frac{1}{2}}+\mu_{i+\frac{1}{2}} & -\mu_{i+\frac{1}{2}} & & & \\ & 0 & 0 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & 0 & 0 & 0 & & & \\ & & -\mu_{j-\frac{1}{2}} & \mu_{j-\frac{1}{2}}+\mu_{j+\frac{1}{2}} & -\mu_{j+\frac{1}{2}} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -\mu_{N-1-\frac{1}{2}} & \mu_{N-1-\frac{1}{2}}+\mu_{N-1+\frac{1}{2}} & -\mu_{N-1+\frac{1}{2}} & \\ & & & 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}, \tag{7.38}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & & \\ & A_{22} & \\ & & A_{33} \end{pmatrix}, \tag{7.39}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ -\mu_{\frac{1}{2}} & \mu_{\frac{1}{2}} + \mu_{\frac{3}{2}} & -\mu_{\frac{3}{2}} & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & -\mu_{i-\frac{1}{2}} & \mu_{i-\frac{1}{2}} + \mu_{i+\frac{1}{2}} & -\mu_{i+\frac{1}{2}} & \\ & 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}, \tag{7.40}$$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.41}$$

en

$$A_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ -\mu_{j-\frac{1}{2}} & \mu_{j-\frac{1}{2}} + \mu_{j+\frac{1}{2}} & -\mu_{j+\frac{1}{2}} & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & -\mu_{N-1-\frac{1}{2}} & \mu_{N-1-\frac{1}{2}} + \mu_{N-1+\frac{1}{2}} & -\mu_{N-1+\frac{1}{2}} & \\ & 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}, \tag{7.42}$$

Wij hebben twee gevallen bekeken:

Geval I: Vaste interne randen

Geval II: Bewegende interne randen

De reden hiervoor is dat in het geval van vaste interne randen de interne maximum altijd bestaat terwijl in het geval van bewegende interne randen niet altijd het geval is.

Geval I: Vaste interne randen

Hier kijken we naar het geval waarin de interne randen stilstaand zijn. De analytische oplossing wordt op analoge wijze gevonden als het geval zonder interne randen want het rekenrooster wordt verdeeld in deelgebieden waarin geen interne randen bestaan. Voor verschillende waarden van e is in de figuren (7.3) t/m (7.5) het profiel van de analytische snelheid te zien.

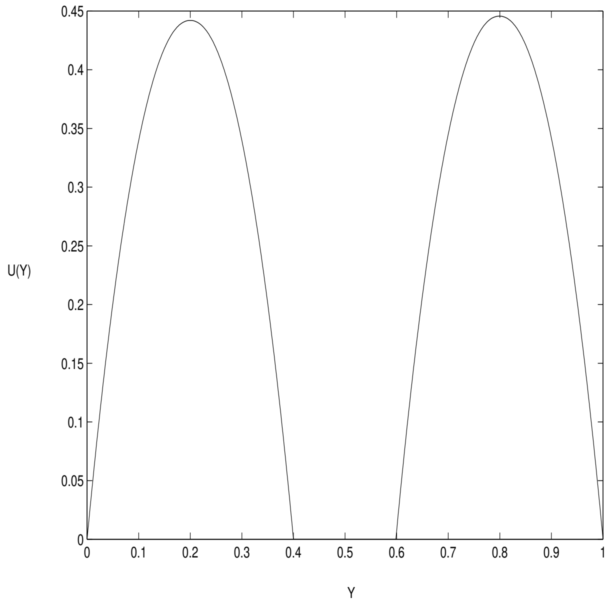
In de figuren (7.6) t/m (7.8) is het profiel van de bijbehorende fout te zien. Er blijkt uit d figuren (7.6) t/m (7.8) dat de fout in het slechtste geval naar $8 \cdot 10^{-5}$ gaat.

Geval II: Bewegende interne randen

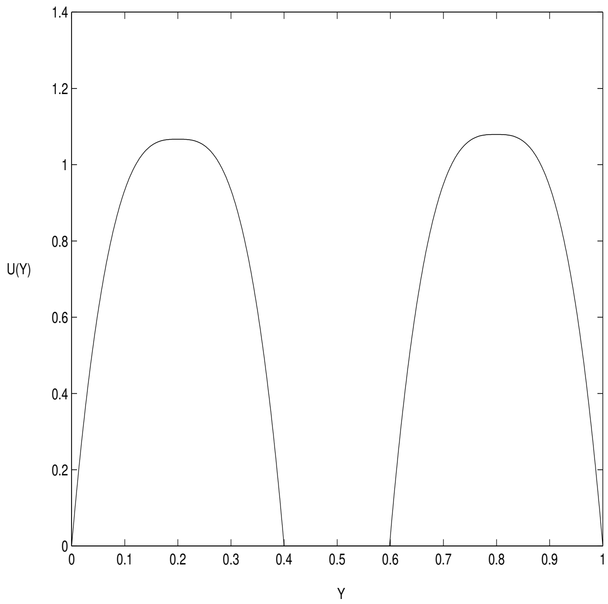
Hier kijken we naar interne bewegenden randen.

Voor verschillende waarden van e is in de figuren (7.9) t/m (7.11) het profiel van de analytische snelheid te zien.

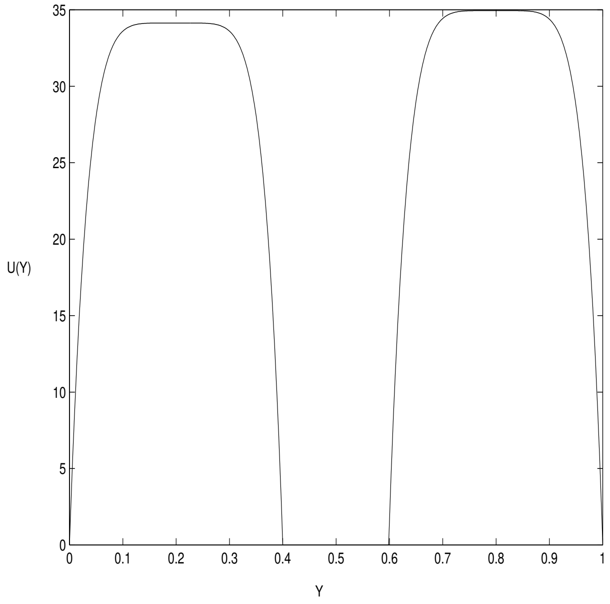
In de log-log plot zie figuur (7.15) is te zien hoe de fout zich gedraagt, voor verschillende waarden van e, als functie van het aantal roosterpunten N. Daaruit blijkt dat de fout kleiner wordt naarmate



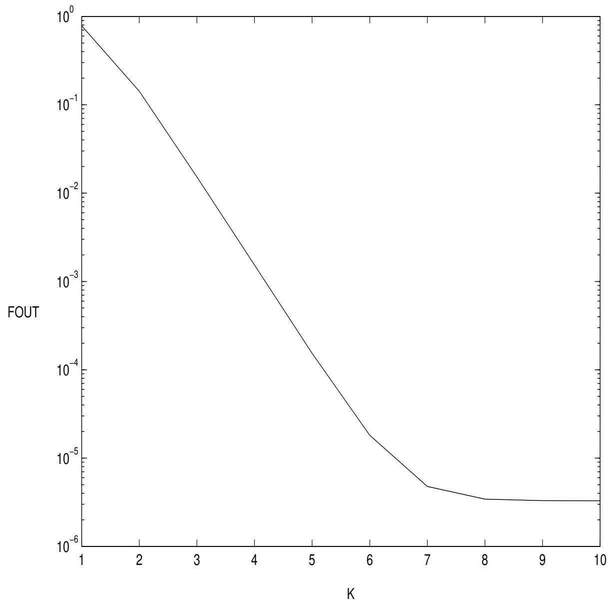
Figuur 7.3: Het profiel van de analytische snelheid voor $e = 0.9$ en $k = -1$



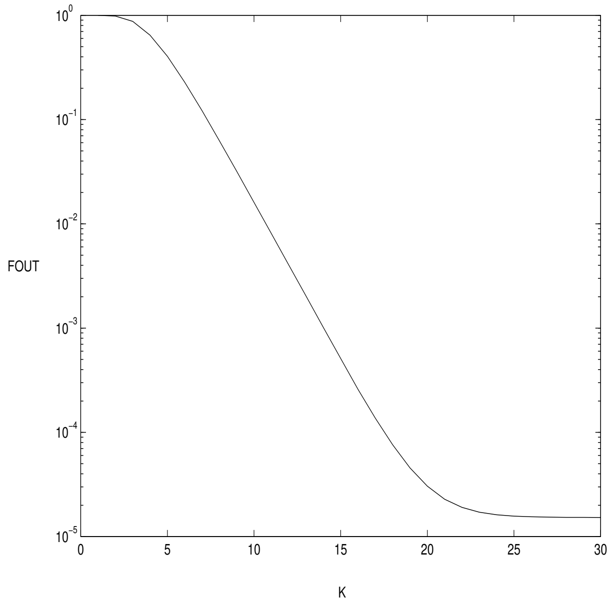
Figuur 7.4: Het profiel van de analytische snelheid voor $e = 0.5$ en $k = -1$



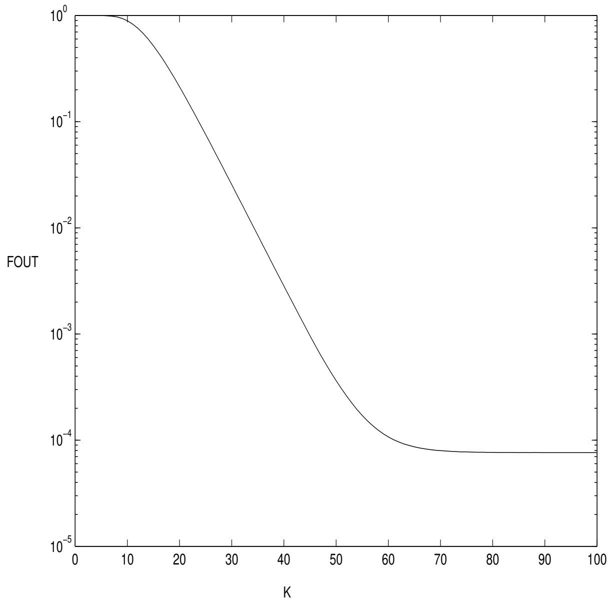
Figuur 7.5: Het profiel van de analytische snelheid voor $e = 0.2$ en $k = -1$



Figuur 7.6: De fout tussen de twee snelheden gaat na 10 iteraties naar 10^{-6} voor $e = 0.9$ en met 640 roosterpunten



Figuur 7.7: De fout tussen de twee snelheden gaat na 30 iteraties naar 10^{-5} voor $e = 0.5$ en met 640 roosterpunten



