De cartesische rooster methode voor bewegende interne rand problemen

A.Bartal

4 juli 2000

Afstudeercommissie
Prof dr.ir. P. Wesseling (TU Delft)
Dr. T. Jongen (Unilever)
Dr.ir. C. Vuik (TU Delft)
Ir. I. Wenneker (TU Delft)

Inhoudsopgave

1 Inleiding **1**

2 Probleembeschrijving **1**

3 De basis vergelijkingen voor de stromingsleer **3**
3.1 **Behoud van massa voor een stationaire stroming** 4
3.2 **Behoud van impuls** 5
3.3 **Begin- en randvoorwaarden** 5
3.3.1 **Beginvoorwaarden** 5
3.3.2 **Randvoorwaarden** 6

4 De cartesische rooster methode **6**
4.1 **Een stroming zonder de bewegende interne randen** 6
4.2 **Een stroming met bewegende interne randen** 9

5 De Poiseuille stroming met vaste randen **10**
5.1 **De analytische oplossing** 11
5.2 **De numerieke oplossing** 13
5.2.1 **De expliciete methode van Euler** 14
5.2.2 **De impliciete methode van Euler** 17

6 De Poiseuille stroming met bewegende randen **17**
6.1 **De analytische oplossing** 17
6.2 **De numerieke oplossing** 19
6.2.1 **De expliciete methode van Euler** 19
6.2.2 **De impliciete methode van Euler** 19

7 Niet-Newtonse reologie **21**
7.1 **Poiseuille stroming met vaste randen** 21
7.1.1 **De analytische oplossing** 21
7.1.2 **De numerieke oplossing** 24
7.2 **Poiseuille stroming met bewegende randen** 32
7.2.1 **De analytische oplossing van de snelheid** 32
7.2.2 **De numerieke oplossing van de snelheid** 38