Figuur 7.8: De fout tussen de twee snelheden gaat na 100 iteraties naar $8 \cdot 10^{-5}$ voor $e = 0.2$ en met 640 roosterpunten

het aantal roosterpunten groter wordt. Merk op dat de grafieken van de fout, voor verschillende waarden van e, parallel en onder elkaar liggen. D.w.z dat voor hetzelfde aantal roosterpunten, hoe kleiner de waarde van e hoe groot de corresponderende fout is. De orde van de nauwkeurigheid van de methode is twee en dat is precies de orde van het centrale differentie schema. In figuur 7.15 is te zien dat de rechte lijn, met -2 als richtingscoëficient, parallel aan de lijnstukken van figuur 7.15. Het is visueel duidelijk dat de orde van de nauwkeurgheid 2 is. Analytisch is bekend dat voor de centrale differentie geldt:

$$Fout \approx C(\Delta y)^2, \tag{7.43}$$

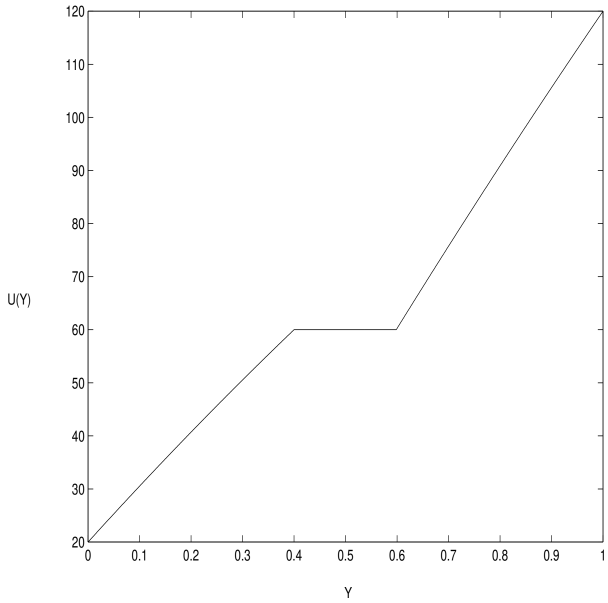
ofwel

$$log(Fout) \approx -log(N^2) + log(C), \tag{7.44}$$

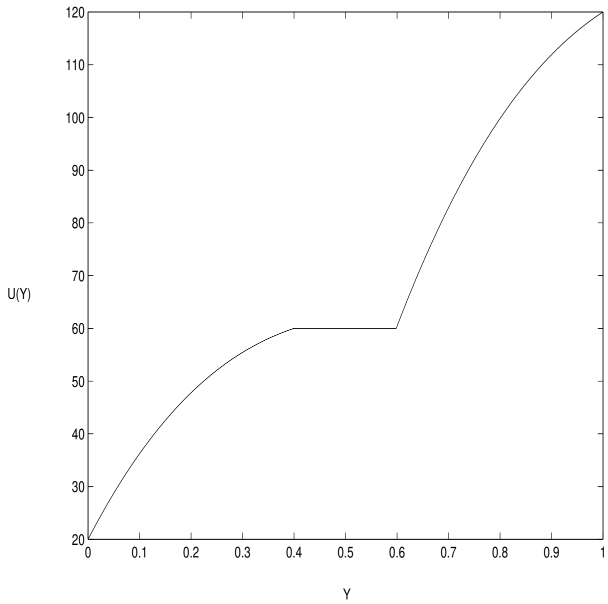
waabij C een positieve constant is en dus

$$log(Fout) \approx -2log(N) + log(C), \tag{7.45}$$

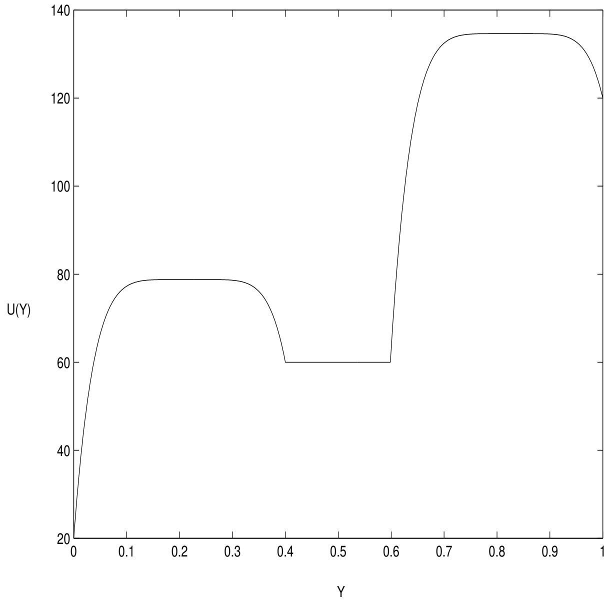
dat bewijst dat inderdaad de helling, van de log-log plot van de fout als functie van het aantal roosterpunten, -2 is. Uit de figure 7.15 blijkt dat voor een vaste waarde van het aantal roosterpunten de bijbehorende fout klein groter wordt naarmate de power index e klein wordt. Dat betekent dat de constant $C_1 = log(C)$ groter wordt als e kleiner wordt. De verklaring daarvan ligt in het feit dat als e ongelijk aan 1 is, de analytische oplossing wordt niet parabolisch en hoe kleiner e wordt hoe het profiel van de analytische oplossing ver van het parabolische profiel ligt.



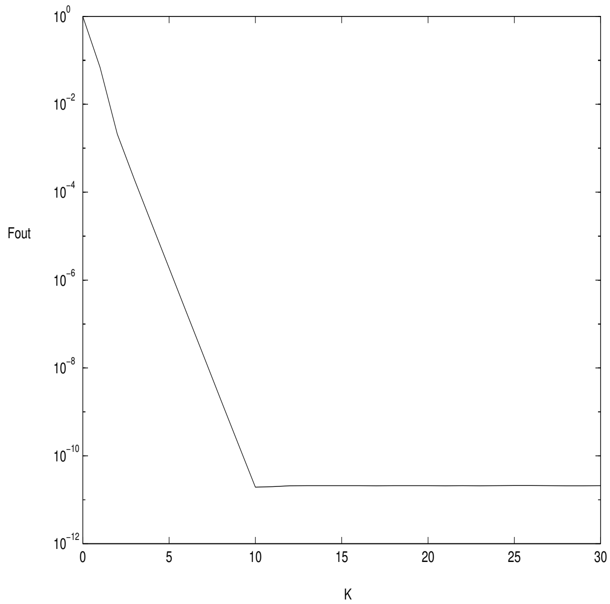
Figuur 7.9: Het profiel van de analytische snelheid verkregen voor $e = 0.9$ en 640 roosterpunten



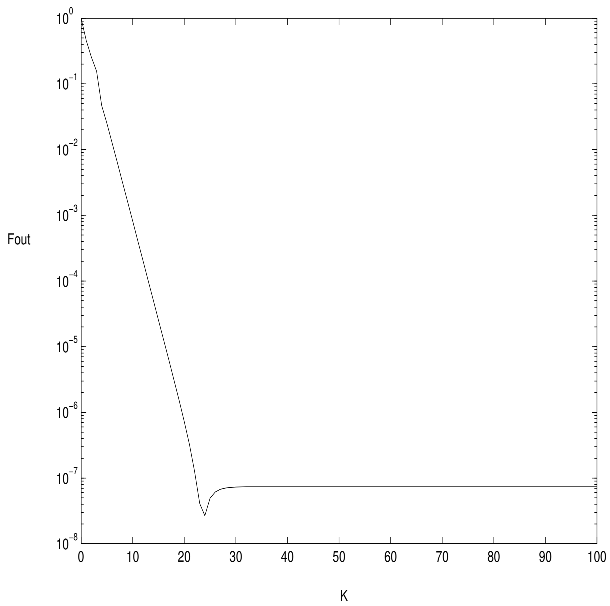
Figuur 7.10: Het profiel van de analytische snelheid voor $e = 0.5$



Figuur 7.11: Het profiel van de analytische snelheid voor $e = 0.2$



Figuur 7.12: De fout tussen de twee snelheden gaat na 10 iteraties naar 10^{-10}, met 640 roosterpunten en voor $e = 0.9$



Figuur 7.13: De fout tussen de twee snelheden gaat na 30 iteraties naar 10^{-7}, met 640 roosterpunten en voor $e = 0.5$

7.4 De theta tijdsdiscretisatie methode

In deze paragraaf zullen we de theta methode in combinatie met de ERM methode behandelen. Gegeven de volgende algemene vergelijking :

$$\frac{du}{dt} = f(u, t), \tag{7.46}$$

het toepassen van de theta tijdsdiscretisatie methode op formule (7.46) geeft:

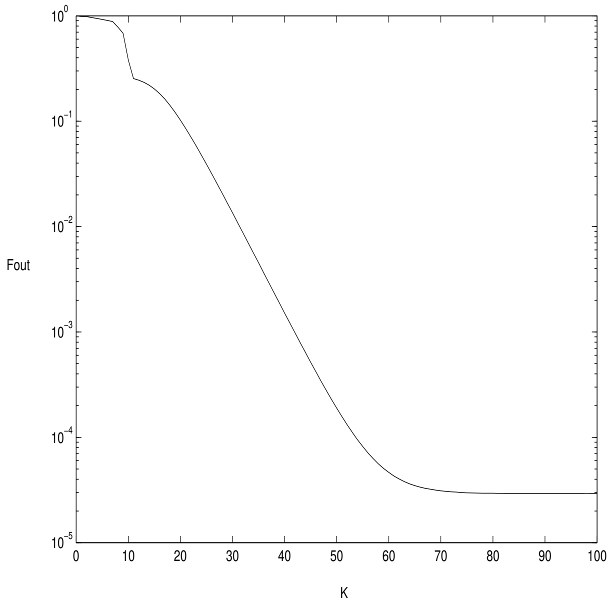
$$\frac{\hat{u}_i^{n+1} - \hat{u}_i^n}{\Delta t} = (1-\theta) f(u^n, t_n) + \theta f(u^{n+1}, t_{n+1}) \tag{7.47}$$

Merk op dat als $\theta = 0$ dan is er sprake van de expliciete methode van Euler en $\theta = 1$ dan is er sprake van de impliciete methode van Euler.
We gaan uit van formule (8.11).
De discretisatie daarvan met de theta methode geeft:

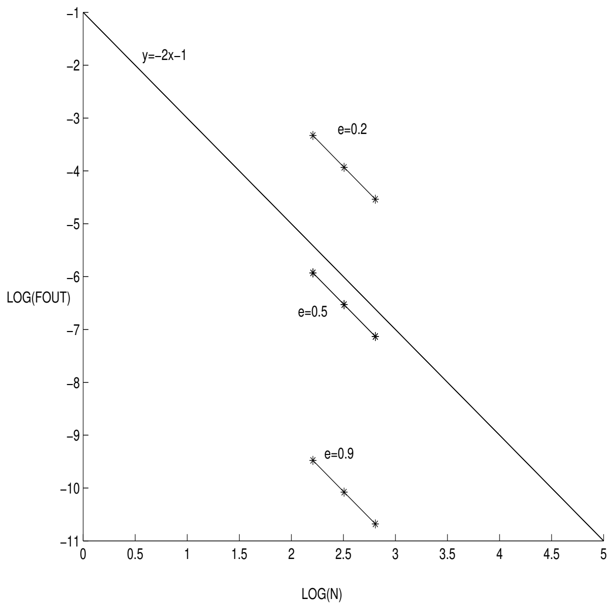
$$\frac{\hat{u}_i^{n+1} - \hat{u}_i^n}{\Delta t} = (1-\theta)\mu \frac{\hat{u}_{i-1}^n - 2\hat{u}_i^n + \hat{u}_{i+1}^n}{(\Delta y)^2} + (\theta)\mu \frac{\hat{u}_{i-1}^{n+1} - 2\hat{u}_i^{n+1} + \hat{u}_{i+1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} - k. \tag{7.48}$$

Met een andere notatie wordt het discretisatie schema :

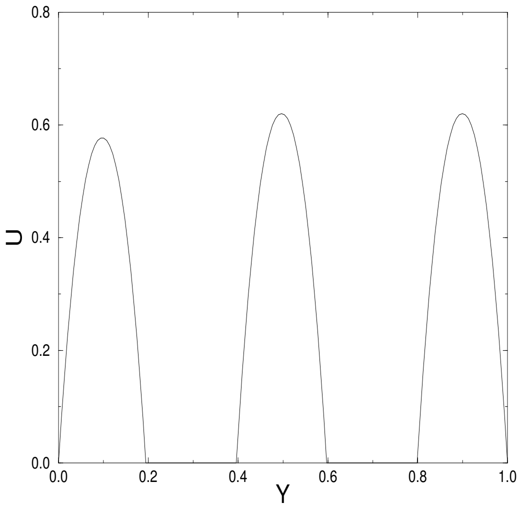
$$\hat{u}_i^{n+1}(1+2\alpha) - \alpha\hat{u}_{i-1}^{n+1} - \alpha\hat{u}_{i+1}^{n+1} = \hat{u}_i^n(1-2\beta) + \beta\hat{u}_{i-1}^n + \beta\hat{u}_{i+1}^n - k\Delta t, \tag{7.49}$$



Figuur 7.14: De fout tussen de twee snelheden gaat na 80 iteraties naar 10^{-4}, met 640 roosterpunten en voor $e = 0.2$



Figuur 7.15: De fout als functie van het aantal roosterpunten N voor $e = 0.9$, $e = 0.5$ en $e = 0.2$



Figuur 7.16: Het profiel van de analytische snelheid $e = 0.9$ en 150 roosterpunten

waarbij η voldoet aan formule $\eta = \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}$. $\alpha = \theta\eta$ en$\beta = (1-\theta)\eta$. In matrix vorm :

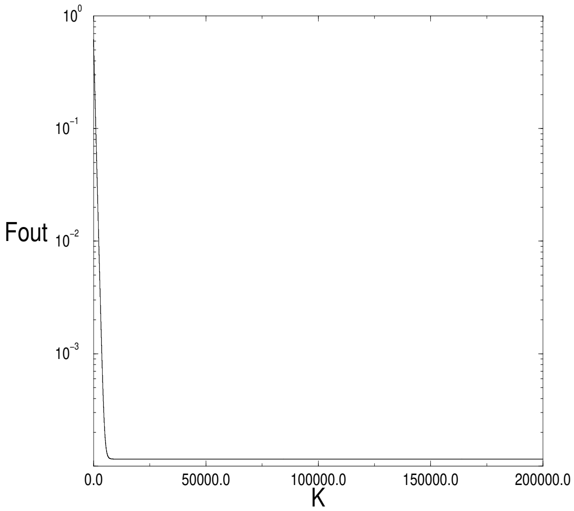
$$\mathbf{\hat{u}^{n+1}} = (I - \theta\Delta t A)^{-1}[(I + (1-\theta)\Delta t A)\mathbf{\hat{u}^{n}} + \mathbf{r}], \tag{7.50}$$

waarbij de matrix A voldoet aan formule (7.13) en I de eenheidsmatrix is.
De theta methode is, voor een niet-Newtonse vloeistof in combinatie met de ERM methode, in FORTRAN 77 geimplementeerd. Voor een niet-Newtonse vloeistof is de viscositeit altijd expliciet verwerkt. Wij hebben twee gevallen bekeken:

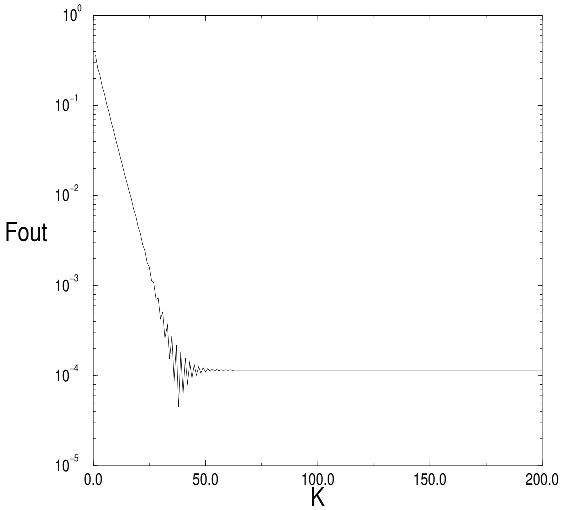
Geval I: Vaste interne randen
Geval II: Bewegende interne randen

Geval I: Vaste interne randen
Hier kijken we naar het geval waarin de interne randen vast zijn. Voor $e = 0.9$ is in figuur (7.16) het profiel van de analytische oplossing te zien.
Voor $e = 0.9$ en verschillende waarden van θ is in figuren (7.17) t/m (7.19) het profiel van de fout te zien.

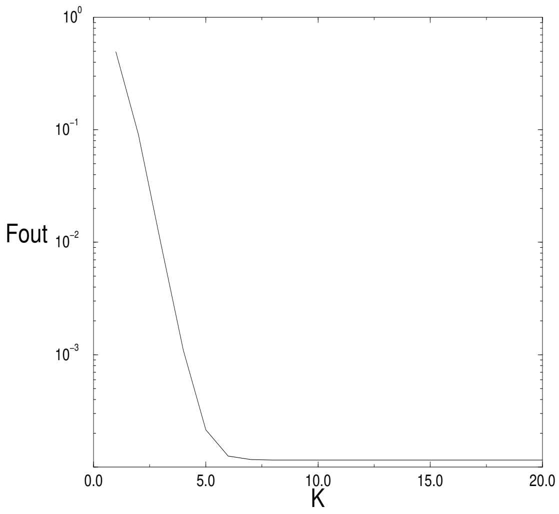
Het is uit de figuren (7.17) t/m (7.19) duidelijk te zien dat naarmate θ het getal 1 nadert des te minder aantal iteraties er nodig zijn voor dat de numerieke snelheid naar de analytische snelheid convergeert. Het resultaat was verwacht omdat voor $\theta = 1$ er is sprake van de impliciete methode van Euler. Hierbij kunnen we de tijdstap groot kiezen zonder ons zorgen te maken over de sta-



Figuur 7.17: De fout tussen de twee snelheden gaat na 2500 iteraties naar 10^{-4} voor $\theta = 0$, $e = 0.9$, $\Delta t = 10^-5$ en 150 roosterpunten



Figuur 7.18: De fout tussen de twee snelheden gaat na 100 iteraties naar 10^{-4} voor $\theta = 0.5$, $e = 0.9$, $\Delta t = 100$ en 150 roosterpunten



Figuur 7.19: De fout tussen de twee snelheden gaat na 10 iteraties naar 10^{-4} voor $\theta = 1$, $e = 0.9$, $\Delta t = 1000$ en 150 roosterpunten

biliteit, want het impliciete schema is onvoorwaardelijk stabiel. In figuur (7.18) er is sprake van ontbreken van demping, dat is duidelijk te zien aan het oscillatiegedrag van de fout.

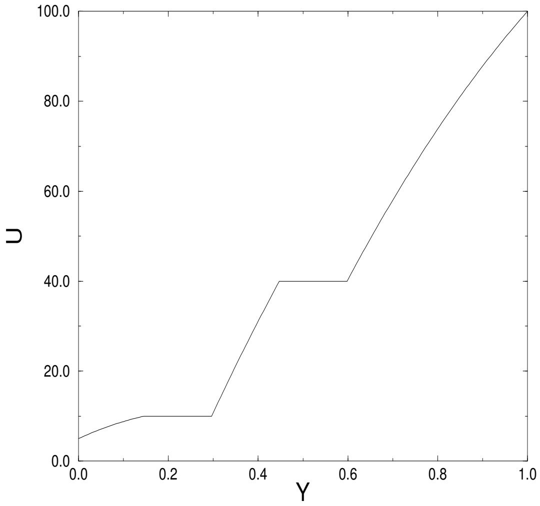
Geval II: Bewegende interne randen

Hier kijken we naar het geval waarin de interne randen in beweging zijn. Analoog aan het geval I, is in de figuur (7.20) het profiel van de analytische oplossing te zien. In figuur (7.21) t/m (7.23) is het profiel van de fout tussen de twee snelheden, voor verschillende waarden van θ en $e = 0.9$, te zien.

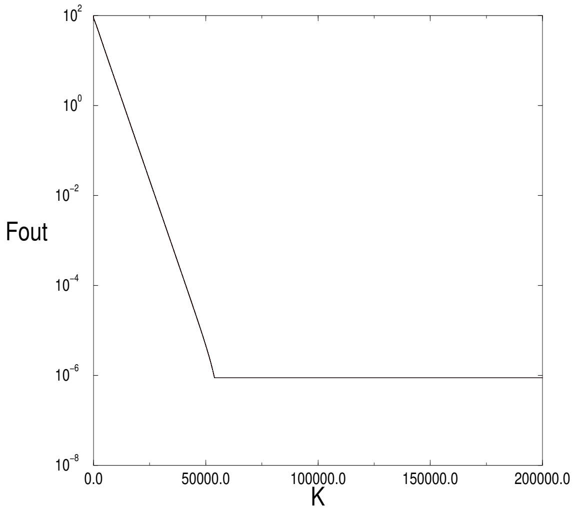
Analoog aan het geval I, kunnen we uit de figuren (7.21) t/m (7.23) concluderen dat de convergentie naar de analytische oplossing sneller wordt als $\theta = 1$ d.w.z waaneer de impliciete methode van Euler gebruikt wordt.

7.5 Conclusie

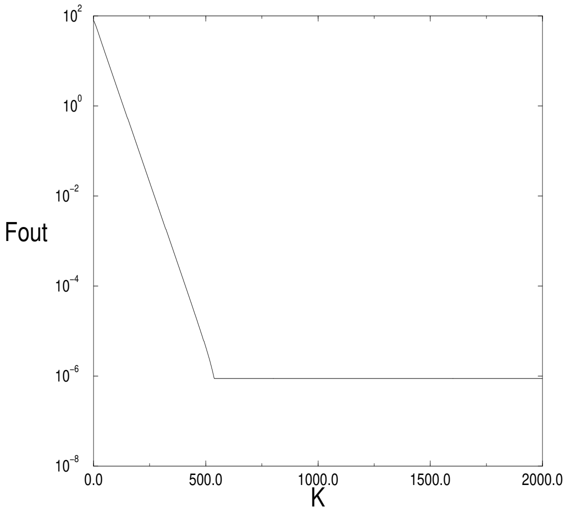
In dit hoofdstuk hebben wij gekeken naar het geval dat de interne bewegende randen met de roosterpunten samenvallen. In dit geval hebben wij de zogenaamde Equidistante Rooster Methode, in combinatie met de theta methode, toegepast. De gebruiker kan een willekeurig aantal bewegende interne randen kiezen en de bijbehorende snelheden en de posities. Automatisch wordt het rekenrooster verdeeld en voor elk deel wordt dan de analytische en de numerieke oplossing bepaald door



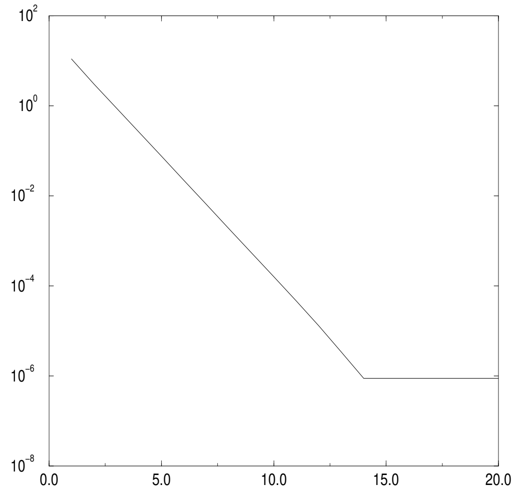
Figuur 7.20: Het profiel van de analytische snelheid $e = 0.9$ en 200 roosterpunten



Figuur 7.21: De fout tussen de twee snelheden gaat na 10000 iteraties naar 10^{-6} voor $\theta = 0$, $e = 0.9$ en 200 roosterpunten



Figuur 7.22: De fout tussen de twee snelheden gaat na 1000 iteraties naar 10^{-6} voor $\theta = 0.5$, $e = 0.9$ en 200 roosterpunten



Figuur 7.23: De fout tussen de twee snelheden gaat na 20 iteraties naar 10^{-6} voor $\theta = 1$, $e = 0.9$ en 200 roosterpunten

de discretisatie matrix en het rechterlid aan te passen zodat op de gewenste positie de gewenste snelheid wordt opgelegd. De conclusies die uit dit hoofdstuk kunnen trekken zijn in de volgende punten samengevat:

- De aanwezigheid van de interne bewegende randen heeft op de nauwkeurigheid van de disretisatie methode, in ons geval de centrale differentie, niet een negatief effect.
- De Equidistante methode kan gebruikt worden zowel voor Newtonse vloeistoffen als niet-Newtonse vloeistoffen.
- De maniere waarop de ERM methode in het geval van één intern bewegend rand gebruikt wordt kan ook voor meer interne bewegende randen toegepast worden.

In de praktische situaties vallen de interne bewegende randen niet de roosterpunten samen. In dit geval is de ERM methode niet meer van toepassing. In de volgende hoofdstuk zullen we de interpolatie methode van Mittal gebruiken (zie [2]) dit probleem op te lossen.