8 De samenvatting **43**

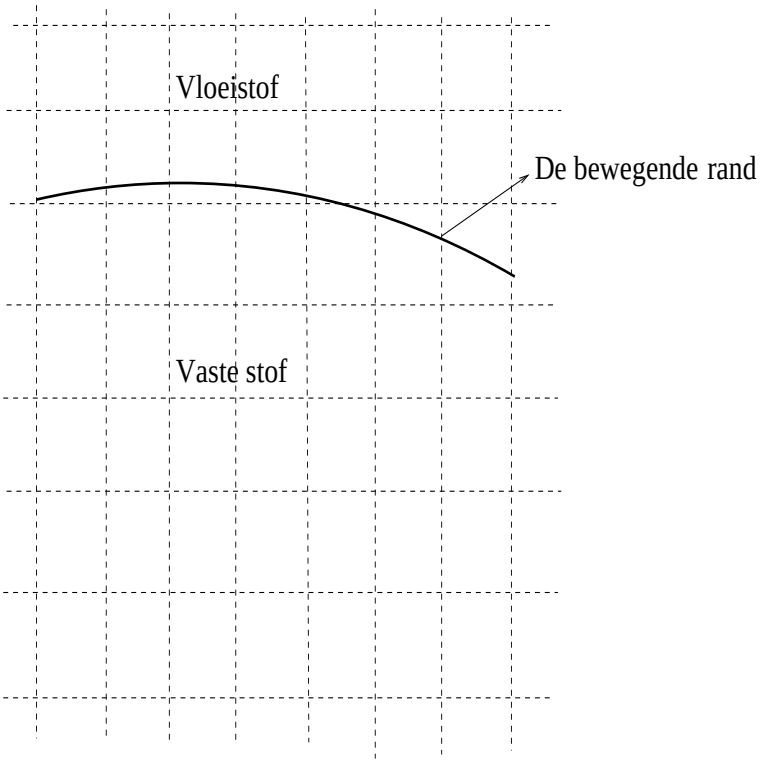
9 De onderzoekpunten **45**

1 Inleiding

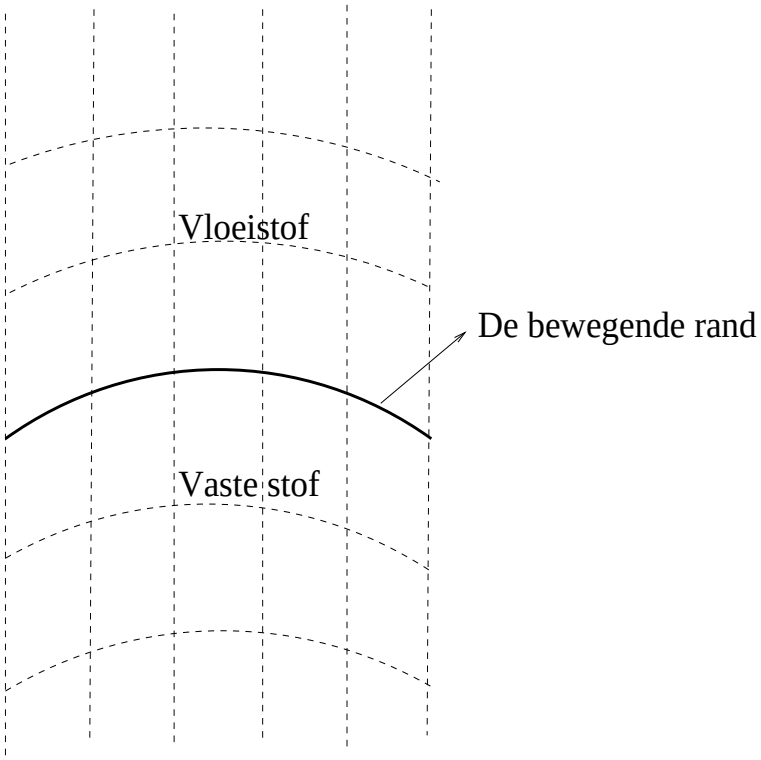
Unilever is een multinationaal bedrijf dat actief is in meer dan 88 landen. Er werken meer dan 270.000 mensen. 90% van de managers zijn intern opgeleid. Unilever werft jaarlijks ongeveer 100 PhDs. Unilever kent in de hele wereld zes onderzoeklaboratoria waarvan twee in England (Port Sunlight en Colworth), één in Nederland (Vlaardingen), één in Amerika (Edgewater), één in India en de laatste in China. Unilever investeert jaarlijks circa 550 miljoen dollar in onderzoek en werkt samen met universiteiten over de hele wereld om op de hoogte van de nieuwe technieken en technologieën te zijn. De interesse van Unilever is gericht op volgende produkten: margarine, thee, ijs, levensmiddelen en huishoudelijke produkten. De meest bekende produkten zijn: Organics shampoo, Dove, Omo,... etc.

2 Probleembeschrijving

Problemen met bewegende randen komen in de praktijk vaak voor. Een speciaal geval zijn de problemen met interne bewegende randen, bijvoorbeeld een voorwerp in een vloeistofstroming. Het voorwerp beweegt onder invloed van de stroming maar tegelijkertijd heeft het voorwerp ook effect op het gedrag van de stroming. Er is dus sprake van een interactie tussen het voorwerp en de stroming.
Als gevolg van de deze interactie krijgen we een gekoppeld niet lineair systeem dat analytisch moeilijk is op te lossen. Daarom stapt men over naar numerieke methoden om zulke problemen op te lossen.
We gaan eerst de Euler en Lagrange methoden behandelen daarna worden andere methoden kort beschreven.
Er zijn een paar oplosmethoden voor de problemen met bewegende randen bekend bijvoorbeeld Lagrange en Euler methode of een combinatie van de twee. Bij de Lagrange beschrijvingswijze beweegt de waarnemer met de stroom mee, dit in tegenstelling tot de Euler beschrijvingswijze waarin de waarnemer niet met de stroom beweegt. De keuze voor een efficiënte en robuuste methode hangt af van het fysische probleem. Als de interne bewegende rand het doel van het onderzoek is en getraceerd moet worden d.w.z dat de positie van de rand in de tijd vastgelegd moet worden, dan het is verstandig om de Lagrange methode te gebruiken. Maar als wij geinteresserd zijn in het bepalen van de eigenschappen van een stroming, op een vastgelegde positie bijvoorbeeld de druk op een muur, dan is het raadzaam om de methode van Euler te gebruiken (zie pagina 6 in [3]).
Als wij de Lagrange beschrijvingswijze hanteren dan verandert de mesh in de tijd (zie figuur 2). Dit leidt tot veel rekenwerk. Bij de methode van Euler blijft de mesh onveranderd in tijd en dus kost minder rekenwerk (zie figuur 1).
De methode, die wij zullen gebruiken, heet de cartesische rooster methode (zie [2]). Dit is een combinatie van de sterke punten van de Lagrange methode en de Euler methode.
Een andere methode voor de interne bewegende randen problemen is de zogeheten curvilinear rooster methode. Het voordeel van deze methode is dat het opleggen van randvoorwaarden vereenvoudigd is en de nauwkeurigheid van de solver wordt niet be-