Hoofdstuk 8

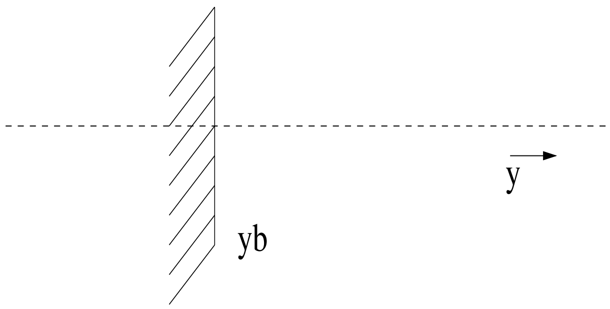
De interpolatie methode van Mittal voor de diffusie vergelijking

In vorige hoofdstuk hebben we naar een intern bewegend randprobleem bekeken onder de aaname dat de interne randen met de roosterpunten samenvallen. In de praktische situaties is het anders want de interne rand kan op een willekeurige positie liggen. In dit geval is wel een interpolatie noodzakelijk. Hier zullen we de interpolatie methode van Mittal gebruiken. In het eerste paragraaf gaan we de methode testen voor de diffusie vergelijking en met een Newtonse stroming. In het tweede paragraaf wordt de methode getest maar dan voor een Niet-Newtonse stroming.

8.1 Newtonse stroming

In deze paragraaf zullen we ons bezig houden met de diffusievergelijking voor een Newtonse vloeistof met een bewegende interne rand zie figuur 8.1. We gaan uit van de volgende formules :

$$\mu \frac{d^2 u(y)}{dy^2} - k = 0, \quad y \in [y_b, 1] \tag{8.1}$$



Figuur 8.1: Het interne bewegende rand probleem

$$u(y_b) = u_b \tag{8.2}$$

$$u(L) = U_{top} \tag{8.3}$$

waarbij $k = \frac{1}{\rho}\frac{dp(x)}{dx}$, y_b en u_b gegeven zijn.

De analytische oplossing

De analytische oplossing van formules (8.1) en (8.2) ziet er globaal zo uit:

$$u(y) = \frac{k}{2\mu}y^2 + C_2 y + C_3, \tag{8.4}$$

waarbij C_2 en C_3 worden bepaald door de randvoorwaarden namelijk (8.2) en (8.3). Als we formule (8.2) invullen in formule (8.4) krijgen we:

$$\frac{k}{2\mu}{y_b}^2 + C_2 y_b + C_3 = u_b, \tag{8.5}$$

ofwel

$$C_2 y_b + C_3 = u_b - \frac{k}{2\mu}{y_b}^2. \tag{8.6}$$

Definieer α als $u_b - \frac{k}{2\mu}{y_b}^2$, dan wordt formule (8.6) reduceerd tot:

$$C_2 y_b + C_3 = \alpha, \tag{8.7}$$

als we formule (8.3) invullen in formule (8.4) krijgen we:

$$\frac{k}{2\mu}L^2 + C_2 L + C_3 = U_{top}. \tag{8.8}$$

Neem β gelijk aan $U_{top} - \frac{k}{2\mu}L^2$ dan wordt formule (8.8)gereduceerd tot:

$$C_2 L + C_3 = \beta. \tag{8.9}$$

Het invullen van formule (8.7) in formule (8.9) levert:

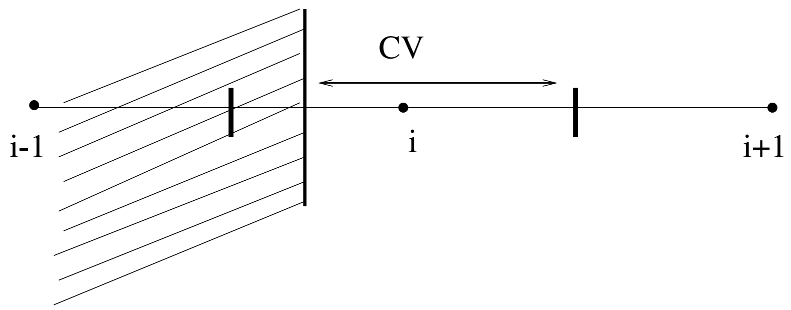
$$C_2 L + \alpha - C_2 y_b = \beta, \tag{8.10}$$

of

$$C_2 = \frac{\beta - \alpha}{(L - y_b)}. \tag{8.11}$$

Combinatie van formule (8.11) en (8.7) levert:

$$C_3 = \alpha - (\frac{\beta - \alpha}{(L - y_b)})y_b. \tag{8.12}$$



Figuur 8.2: Het controle volume gevormd door de aanwezigheid van de interne bewegende rand

De numerieke oplossing voor $y_b \in [y_{i-\frac{1}{2}}, y_i)$

In deze paragraaf gaan we het probleem van de vorige paragraaf discretiseren waarin y_b tussen $y_{i-\frac{1}{2}}$ en y_i ligt. In de volgende paragraaf gaan we kijken naar het geval waarin y_b tussen y_i en $y_{i+\frac{1}{2}}$ ligt. Eerst beginnen we met de ruimtelijke discretisatie:
Integratie van formule (8.1) over het controle volume CV, met CV is:$[y_b, y_{i+\frac{1}{2}}]$ zie figuur 8.2

$$\int_{y_b}^{y_{i+\frac{1}{2}}} \mu \frac{d^2u(y)}{dy^2}dy - \int_{y_b}^{y_{i+\frac{1}{2}}} kdy = 0, \tag{8.13}$$

ofwel

$$\mu \left[\frac{du(y)}{dy}|_{i+\frac{1}{2}} - \frac{du(y)}{dy}|_b \right] - k(y_{i+\frac{1}{2}} - y_b) = 0, \tag{8.14}$$

waarbij

$$y_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(y_i + y_{i+1}), \tag{8.15}$$

en

$$\frac{du}{dy}|_{i+\frac{1}{2}} \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{y_{i+1} - y_i}. \tag{8.16}$$

Het probleem is het bepalen van

$$\frac{du}{dy}|_b.$$

We proberen ervoor te zorgen dat $\frac{du}{dy}|_b$ met een tweede orde nauwkeurigheid wordt uitgerekend, d.w.z. mocht de exacte oplossing van formule (8.1) gegeven worden door (zie [2] pg 220):

$$u(y) = C_3y^2 + C_2y + C_1, \tag{8.17}$$

dan moet $\frac{du}{dy}|_b$ exact zijn in het numerieke schema. Dus:

$$\frac{du}{dy}|_b = 2C_3y_b + C_2. \tag{8.18}$$

Het probleem met vergelijkingen (8.17) en (8.18) is dat C_1, C_2 en C_3 onbekend zijn. Echter, we kunnen deze getallen vinden door de volgende drie vergelijkingen te beschouwen:

$$\begin{aligned} u_b &= C_1 + C_2 y_b + C_3 (y_b)^2 \\ u_i &= C_1 + C_2 y_i + C_3 (y_i)^2 \\ u_{i+1} &= C_1 + C_2 y_{i+1} + C_3 (y_{i+1})^2. \end{aligned}$$

In matrix notatie:

$$A\mathbf{C} = \mathbf{u} \tag{8.19}$$

waarin $A = \begin{pmatrix} 1 & y_b & (y_b)^2 \\ 1 & y_i & (y_i)^2 \\ 1 & y_{i+1} & (y_{i+1})^2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_b \\ u_i \\ u_{i+1} \end{pmatrix}$. De matrix A is een zogenaamde Vandermonde matrix.

Aangezien we $\mathbf{u}$ niet weten (u_b is gegeven, maar u_i en u_{i+1} zijn onbekenden), kunnen we (8.19) niet expliciet(d.w.z. in getallen) oplossen. Maar dat is ook niet nodig.

De formele oplossing van (8.20) is:

$$\mathbf{C} = A^{-1}\mathbf{u} \tag{8.20}$$

ofwel:

$$C_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} u_j \quad \text{voor i=1,2,3} \tag{8.21}$$

waarin a_{ij},($i = 1, 2, 3$ en $j = 1, 2, 3$) de elementen van A^{-1} zijn. Verder:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_b \qquad \text{(Notatie-kwestie)} \\ u_2 &= u_i \\ u_3 &= u_{i+1}. \end{aligned}$$

Dit invullen in (8.18) levert:

$$\frac{du}{dy}|_b = \sum_{j=1}^{3} a_{2j} u_j + 2y_b \sum_{j=1}^{3} a_{3j} u_j. \tag{8.22}$$

Dus we hebben $\frac{du}{dy}|_b$ uitgedrukt in termen van geometrie (y_b,a_{ij}) en (linear) in termen van u_1, u_2 en u_3 (u_b,u_i en u_{i+1}). Invullen van formules (8.15), (8.16) en (8.22) in formule (8.14) levert:

$$\mu[\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta y} - \sum_{j=1}^{3} a_{2j} u_j - 2y_b \sum_{j=1}^{3} a_{3j} u_j] - k[\frac{1}{2}(y_i + y_{i+1}) - y_b] = 0, \tag{8.23}$$

ofwel

$$[\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta y} - \sum_{j=1}^{3} a_{2j} u_j - 2y_b \sum_{j=1}^{3} a_{3j} u_j] - \frac{k}{2\mu}(y_i + y_{i+1} - 2y_b) = 0. \tag{8.24}$$

Formule (8.24) kan gereduceerd worden tot:

$$\alpha u_i + \beta u_{i+1} = \Delta y[\gamma + \frac{k}{2\mu}(y_i + y_{i+1} - 2y_b)], \tag{8.25}$$

ofwel

$$\alpha u_i + \beta u_{i+1} = \Delta y r_i, \tag{8.26}$$

dat is het ruimtelijke discretisatie schema, waarbij $\alpha = -1 - \Delta y(a_{22} + 2y_b a_{32})$, $\beta = 1 - \Delta y(a_{23} + 2y_b a_{33})$ en $\gamma = (a_{21} + 2y_b a_{31})u_b$. De volgende stap is om de impliciete methode van Euler als de tijdsintegratie te gebruiken. Het tijdsdiscretisatie schema luidt:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha u_i^{n+1} + \beta u_{i+1}^{n+1} - \Delta y r_i, \tag{8.27}$$

ofwel:

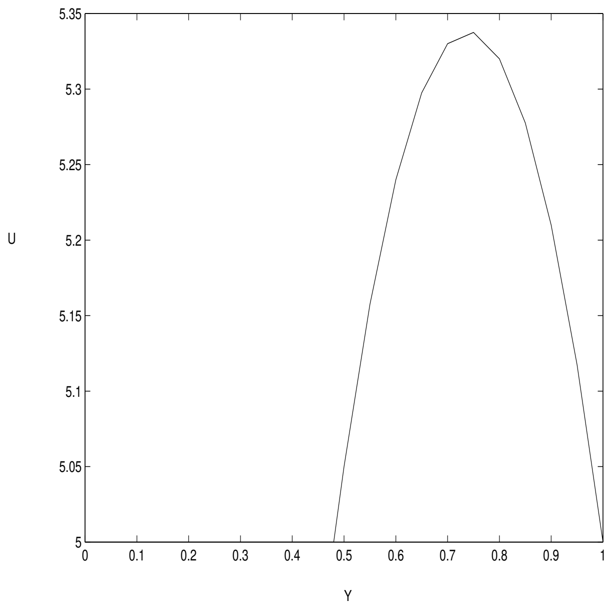
$$(1 - \Delta t\alpha)u_i^{n+1} - \Delta t\beta u_{i+1}^{n+1} = u_i^n - \Delta t \Delta y r_i, \tag{8.28}$$

in matrix notatie:

$$A\mathbf{\hat{u}^{n+1}} = \mathbf{\hat{u}^n} + \mathbf{r}, \tag{8.29}$$

waarbij

$$A = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & & & & & & & \\
0 & 1 & 0 & & & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \\
 & & 0 & 1 & 0 & & & & & \\
 & & & 0 & (1 - \Delta t\alpha) & -\Delta t\beta & & & & \\
 & & & & -\eta & 1 + 2\eta & -\eta & & & \\
 & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & & & -\eta & 1 + 2\eta & -\eta & \\
 & & & & & & & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} \tag{8.30}$$



Figuur 8.3: Het profiel van de analytische oplossing voor een bewegend intern randprobleem waar $y_b = 0.48$

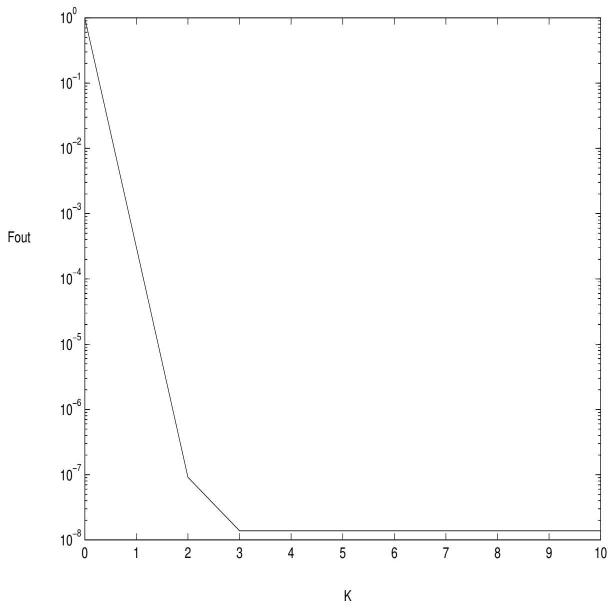
$$\mathbf{u}^n = \begin{pmatrix} u_b \\ \vdots \\ u_b \\ u_i \\ u_{i+1} \\ \vdots \\ U_{top} \end{pmatrix} \text{ en } \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\Delta t \Delta y r_i. \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Om dit interne bewegende randprobleem op te lossen er is een programma in FORTRAN 77 geschreven. Het profiel van de analytische oplossing staat in figuur 8.3. Voor het profiel van de relatieve fout zie figuur 8.4.