Figuur 1: De stilstaande mesh methode van Euler



Figuur 2: De bewegende mesh methode van Lagrange

invloedt door de aanwezigheid van de interne 'moving bodies'. Het nadeel is dat de transformatie van de vergelijkingen naar de curvilenear coordinaten leidt tot een complex stelsel en daarmee kunnen de stabiliteit, de convergentie en het aantal operaties van de solver nadelig beinvloed worden.
Een andere klasse van methoden voor interne 'moving bodies', zijn de zogeheten ïmmersed boundary" methoden waarin de bewegende randen als een discrete verzameling van volume of oppervlakte krachten worden gerepresenteerd. Deze methode is met succes toegepast op viskeuse stromingen (zie [4,5,6]). Het nadeel daarvan is gerelateerd aan de representatie van een puntvormige kracht op een mesh met een eindige afmeting (zie [7]).
Nadat in hoodstuk 3 de bewegingsvergelijkingen voor de stromingsleer afgeleid zijn, zullen we in hoodstuk 4 een beschrijving geven van de cartesische rooster methode. In de volgende hoofdstukken zullen een aantal ééndimensionale stromingsproblemen opgelost worden.

3 De basis vergelijkingen voor de stromingsleer

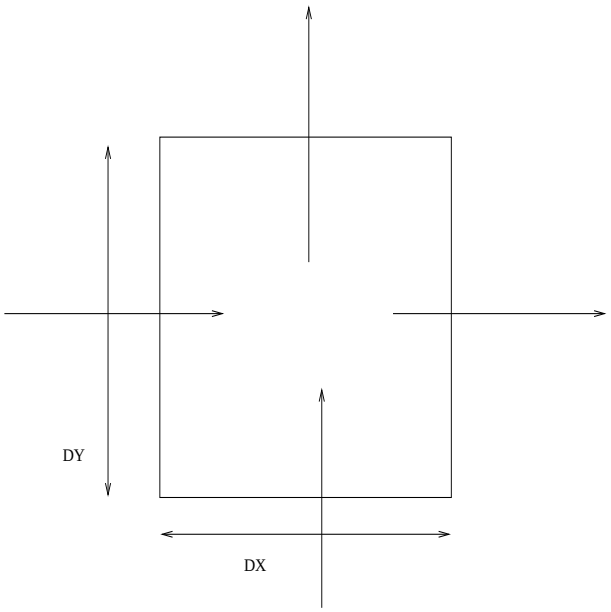
Stromingsleer is een breed veld met verschillende disciplines en specialiteiten. Binnen de stromingsleer houdt men zich bezig met het bestuderen van de bewegingen in een fluidum. De te bestuderen fluida omvatten een groot aantal vloeibare stoffen, die voor vele toepassingen interessant zijn. De meest bekende soorten van fluida zijn:

- gassen, zoals lucht en het toepassingsgebied is bijvoorbeeld: de luchtvaart, meteorologie.
- vloeistoffen, zoals water en het toepassingsgebied is bijvoorbeeld: oceanografie en industrie.
- bloed en het toepassingsgebied is de biologische stromingsleer.
- olie in bijvoorbeeld warmtewisselaars en lagers.