Een vraag die gesteld kan worden is wat gebeurt als y_b steeds dichter bij y_i ligt?. Gegeven de volgende vergelijking:

$$y_b = y_i - 10^{-p} \tag{8.31}$$

Voor verschillende waarden van p en dus verschillende waarden van y_b wordt de relatieve fout, met de interpolatie methode van Mittal, berekend. De resultaten staan in Tabel 8.1.



Figuur 8.4: De relatieve fout tussen de analytische en de numerieke oplossing gaat naar 10^{-8}, na de tweede iteratie, met 20 roosterpunten en $\Delta t = 1000$

De relatieve fout wordt als volgt gedefineerd:

$$Fout = max\frac{|(u_{an}^n(i) - u_{nu}^n(i))|}{|u_{an}^n(i)|} \quad \text{voor} \;\; i = 0, \ldots, N \tag{8.32}$$

mits $u_{an}^n(i)$ ongelijk aan nul is voor $i = 0, \ldots, N$, waarbij $u_{an}^n(i)$ staat voor de analytische snelheid op tijdstip t_n en op de positie y_i en $u_{nu}^n(i)$ staat voor de numerieke snelheid op tijdstip t_n en op de positie y_i. Tot $p = 16$ blijft de relatieve fout van orde 10^{-8}, pas als $p = 17$ dan wordt de numerieke oplossing instabiel want dan bestaat de inverse van de Vandermonde matrix niet meer. In dit geval het is handig om een Dirichlet randvoorwaarde op y_b op te leggen en er is geen interpolatie nodig.

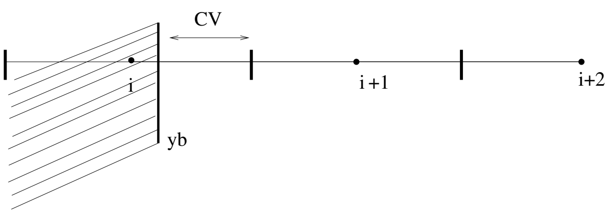
De numerieke oplossing voor $y_b \in (y_i, y_{i+\frac{1}{2}}]$

De volgende stap is om naar een andere interessante situatie te kijken waarin het gedeformeerde control-volume anders is, afhankelijk van de positie van de bewegende interne rand in het bekeken control-volume zie figuur 8.5.

In deze situatie zijn twee alternatieven te bespreken. In het eerste alternatief respectievelijk het tweede alternatief wordt het gedeformeerde control-volume $[y_b, y_{i+\frac{1}{2}}]$ respectievelijk $[y_b, y_{i+\frac{3}{2}}]$

p	De relatieve fout
2	1.341858298535548E-08
3	1.341858298535548E-08
4	1.304232868203258E-08
5	1.303889823207441E-08
6	1.303855646483949E-08
7	1.303852189523535E-08
8	1.303851773798008E-08
9	1.303851723798111E-08
10	1.303851757845986E-08
16	1.303851775051711E-08

Tabel 8.1: Het gedrag van de relatieve fout als y_b steeds dichter bij y_i ligt



Figuur 8.5: Het control volume gevormd door de aanwezigheid van de interne bewegende rand

gehanteerd.

Alternatief 1:

Analoog aan de eerste situatie, gaan we uit van formule (8.1) met als control-volume het lijnstuk $[y_b, y_{i+\frac{1}{2}}]$. Formules (8.14) tot en met (8.15) blijven geldig. We hebben nu met twee problemen te maken, het eerste probleem is het bepalen van $\frac{du}{dy}|_b$ en het tweede probleem is $\frac{du}{dy}|_{i+\frac{1}{2}}$. We gaan eerst $\frac{du}{dy}|_b$ bepalen. Het bepalen van $\frac{du}{dy}|_b$ gaat op dezelfde maniere als in de eerste situatie, het enige wat wij hoeven te doen is in de bijbehorende Vandermonde matrix y_i respectievelijk y_{i+1} te laten vervangen door y_{i+1} respectievelijk y_{i+2} en u_i respectievlijk u_{i+1} te laten vervangen door u_{i+1} respectievlijk u_{i+2}. Dus voor $\frac{du}{dy}|_b$ krijgen met de volgende formule te maken:

$$\frac{du}{dy}|_b = \sum_{j=1}^{3} a_{2j}u_j + 2y_b \sum_{j=1}^{3} a_{3j}u_j, \tag{8.33}$$

waarbij a_{ij} i=1,2,3, j=1,2,3) de elementen van de inverse van de Vandermonde matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & y_b & (y_b)^2 \\ 1 & y_{i+1} & (y_{i+1})^2 \\ 1 & y_{i+2} & (y_{i+2})^2 \end{pmatrix}.$$

We gaan nu $\frac{du}{dy}|_{i+\frac{1}{2}}$ bepalen. De redenering blijft hetzelfde als in de eerste situatie. Het enige verschil is dat nu de snelheid op y_{i+1} tot nu toe onbekend is, dus

$$\frac{du}{dy}|_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{j=1}^{3} b_{2j}v_j + 2y_{i+\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{3} b_{3j}v_j, \tag{8.34}$$

waarin

$$\begin{aligned} v_1 &= u_{i+\frac{1}{2}} & \qquad \text{(Notatie-kwestie)} \\ v_2 &= u_{i+1} \\ v_3 &= u_{i+2}, \end{aligned}$$

en b_{ij} i=1,2,3, j=1,2,3) de elementen van de inverse van de Vandermonde matrix:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & y_{i+\frac{1}{2}} & (y_{i+\frac{1}{2}})^2 \\ 1 & y_{i+1} & (y_{i+1})^2 \\ 1 & y_{i+2} & (y_{i+2})^2 \end{pmatrix}.$$

Het invullen van formules (8.22) en (8.34) in formule (8.14) levert:

$$u_{i+\frac{1}{2}}(b_{21} + 2y_{i+\frac{1}{2}}b_{31}) - u_b(a_{21} + 2y_b a_{31})$$

$$+\sum_{j=2}^{3}[(b_{2j}-a_{2j})+2(y_{i+\frac{1}{2}}b_{3j}-y_b a_{3j})]u_j-\frac{k}{\mu}(y_{i+\frac{1}{2}}-y_b)=0.$$

Deze formule kan gereduceerd worden tot:

$$u_{i+\frac{1}{2}}\alpha_1+\beta_1+\sum_{j=2}^{3}\gamma_j u_j-\frac{k}{\mu}(y_{i+\frac{1}{2}}-y_b)=0, \tag{8.35}$$

waarbij $\alpha_1=(b_{21}+2y_{i+\frac{1}{2}}b_{31}II)$, $\beta_1=-u_b(a_{21}+2y_b a_{31})$ en $\gamma_j=(b_{2j}-a_{2j})+2(y_{i+\frac{1}{2}}b_{3j}-y_b a_{3j})$ voor j=2,3. Het probleem nu is om $u_{i+\frac{1}{2}}$ te bepalen, we nemen aan dat $u_{i+\frac{1}{2}}$ voldoet aan formule:

$$u_{i+\frac{1}{2}}=C_1+C_2 y_{i+\frac{1}{2}}+C_3(y_{i+\frac{1}{2}})^2, \tag{8.36}$$

waarin C_i voor i=1,2,3 voldoen aan formule (8.21)

$$C_i=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}u_j \quad \text{voor i=1,2,3,} \tag{8.37}$$

de combinatie van formules (8.37), (8.36) en (8.35) levert:

$$(A_1u_b+A_2u_{i+1}+A_3u_{i+2})\alpha_1+\beta_1+\sum_{j=2}^{3}\gamma_j u_j-\frac{k}{\mu}(y_{i+\frac{1}{2}}-y_b)=0, \tag{8.38}$$

waarin

$$A_j=a_{1j}+a_{2j}y_{i+\frac{1}{2}}+a_{3j}(y_{i+\frac{1}{2}})^2 \quad \text{voor j=1,2,3}$$

formule (8.38) kan gereduceerd tot formule:

$$B_1u_b+B_2u_{i+1}+B_3u_{i+2}+\beta_1+\sum_{j=2}^{3}\gamma_j u_j-\frac{k}{\mu}(y_{i+\frac{1}{2}}-y_b)=0, \tag{8.39}$$

waarin $B_j=A_j\alpha_1$ voor i=1,2,3, of

$$\sum_{j=2}^{3}(B_j+\gamma_j)u_j+B_1u_b+\beta_1-\frac{k}{\mu}(y_{i+\frac{1}{2}}-y_b)=0. \tag{8.40}$$

We gebruiken de impliciete methode van Euler als tijdsintegratie. Na het toepassen van de tijdsintegratie krijgen we:

$$\frac{u_{i+1}^{n+1}-u_{i+1}^{n}}{\Delta t}=\sum_{j=2}^{3}(B_j+\gamma_j)u_j^{n+1}+B_1u_b+\beta_1-\frac{k}{\mu}(y_{i+\frac{1}{2}}-y_b), \tag{8.41}$$

ofwel:

$$(1-\Delta t(B_2+\gamma_2))u_{i+1}^{n+1}-\Delta t(B_3+\gamma_3)u_{i+2}^{n+1}=u_{i+1}^{n}+\Delta t[B_1u_b+\beta_1-\frac{k}{\mu}(y_{i+\frac{1}{2}}-y_b)], \tag{8.42}$$

in matrix notatie:

$$A\hat{\mathbf{u}}^{\mathbf{n+1}} = \hat{\mathbf{u}}^{\mathbf{n}} + \mathbf{r}, \tag{8.43}$$

waarbij

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & & 0 & 1 & 0 & & & & & \\ & & & 0 & (1-\Delta t(B_2+\gamma_2)) & -\Delta t(B_3+\gamma_3) & & & & \\ & & & & -\eta & 1+2\eta & -\eta & & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & -\eta & 1+2\eta & -\eta & \\ & & & & & & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8.44}$$

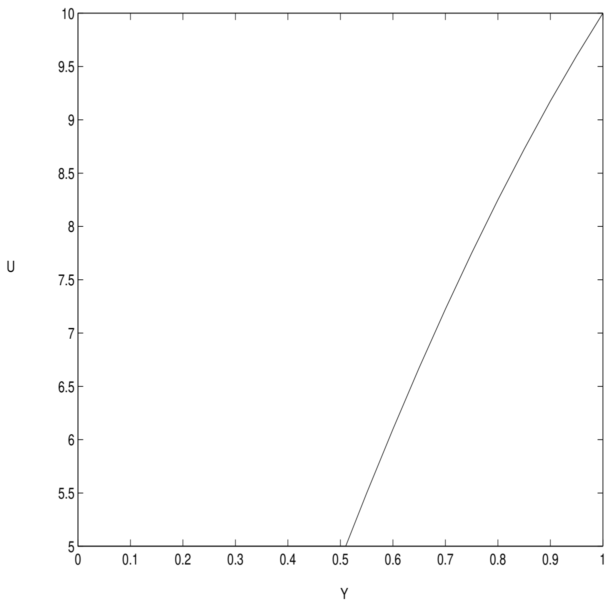
$$\mathbf{u}^n = \begin{pmatrix} u_b \\ \vdots \\ u_b \\ u_{i+1} \\ u_{i+2} \\ \vdots \\ U_{top} \end{pmatrix} \text{ en } \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta t[B_1 u_b + \beta_1 - \frac{k}{\mu}(y_{i+\frac{1}{2}} - y_b)]. \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Voor deze situatie is een programma in FORTRAN 77 geschreven. Om het profiel van de analytische oplossing te bekijken zie figuur 8.6. Voor het profiel van de relatieve fout zie figuur 8.7. Analoog aan de eerste situatie gaan we y_b steeds dichter bij $y_{i+\frac{1}{2}}$ nemen. Gegeven de volgende vergelijking:

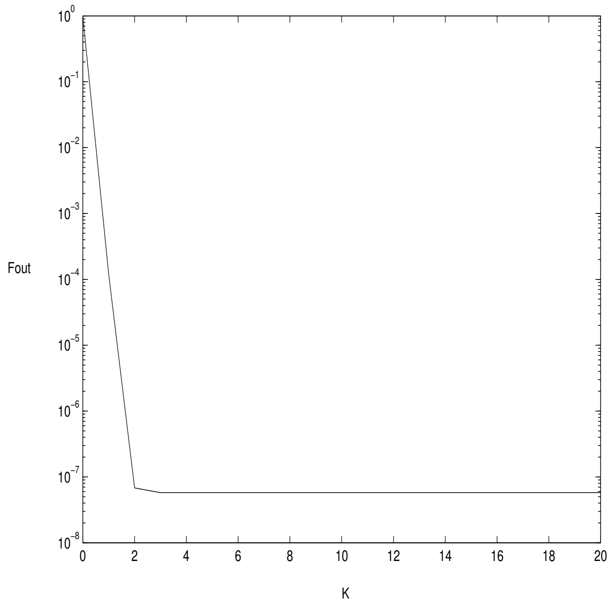
$$y_b = y_{i+\frac{1}{2}} - 10^{-p} \tag{8.45}$$

Voor verschillende waarden van p en dus verschillende waarden van y_b wordt de relatieve fout, met de interpolatie methode van Mittal, berekend. De resultaten staan in Tabel 8.2.

Merk op dat als y_b dichter bij $y_{i+\frac{1}{2}}$ ligt dan wordt de relatieve fout groter. De reden dat deze methode een slecht resultaat geeft is dat de numereike snelheid op de positie y_{i+1}, voor voldoende grote waarde van p, gelijk aan nul wordt zie Tabel 8.3. De relatieve fout op y_{i+1} wordt door



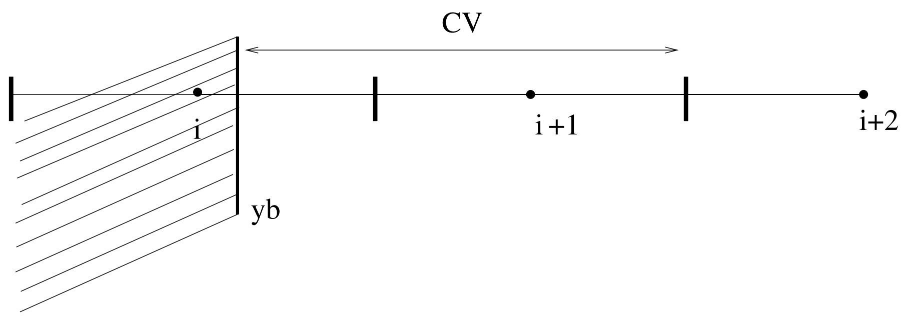
Figuur 8.6: Het profiel van de analytische oplossing voor bewegend intern randprobleem waar $y_b = 0.51$



Figuur 8.7: De relatieve fout tussen de analytische en de numerieke oplossing gaat naar 10^{-7} met 21 roosterpunten en $\Delta t = 1000$

p	De relatieve fout
2	5.865987428289592E-08
3	6.066812480362849E-08
4	6.087977109296748E-08
5	6.094165427817422E-08
6	3.103525693819010E-07
7	.1183809511787993
10	.9977507809742109
20	1.0
100	1.0

Tabel 8.2: Het gedrag van de relatieve fout als y_b steeds dichter bij $y_{i+\frac{1}{2}}$ ligt met het eerste alternatief



Figuur 8.8: Het control volume gevormd door de aanwezigheid van de interne bewegende rand

gebruik te maken van formule (8.32):

$$Fout = max\frac{(u^n_{an}(j) - u^n_{nu}(i+1))}{u^n_{an}(j)} = 1 \quad \text{voor} \quad j = 0, \dots, N \tag{8.46}$$

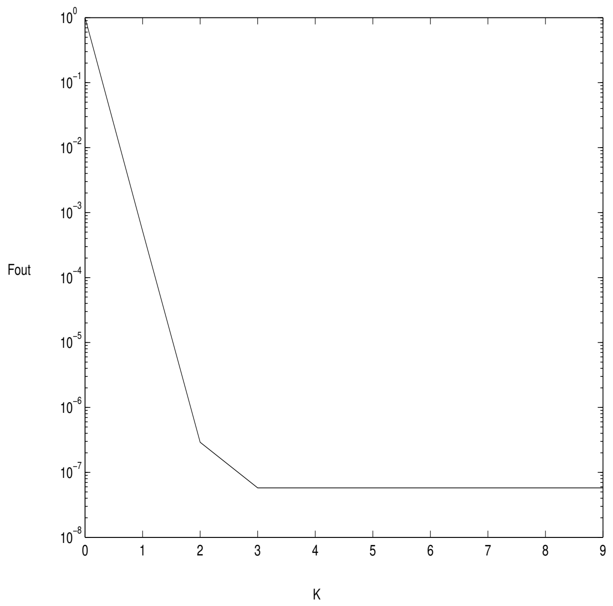
Alternatief 2:

Analoog aan de eerste situatie, gaan we uit van formule (8.1) met als control-volume het lijnstuk $[y_b, y_{i+\frac{3}{2}}]$ zie figuur 8.8 . Het bepalen van $\frac{du}{dy}|_b$ gaat op dezelfde manier als in de eerste situatie, het enige wat wij hoeven te doen is in de bijbehorende Vandermonde matrix y_i respectievelijk y_{i+1} te laten vervangen door y_{i+1} respectievelijk y_{i+2} en u_i respectievelijk u_{i+1} te laten vervangen door u_{i+1} respectievelijk u_{i+2}. In plaats van formule (8.28) krijgen we met de volgende formule te maken:

$$(1 - \Delta t\alpha)u^{n+1}_{i+1} - \Delta t\beta u^{n+1}_{i+2} = u^n_{i+1} - \Delta t\Delta y r_{i+1}, \tag{8.47}$$

De positie	De numerieke snelheid	De analytische snelheid
.0	5.0	5.0
5.000000074505806E-02	5.0	5.0
.1000000014901161	5.0	5.0
.1500000059604645	5.0	5.0
.2000000029802322	5.0	5.0
.25	5.0	5.0
.300000011920929	5.0	5.0
.3499999940395355	5.0	5.0
.4000000059604645	5.0	5.0
.4500000178813934	5.0	5.0
.5	5.0	5.0
.550000011920929	.0	5.31940804099912
.6000000238418579	1.21111111818916	5.93947396987322
.6500000357627869	2.39722223460881	6.53453988682638
.699999988079071	3.55833334925895	7.10460512718841
.75	4.69444446213958	7.64967105010205
.800000011920929	5.80555557325069	8.16973696109475
.8500000238418579	6.89166668259228	8.66480286016653
.9000000357627869	7.95277779016437	9.13486874731737
.949999988079071	8.98888889596694	9.57993410688869
1.0	10.0	10.0

Tabel 8.3: Voor $p = 100$ wordt de numerieke snelheid op y_{i+1} nul met het eerste alternatief



Figuur 8.9: De relatieve fout tussen de analytische en de numerieke oplossing gaat naar 10^{-7} met 20 roosterpunten

waarin $r_{i+1} = [\gamma + \frac{k}{2\mu}(y_{i+1} + y_{i+2} - 2y_b)]$. Voor het profiel van de relatieve fout zie figuur 8.9. Ook hier gaan we uit formule (8.45) en voor verschillende waarden van p en dus verschillende waarden van y_b wordt de relatieve fout, met de interpolatie van Mittal, berekend. De resultaten staan in Tabel 8.4 .

Het valt op dat zelfs als y_b steeds dichter bij $y_{i+\frac{1}{2}}$ ligt dat de relatieve fout stabiel blijft. Merk op dat de inverse van de bijbehorende Vandermonde matrix nu wel blijft bestaan. De conclusie die wij hier kunnen uittreken is dat alternatief 2 veel beter is dan alternatief 1.

8.2 Niet-Newtonse stroming

Voor niet-Newtonse stroming (Power Law model) is de viscositeit afhankelijk van de afgeleide van de snelheid. We gaan uit van de volgende vergelijkingen.

$$\frac{d(\mu\frac{du}{dy})}{dy} - k = 0, \quad y \in [y_b, 1] \tag{8.48}$$

$$u(y_b) = u_b \tag{8.49}$$

p	De relatieve fout
2	5.865981572318032E-08
3	6.066848732101039E-08
4	6.087520822333423E-08
5	6.089594050431322E-08
6	6.089801381310622E-08
7	6.089822008814889E-08
8	6.089824178946910E-08
10	6.089824388982239E-08
20	6.089824389868166E-08
100	6.089824389868166E-08

Tabel 8.4: Het gedrag van de relatieve fout als y_b steeds dichter bij $y_{i+\frac{1}{2}}$ ligt met het tweede alternatief

$$u(L) = U_{top} \tag{8.50}$$

Integratie van formule (8.48) over het controle volume CV, met CV is:$[y_b, y_{i+\frac{1}{2}}]$ zie figuur 8.2

$$[\frac{\mu du(y)}{dy}|_{i+\frac{1}{2}} - \frac{\mu du(y)}{dy}|_b] - k(y_{i+\frac{1}{2}} - y_b) = 0, \tag{8.51}$$

ofwel

$$\mu_{i+\frac{1}{2}}\frac{du(y)}{dy}|_{i+\frac{1}{2}} - \mu_b\frac{du(y)}{dy}|_b - k(y_{i+\frac{1}{2}} - y_b) = 0, \tag{8.52}$$

waarbij

$$y_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(y_i + y_{i+1}), \tag{8.53}$$

$$\frac{du}{dy}|_{i+\frac{1}{2}} \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{y_{i+1} - y_i}, \tag{8.54}$$

$$\mu_{i+\frac{1}{2}} = C(|\frac{du(y,t)}{dy}|)^{e-1}|_{i+\frac{1}{2}}, \tag{8.55}$$

$$\mu_b = C(|\frac{du(y,t)}{dy}|)^{e-1}|_b, \tag{8.56}$$

Het probleem is het bepalen van

$$\frac{du}{dy}|_b.$$

Analoog aan de vorige paragraaf gaan we vanuit dat de algemene oplossing voldoet aan formule (8.17) dan moet $\frac{du}{dy}|_b$. voldoen aan formule (8.18). Op dezelfde manier worden de elementen $a_{i,j}$ verkregen.
Formule (8.57) wordt:

$$\mu_{i+\frac{1}{2}}\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta y}-\mu_b(\sum_{j=1}^{3}(a_{2j}u_j+2y_ba_{3j})u_j)-k(y_{i+\frac{1}{2}}-y_b)=0, \tag{8.57}$$