Fluida bewegen onder invloed van de actie van externe krachten. Die krachten zijn in twee soorten te onderscheiden:

- Volumekrachten bijvoorbeeld zwaartekracht
- Oppervlaktekrachten bijvoorbeeld spanningskrachten en de druk.

De stroming van een fluidum wordt gekarakteriseerd door de druk, dichtheid, temperatuur, snelheid en viscositeit.
Een fluidum met een constante viscositeit wordt een Newtons fluidum genoemd, anders heet het Niet-Newtons. Om de stroming van een fluidum uit te rekenen dient men begin- en randvoorwaarden op te geven. Dan ligt, door de behoudswetten van massa en impuls, het gedrag in plaats en tijd van het fluidum vast.
In de volgende hoofdstuk worden de basisvergelijkingen van de stromingsleer, namelijk massabehoud en impulsbehoud, besproken.



Figuur 3: Instroom en uitstroom voor een twee dimensionale stroming

3.1 Behoud van massa voor een stationaire stroming

Omdat er geen massaproduktie plaatsvindt concluderen we dat de massa, die bij een stilstaand denkbeeldig volume in een stationair probleem naar binnenstroomt, gelijk is aan de massa die er uitstroomt (zie figuur 3).
In formulevorm volgt:

$$\Delta y(\rho u(x,y))|_{x+\Delta x,y} + \Delta x(\rho v(x,y))|_{y+\Delta y,x} = Uit$$

en

$$\Delta y(\rho u(x,y))|_{x,y}\Delta t + \Delta x(\rho v(x,y))|_{x,y} = In$$

dan is

$$Uit = In,$$

waarbij ρ staat voor de dichtheid, $u(x,y)$ staat voor de snelheid in de x-richting en $v(x,y)$ de snelheid in de y-richting.

Delen door $\Delta y \Delta x$ geeft:

$$\frac{(\rho u(x,y))|_{x+\Delta x,y} - (\rho u(x,y))|_{x,y}}{\Delta x} + \frac{(\rho v(x,y))|_{x,y+\Delta y} - (\rho v(x,y))|_{x,y}}{\Delta y} = 0. \qquad (1)$$

Neem de limiet Δx en Δy naar nul dan volgt:

$$\frac{\partial \rho u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \rho v(x,y)}{\partial y} = 0.$$

Voor een onsamendrukbare stroming geldt dan:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 0.$$

Dit is de continuiteitsvergelijking. Deze vergelijking is ook voor een instationaire stroming geldig.

3.2 Behoud van impuls

De behoudswet van impuls zegt dat de verandering in de impuls in een volume gelijk is aan de totale kracht op dit volume. In het geval dat de zwaartekracht de enige extern werkende kracht is, luidt de formule van de behoudswet :

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho g_i,$$

waarin g_i de component is van de versnelling van de zwaartekracht in de richting van de de cartesische coordinaat x_i. Hier wordt gebruik gemaakt van de Einstein sommatieconventie (herhaald indexen).
Voor de spanningstensor τ krijgen we, in het geval van Newtonse vloeistoffen, de volgende uitdruking :

$$\tau_{ij} = 2\mu D_{ij} - \frac{2}{3}\mu\delta_{ij} div\,\mathbf{u}$$

met de deformatietensor D:

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$$

waarbij μ de dynamische viscositeit is. Voor het afleiden van de bovenstaande vergelijkingen (zie paginas 5 t/m 9 [1]).

3.3 Begin- en randvoorwaarden

Om tot een eenduidige oplossing voor de basisvergelijkingen te komen moeten de begin- en randvoorwaarden gegeven zijn.