ofwel

$$\alpha_2u_i+\beta_2u_{i+1}+\gamma_2=0, \tag{8.58}$$

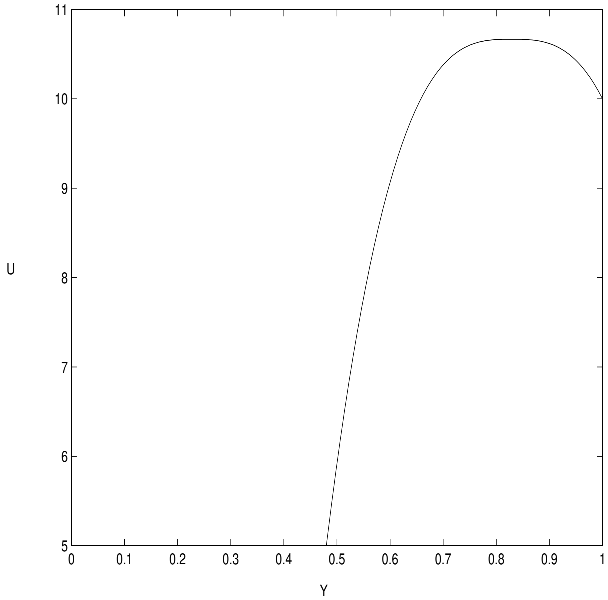
waarbij $\alpha_2 = -\mu_{i+\frac{1}{2}} - \mu_b\Delta y(a_{22}+2y_ba_{32})$, $\beta_2 = \mu_{i+\frac{1}{2}} - \mu_b\Delta y(a_{23}+2y_ba_{33})$ en $\gamma_2 = -\mu_b\Delta y(a_{21}+2y_ba_{31})u_b - \Delta yk(y_{i+\frac{1}{2}}-y_b)$.
Het tijdsintegratie luidt als volgt:

$$(1-\alpha_2\Delta t){u_i}^{n+1}-(\beta_2\Delta t)u_{i+1}^{n+1}={u_i}^n+\gamma_2\Delta t, \tag{8.59}$$

formule (8.29) blijft geldig waarbij

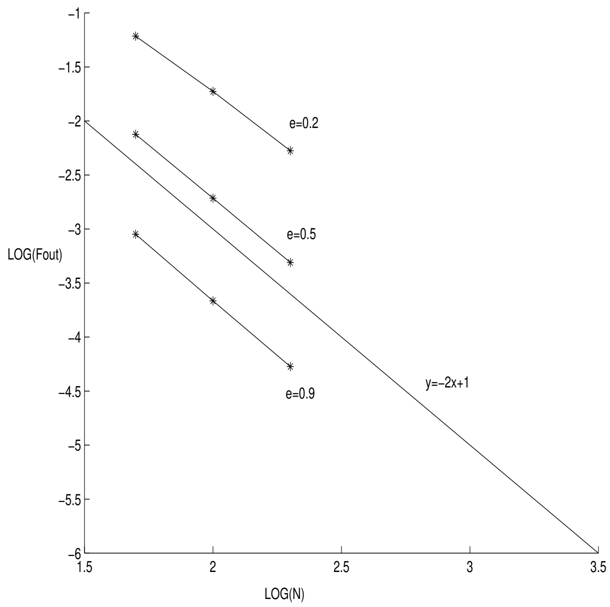
$$A=\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & & & & & & \\
0 & 1 & 0 & & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\
 & & 0 & 1 & 0 & & & & \\
 & & & 0 & (1-\Delta t\alpha_2) & -\Delta t\beta_2 & & & \\
 & & & & -\beta\mu_{i-\frac{1}{2}} & 1+\beta(\mu_{i-\frac{1}{2}}+\mu_{i+\frac{1}{2}}) & -\beta\mu_{i+\frac{1}{2}} & & \\
 & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & -\beta\mu_{i-\frac{1}{2}} & 1+\beta(\mu_{i-\frac{1}{2}}+\mu_{i+\frac{1}{2}}) & -\beta\mu_{i+\frac{1}{2}} & & \\
 & & & & & & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} \tag{8.60}$$

$$\mathbf{u}^n=\begin{pmatrix} u_b \\ \vdots \\ u_b \\ u_i \\ u_{i+1} \\ \vdots \\ U_{top}\end{pmatrix}, \mathbf{r}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta t\gamma_2. \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix} \text{ en } \beta=\frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}.$$

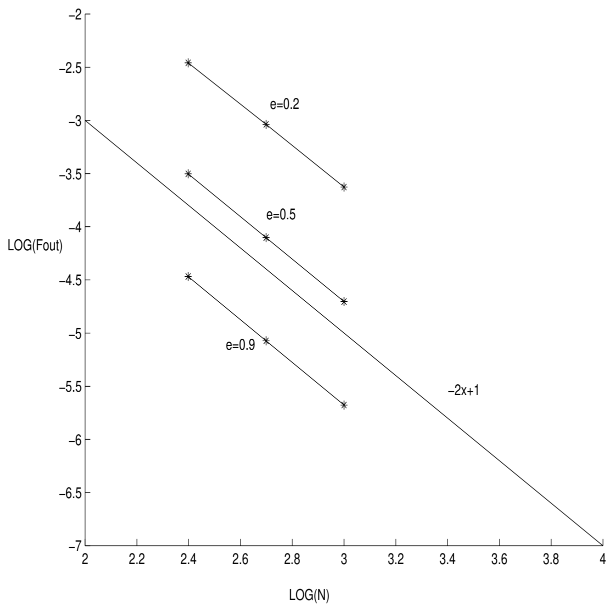


Figuur 8.10: Het profiel van de analytische oplossing voor een bewegend intern randprobleem waar $y_b = 0.48$, $e = 0.5$ en met 250 roosterpunten

Voor de implementatie van de interpolatie methode van Mittal, wordt uitgegaan van een gegeven y_b en daarna wordt het roosterpunt y_i, die aan de rechterkant ligt, automatisch bepaald door de waarde van het eerste roosterpunt die groter is dan y_b in y_i te stoppen. y_{i+1} wordt berekend door de ruimtelijke stap Δy en y_i te sommeren. Voor het profiel van de analytische oplossing zie figuur 8.10. Voor verschillende waarden van e en voor 50, 100 en 200 roosterpunten is het gedrag van de de relatieve fout t.o.v van het aantal roosterpunten bestudeerd zie figuur 8.11. Er blijkt uit figuur 8.12 dat de helling -2 is (voor verschillende waarden van e) en dus dat de nauwkeurigheid is gelijk aan 2.



Figuur 8.11: Het gedrag van de relatieve fout als functie van het aantal roosterpunten voor $e = 0.9$, $e = 0.5$ en $e = 0.2$ met 50, 100 en 200 roosterpunten en $\Delta t = 1000$



Figuur 8.12: Het gedrag van de relatieve fout als functie van het aantal roosterpunten voor $e = 0.9$, $e = 0.5$ en $e = 0.2$ met 250, 500 en 1000 roosterpunten en $\Delta t = 1000$

8.3 Conclusie

De conclusies die uit het hoofdstuk kunnen trekken zijn in de volgende punten samengevat:

- Het resultaat met de ERM methode is teruggevonden maar deze keer voor het geval dat de interne bewegende rand niet met de roosterpunten samenvalt
- De aanwezigheid van de interne rand dicht bij de roosterpunten, de nauwkeurigheid van de numerieke methode niet negatief heeft beïnvloedt zie figuur 8.11 waarin een verfijning van het rooster is gedaan door een groot aantal roosterpunten te nemen.
- De behandeling van een groot aantal interne bewegede randen is dezelfde als een één bewegende rand
- De aanwezigheid van een groot aantal interne bewegende randen kan de nauwkeurigheid van de methode niet negatief beïnvloeden.

Hoofdstuk 9

Experimenten met CFX-code

9.1 De structuur van de CFX-code

CFX-4 is een software pakket om laminaire en turbulente stromingen en warmteoverdracht te simuleren. De eerste versie van de code (FLOW3D) was beperkt tot eenvoudige cartesische en cylindrische geometries. De tweede versie van CFX heeft geen last van deze beperking door gebruik te maken van body-fitted coordinaten. De derde versie en CFX-4 zijn verder uitgebreid, door gebruik te maken van de multi-blok faciliteit of blok-ongestructureerd grid, tot complexe geometries. het grid kan nu gevormd worden door het samenvoegen van een willekeurig aantal rechthoekige grids of bloks.
CFX-4 programma's bestaan uit een aantal modules:

- Prepocessing Modules.
- Frontend Module.
- De Solution Module van de CFX-4 solver.
- Postprocessing, of Grafische Modules.

Preprocessing Modules:
Preprocessing modules worden gebruikt om de geometries van het rekengebied te definieren.
Frontend Module:
Frontend module transformeert de input specificatie van het probleem van een geschikte vorm voor de gebruiker tot een vorm met een efficiënte uitvoering van het CFX programma. Het probleem is gespecificeerd in een data file door gebruik te maken van Command Language. Command Language is een verzameling van commands en subcommands.

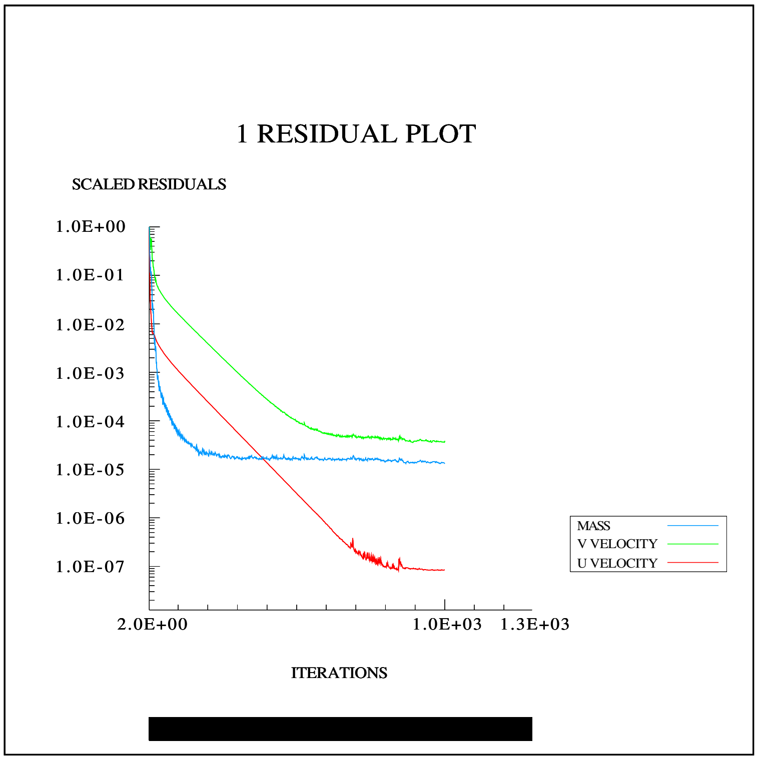
De Solution Module van de CFX-4 solver:
De solution module van de CFX-4 solver bepaalt een oplossing van de gediscretiseerd representatie van het probleem. Deze Module krijgt de informatie in een vorm die de maximale efficiëntie garandeerd op verschillende types van computers inclusief vector en parallel processoren. De Solution Module heeft maar weinig output facilitieten. Voorbeelden zijn: het schrijven van de oplossing op een schijf.
Postprocessing, of Grafische Modules:
De oplossing Module schrijft de resultaat tot schijf bestanden, die worden gelezen door de grafische Modules. Interfaces tot andere post-processing package zijn gevormd.
In de versie CFX-4.2 zijn de volgende nieuwe mogelijkheden toegevoegd:

- Parallele oplossing: Er is een domein-decompositie parallelle versie beschikbaar voor SGI, IBM en CRAY computers. Dat houdt in dat de geometrie van het probleem wordt verdeeld over een aantal processoren om een hoger performance van de solver te krijgen.
- deeltjes transport: Het deeltje transport model is uitgebreid tot laminaire niet-Newtonse stromingen. Ook de warmteoverdracht met polynomiale specifieke warmtes is geimplementeerd.
- Turbulentie: Een klein Reynolds getal versie van het Wilcox model is toegevoegd.
- het druk-correctie algoritme PISO is toegevoegd.