3.3.1 Beginvoorwaarden

Voor instationaire stromingen worden op een begintijdstip t_0 de waarden van de snelheid $\mathbf{u}$ en de druk p gegeven.

$$\mathbf{u}|t_0 = \mathbf{u}_0,$$

$$p|t_0 = p_0.$$

3.3.2 Randvoorwaarden

We kunnen twee soorten randvoorwaarden onderscheiden.
Dirichlet:

$$\mathbf{u} = \mathbf{f},$$

Neumann:

$$a_{ij}(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j})n_i = f,$$

op $\Gamma 2 \subset \partial\Omega$ waarbij a_{ij} reëel is , Ω het reken gebied en $\Gamma 2$ een gedeelte is van de rand. In de volgende paragraaf zullen we een voorbeeld hiervan zien (zie figuur 7).

4 De cartesische rooster methode

In deze paragraaf zullen we eerst de cartesische rooster methode met bewegende interne randen beschrijven maar zonder rekening te houden met de bewegende interne randen ("Moving bodies") (zie [2]), daarna zullen we bekijken hoe de huidige methode met de bewegende interne randen omgaat.
Voordat we laten zien hoe de methode werkt, is het nuttig om een paar eigenschappen van de cartesische rooster methode te noemen.

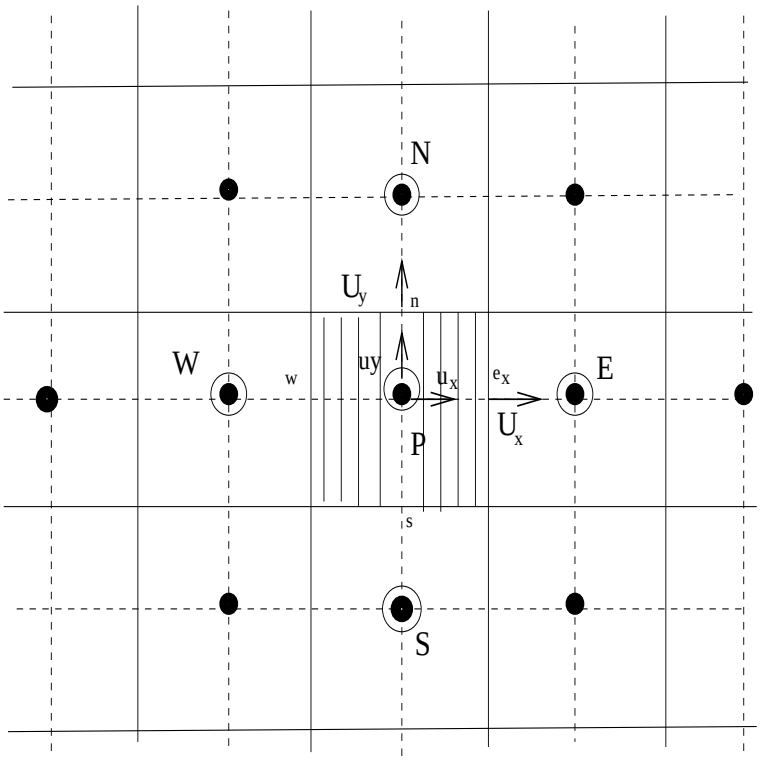
- Deze methode wordt vooral gebruikt om instationaire, viskeuse incompressibele stromingen met bewegende interne randen te simuleren.
- De methode is gebaseerd op een eindige volume methode, met een tweede orde nauwkeurig centrale-differentie schema, en een fractionele-stap procedure.
- Een nieuwe interpolatie procedure is gebruikt in de buurt van de bewegende rand om de tweede orde ruimtelijke nauwkeurigheid te behouden.

Merk op dat de aanwezigheid van de bewegende interne randen de conditie van de lineaire operatoren vergroot en dat leidt tot traagheid in de iteratieve oplossingen van de vergelijkingen. Een remedie voor dit probleem is om een geconjugeerd gradiënt methode te gebruiken.

4.1 Een stroming zonder de bewegende interne randen

In dit geval, laten we de bewegende interne randen buiten beschouwing.
We gaan uit van de instationaire, viskeuse en incompressibele Navier-Stokes vergelijkingen. De integraal formulering van de dimensieloze Navier-Stokes vergelijkingen is:

$$\int_{cs} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0, \tag{2}$$



Figuur 4: Het snelheidsveld wordt gepresenteerd door de snelheden op de cel-zijde en op cel-centrum Ux, Uy en u_x, u_y

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\mathbf{u}dV + \int_{cs}\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{n}})dS = -\int_{cs}p\hat{\mathbf{n}}dS + \frac{1}{Re}\int_{cs}\bigtriangledown\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS \tag{3}$$

$\mathbf{u}$ en p zijn gedefinieerd in het centrum van het controle volume. Formule (2) beschrijft massabehoud en formule (3) het impulsbehoud.
De symbolen cs en cv staan voor controle oppervlakte van het cv respectievelijk controle volume en $\hat{\mathbf{n}}$ de uitwendige normaal vector op het controle volume (zie figuur 4). Het gearceerde gebied is ons controle volume
De randvoorwaarde op de stilstaande externe randen is gegeven door

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{v}(\mathbf{x},t),$$

waarbij $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ een gegeven snelheid op de rand van de stroming. Re staat voor het Reynolds getal . Een tweede orde nauwkeurige, twee-stap druk-correctie methode wordt gebruikt om van tijd niveau "n" naar "$n+1$" te gaan. Om van $\mathbf{u}^n$ naar $\mathbf{u}^{n+1}$ te gaan, wordt eerst als tussenstap een snelheid $\mathbf{u}^\star$ berekend. De snelheid $\mathbf{u}^\star$ wordt bepaald door de volgende vergelijking op te lossen

$$\begin{aligned}\int_{cv}\frac{\mathbf{u}^\star-\mathbf{u}^n}{\Delta t}dV &= \frac{1}{2Re}\int_{cs}(\bigtriangledown\mathbf{u}^\star+\bigtriangledown\mathbf{u}^n)\cdot\hat{\mathbf{n}}dS \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_{cs}[3\mathbf{u}^n(\mathbf{U}^n\cdot\hat{\mathbf{n}})-\mathbf{u}^{n-1}(\mathbf{U}^{n-1}\cdot\hat{\mathbf{n}})]dS\end{aligned} \tag{4}$$

waarin $\mathbf{u}^\star$ voldoet aan de randvoorwaarde:

$$\mathbf{u}^\star = \mathbf{v}^{n+1}.$$

U staat voor de snelheid van de stroming op de zijkanten van het control-volume. De convectie termen van de formule(2) zijn in de tijd gediscretiseerd m.b.v een Adams-Bashforth schema. Voor de discretisatie van de diffusie termen valt de keuze op de impliciete Crank-Nicolson schema omdat deze onvoorwaardelijk stabiel is.
De volgende stap is de druk-correctie stap:

$$\int_{cv} \frac{\mathbf{u^{n+1}} - \mathbf{u}^\star}{\Delta t} dV = -\int_{cv} \bigtriangledown \mathbf{p}^{n+1} dV. \tag{5}$$

Als we opleggen dat de uiteindelijke snelheid voldoet aan formule (2) dan geldt

$$\int_{cs} (\mathbf{U}^{n+1} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS = 0. \tag{6}$$

De combinatie van formule (5) en de formule (6) geeft:

$$\int_{cs} \bigtriangledown (\mathbf{p}^{n+1}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{1}{\Delta t} \int_{cs} (\mathbf{U}^\star \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS \tag{7}$$

$\mathbf{U}^\star$ wordt hierbij door een lineaire interpolatie van de nabijgelegen snelheden bepaald. Wanneer $\mathbf{U}^\star$ bekend is dan kan de laatste vergelijking van de druk opgelost worden en daarmee de snelheden $\mathbf{u}^{n+1}$ en $\mathbf{U}^{n+1}$ via

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^\star - \Delta t (\bigtriangledown p^{n+1})_{cc} \tag{8}$$

en

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^\star - \Delta t (\bigtriangledown p^{n+1})_{fc}. \tag{9}$$