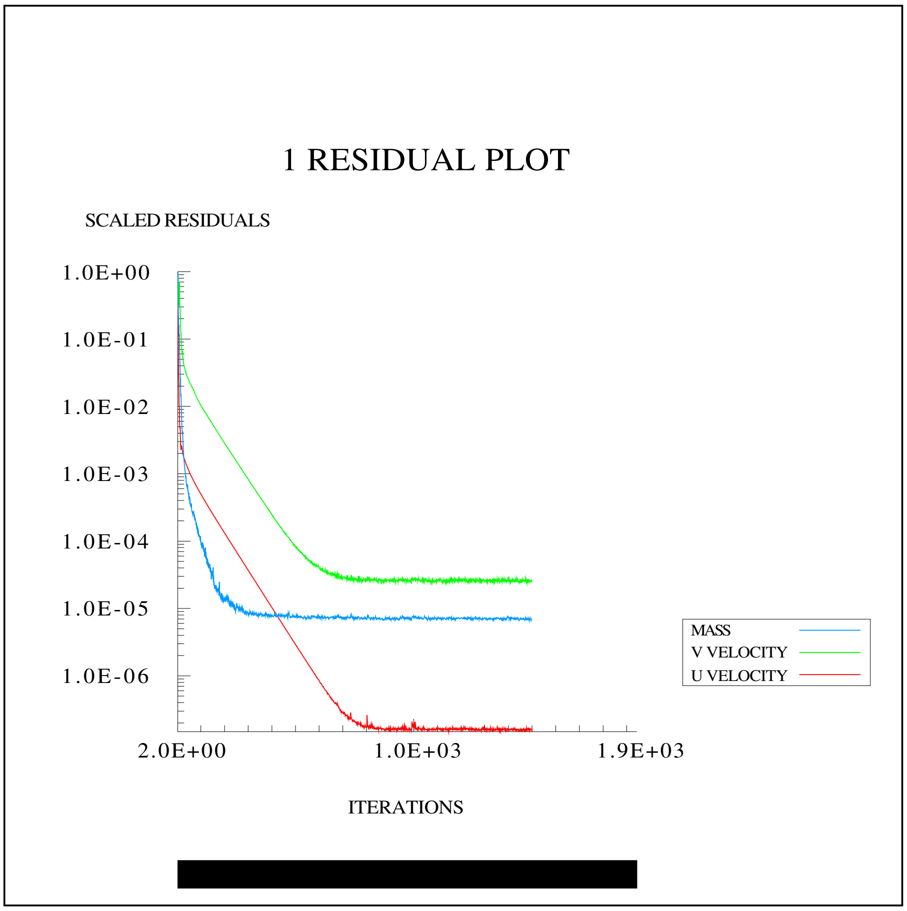
9.2 Ervaring met CFX-code

We hebben twee gevallen bekeken :
Geval I: Newtonse stroming
Geval II: Niet-Newtonse stroming

Geval I: Newtonse stroming
Door gebruik te maken van dezelfde waarden van de parameters in de eigen code, hebben we dezelfde resultaten gekregen en voornamelijk het gedrag van de fout tussen de analytische en de numerieke oplossing bestudeerd. In de CFX-code is het geschaalde residu berekend zie figure 9.1.
Geval II: Niet-Newtonse stroming
Analoog aan het eerste geval is ook hier, in CFX-code, het residu bepaald zie figure 9.2.



Figuur 9.1: het residu voor een Newtonse stroming gaat naar ongeveer 10^{-7}



Figuur 9.2: Het residu voor een Niet-Newtonse stroming gaat naar ongeveer 10^{-7} en $e = 0.9$

Hoofdstuk 10

De conclusies en aanbevelingen

De conclusies die uit het onderzoek kunnen trekken worden in de volgende punten samengevat:

- De aanwezigheid van de interne randen, de nauwkeurigheid van de methode niet slecht beïnvloedt.
- De Catesische Rooster Methode kan gebruikt worden voor een willekeurig aantal bewegende randen of lichamen.
- De resultaten blijven geldig voor zowel Newtonse vloeistoffen als niet-Newtonse vloeistoffen.
- De rekenrooster blijft onveranderd, het continue aanpassen van mesh aan de beweging van de vaste stof is niet nodig, daarmee is de methode goedkoop qua-rekenwerk.

Voor verder onderzoek kunnen bijvoorbeeld de volgende punten onderzocht worden:

- De Cartesische Rooster Methode kan getest worden voor een twee-dimensionaal stromingsprobleem bijvoorbeeld de Laplace vergelijking.
- Een test waarin het bewegende lichaam de vorm van een cylinder of een ellipse heeft.
- Een test met meer cylinders of ellipses.
- Een test waarin het bewegende lichaam een complexe geometrie heeft.

Bibliografie

[1] Joel H.Ferziger, Milovan Peric, *Computational Methods for Fluid Dynamics*, second edition, Springer, Berlin, 1999.

[2] T.Ye, R.Mittal, H.S. Udaykumar and W. Shyy, *An accurate Cartesian grid Method for Viscous Incompressible Flows with Complex Immersed Boundaries*.J.Comput.Phys.**256**,223(1999).

[3] P.Wesseling, *Principles of fluid dynamics*, AIO cursus Burgercentrum, 2000.

[4] D. Goldstein, R. Handler, and L. Sirovich, *Modelling of a no-slip surface with and external flow field*, J.Comput.Phys.**105**,354(1993).

[5] C. S. Peskin, *Numerical analysis of blood flow in the heart*, J.Comput.Phys.**25**, 220(1977).

[6] J. M. Yosuf, *Interaction of Massive Particles with Turbulence*, Ph.D. Thesis. Departement of Mechanical and Aerospace Engineering, Cornell University, 1996.

[7] H.S. Udaykumar, R.Mittal ,and W.Shyy, *Solid-liquid phase front computation in the sharp interface limit in fixed grid* ,J.Comput.Phys.**153**.535-574(1999).

[8] Byron Bild, R.Robert, C.Armstrong, *Dynamics of Polymeric Liquids*, John Wiley & Sons, Toronto, 1977.

[9] H. A. Van der Vorst, *A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of non-symmetric linear systems* , SIAM J. Sci. Statist. Comput. **13**, 631(1992).

[10] H.S. Udaykumar, W. Shyy, M. M. Rao, and R. W. Smith, *Computational Fluid Dynamics with Moving Boundaries*,Taylor & Francis, London,1996.

Appendix A

Het programma kan in vijf blokken verdeeld worden.

Blok 1: Declaraties van variablen

Dit gedeelte ziet er als volgt uit:

```
integer N_max,f
parameter(N_max=1000)
parameter(epsilon=10**(-20))
integer i,j,k,N_Cel,M,f
real T_begin, T_end,Cons,v,Dy,N,L,Nt,C1
double precision epsilon,E1,E,Dt,U_bottom,U_top
double precision Diag(N_max),Upp(N_max),Dow(N_max)
double precision   U_an(N_max),U_nu(N_max),Y(N_max)
double precision   C_1,C_M,C_f
integer BIC(N_max),EIC(N_max)
double precision VC(N_max)
```

Blok 2:Input data bestand

Dit gedeelte ziet er als volgt uit:

```
open(unit=10,file='Data.dat')
     read(10,*) v
     read(10,*) N
     read(10,*) Dt
     read(10,*) L
     read(10,*) Cons
     read(10,*) T_begin
     read(10,*) T_end
     read(10,*) U_bottom
     read(10,*) U_top
```

```
     read(10,*) N_Cel
     DO i=1,N_Cel
        read(10,*) BIC(i),EIC(i),VC(i)

     Enddo

close(10)
```

In de input file kan de gebruiker het aantal, hoogtes en de snelheden van de geblokkeerd cellen zelf kiezen. Het verdelen van het rekengebied en bepalen van de analytische en de numerieke snelheden worden dan automatisch gedaan.

```
 1.            #v
240.           #N
100            #Dt
1.             # L
10.            #Cons
0.             # T begin
10000.         #T end
0.             #Ubottom
0.             # U top
3              #N_Cel
20,60,  0.     #BIC(1),EIC(1), VC(1)
80,160,  0.    #BIC(2),EIC(2), VC(2)
180,200, 0.    #BIC(3),EIC(3), VC(3)
```

Blok 3 : Bepalen van de analytische snelheid

```
 M=N_Cel
 C_1=((VC(1)-U_bottom)/Y(BIC(1)))+(Cons/2*v)*Y(BIC(1))
 C_M=((U_top-VC(N_Cel)))/(L-Y(EIC(N_Cel)))+(Cons/2*v)*(L-Y(EIC(N_Cel)))
 Do i=1,N
    if (Y(i).Lt.Y(BIC(1))) then
       U_an(i)=(-Cons/2*v)*(Y(i)**2)+Y(i)*C_1+U_bottom
    Endif
    Do f=1,N_Cel-1
      C_f=(VC(f+1)-VC(f))/(Y(BIC(f+1))-Y(EIC(f)))+(Cons/2*v)*(Y(BIC(f+1))-
Y(EIC(f)))
```

```
      if  ((Y(i).gt.Y(EIC(f))).AND.(Y(i).lt.Y(BIC(f+1)))) then
          U_an(i)=(-Cons/2*v)*((Y(i)-Y(EIC(f)))**2)+(Y(i)-Y(EIC(f)))*C_f+VC(f
      Endif

   Enddo

   if  (Y(i).gt.Y(EIC(N_cel))) then
     U_an(i)=(-Cons/2*v)*((Y(i)-Y(EIC(N_cel)))**2)+
     (Y(i)-Y(EIC(N_Cel)))*C_M+VC(N_Cel)
   Endif

 Enddo

 Do i=1,N_Cel

    Do f=0, EIC(i)-BIC(i)
       U_an(BIC(i)+f)=VC(i)
    Enddo
 Enddo
```

Blok 4: De intialisatie van de numerieke snelheid

```
U_nu(1)=U_bottom
U_nu(N)=U_top
Do  i=2,N-1
    U_nu(i)=0.
Enddo
```

Blok 5: Het bepalen van de numerieke snelheid

```
 Do k=1,Nt
    Diag(1)=1.
    Diag(N)=1.
    Do i=2,N-1
       Diag(i)=1+2*(v*Dt/(Dy**2))
    Enddo
    Dow(N)=0.
```

```
    Do i=1,N-1
       Dow(i)=-v*Dt/(Dy**2)
    Enddo
    Upp(1)=0.
    Do  i=2,N-1
         Upp(i)=-v*Dt/(Dy**2)
    Enddo
    U_nu(1)=U_bottom
    U_nu(N)=U_top
    Do i=2,N-1
       U_nu(i)=U_nu(i)+Dt*Cons
    Enddo

    Do i=1,N_Cel
       Do f=0, EIC(i)-BIC(i)
          Diag(BIC(i)+f)=1.
          Dow(BIC(i)+f)=0.
  Upp(BIC(i)+f)=0.
       Enddo
    Enddo
    Do i=1,N_Cel
       Do f=0, EIC(i)-BIC(i)
          U_nu(BIC(i)+f)=VC(i)
       Endd
    Enddo
    if (abs(Diag(1)).LT.epsilon) write(6,*) 'Diag(1) is zero'
       Do i=2,N
          Dow(i)=Dow(i)/Diag(i-1)
          Diag(i)=Diag(i)-Dow(i)*Upp(i-1)
          if(abs(Diag(i)).LT.epsilon) write(6,*)'Diag(i) zero'
             U_nu(i)=U_nu(i)-Dow(i)*U_nu(i-1)
       Enddo
       U_nu(N)=U_nu(N)/Diag(N)
       Do   i=N-1 ,1,-1
            U_nu(i)=(U_nu(i)-Upp(i)*U_nu(i+1))/Diag(i)
      Enddo
Enddo
```

Blok 6: De output bestanden In de volgende gedeelte wordt de fout tussen de analytische en de numerieke snelheid berekend en de worden de waarden naar het bestand 'Error.dat' weggeschreven.

```
Open(11,file='Error.dat')
    E1 = 0.
    Do i=1,N
       E=abs(U_nu(i)-U_an(i))
       If (E .gt. E1) then
           E1 = E
        Endif
    Enddo
Close(11)
```

In de volgende gedeelte wordt de analytische snelheid berekend en de worden de waarden naar het bestand 'Velociy.dat' weggeschreven.

```
Open(12,file='Velocity.dat')
   Do i=1,N
      write(12,*) U_an(i)
   Enddo
Close(12)
```