De indices cc en fc staan voor "cel center" respectievelijk "face center".
De drukgradiënt in de "cel center" in de x-richting is bepaald door

$$(\frac{\partial p}{\partial x})_P = \frac{(p_E - p_W)}{2\Delta x}. \tag{10}$$

Dezelfde gradiënt op de ëast face" is gegeven door :

$$(\frac{\partial p}{\partial x})_e = \frac{(p_E - p_P)}{\Delta x}. \tag{11}$$

in één dimensionaal geval luidt formule (8) als volgt:

$${u_x}^{n+1} = {u_x}^\star - \Delta t (\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x})_P \tag{12}$$

het invullen van formule (10) in formule (12) geeft:

$${u_x}^{n+1} = {u_x}^\star - \Delta t \frac{({p^{n+1}}_E - {p^{n+1}}_W)}{2\Delta x} \tag{13}$$

in één dimensionaal geval luidt formule (9) als volgt:

$$U^{n+1}{}_x = U^{\star}{}_x - \Delta t(\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x})_e \tag{14}$$

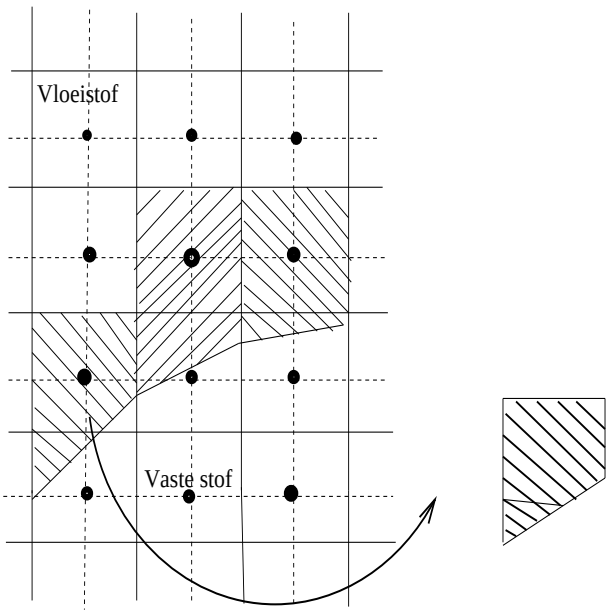
het invullen van formule (11) in formule (15) geeft:

$$U^{n+1}{}_x = U^{\star}{}_x - \Delta t\frac{(p^{n+1}{}_E - p^{n+1}{}_P)}{\Delta x} \tag{15}$$

Merk op dat het snelheidsveld van de gehanteerde cartesische methode bestaat uit twee verschillende maar gerelateerde snelheden. De snelheid **u**, in de cel center, die aan de impuls vergelijkingen voldoet en de snelheid **U** die aan de continuiteitsvergelijking voldoet.

4.2 Een stroming met bewegende interne randen

In deze paragraaf kijken we naar een bewegende interne rand in een vloeistof. De bewegende rand wordt representeerd m.b.v een reeks van rechte lijnstukken. De cel die een gedeelte van de bewegende rand bevat en waarvan het centrum in de vloeistof ligt, wordt vervormd zodat de stukken die in de vaste stof liggen weggelaten worden. De geknipte cel waarvan het centrum in de vaste stof ligt wordt meegenomen door de nabijgelegen cellen. Als resultaat worden cellen met een trapezium vorm gevormd (zie figuren 5 en 6). Merk op dat de vervorming kan leiden tot de creatie van een vijf-zijdige of driehoekige cellen.
In de 'body fitted grid' methode, kan de aanwezigheid van meer bewegende randen ("Multiple moving bodies") de topologie van het rooster complexer maken. Dit in tegenstelling tot de huidige methode die met meer bewegende randen net zo goed werkt als met één bewegende rand. Deze methode is ook toepasbaar op de problemen met interne bewegende randen tussen twee vloeistoffen.
Het doel is om de massa, convectie en diffusie fluxen en drukgradiënten op de zijkanten van deze cellen te bepalen zonder dat de global tweede-orde nauwkeurigheid van de solver verloren gaat.
Voor de normale cellen kunnen de fluxen en de drukgradiënten op de zijkanten van de cellen bepaald worden, m.b.v een lineaire benadering tussen de buurcellen, met een twee-orde nauwkeurigheid. Voor de cellen met een trapezium vorm is dat niet het geval. Het probleem zit in het feit dat sommige middelpunten van de zijkanten van de trapeziumvormige cellen niet op één lijn liggen of dat de nabijgelegen cel-centers niet aan dezelfde kant staan. De oplossing aan het probleem is om een twee-dimensionale interpolatie te gebruiken, waarmee de tweede-orde nauwkeurigheid van de solver behouden wordt.
De discretisatie van de advectie-diffusie en de Poisson vergelijkingen geeft aanleiding tot een groot lineair stelsel. Om dat stelsel op te lossen is het noodzaklijke om de betreffende matrix te inverteren. De struktuur van de matrix, in het geval zonder de bewegende interne randen, lijkt op die in het geval van de aanwezigheid van de bewegende interne randen. Alleen de rijen van de matrix die corresponderen met de

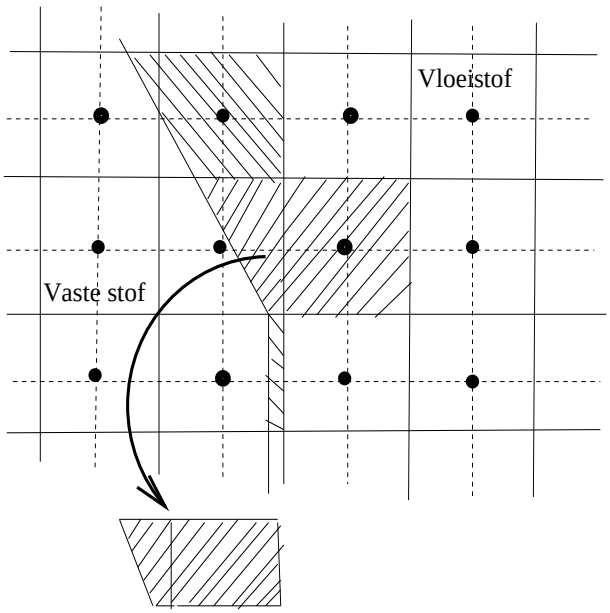


Figuur 5: Het ontstaan van de trapeziumvormige cellen wanneer de bewegende rand aan het zuiden van de centrum van de cel ligt

trapeziumvormige cellen worden anders. Er worden aan die rijen extra termen toegevoegd. Het verkregen stelsel kan m.b.v een iteratieve methode opgelost worden. Eén van de meeste gebruikte iterative methoden is de successieve-overrelaxatie methode. Het toepassen van deze methode op de gediscretiseerde Poisson vergelijking, bij aanwezigheid van de bewegende interne randen, leidt tot complicaties. Een remedie is ook het gebruik van de Krylov methoden. Ze zijn toepasbaar op algemene ijle matrices en dus voor de bewegende interne randen problemen. Een speciale methode uit deze klasse van de methoden is Bi-CGSTAB methode. Net als de geconjugeerde gradiënten methode hangt, de snelheid waarmee de Bi-CGSTAB methode convergeert sterk af van de gekozen preconditioner. Udaykumar et al hebben bewezen dat line-SOR beter is dan de Jacobi preconditioner (zie [2]). Daarom wordt in de beschreven cartesische rooster methode van de Bi-CGSTAB methode met line-SOR preconditioner gebruik gemaakt.

5 De Poiseuille stroming met vaste randen

De Poiseuille stroming is een bekend voorbeeld van een viskeuse stroming in de vloeistofdynamica. Tussen twee horizontale wanden stroomt een onsamendrukbaar fluidum met een constante dynamische viscositeit μ. Er moet langs de platen een drukgradient aanwezig zijn om de stroming in stand te houden, want er is wrijving aan de wand. De twee wanden bevinden zich op een afstand L en hebben snelheid nul. De stroming is stationair (zie figuur7).
Het is een klassiek voorbeeld om de Navier-Stokes vergelijkingen te bestuderen. Voor kleine waarden van het Reynoldsgetal is de stroming stationair en laminair en is het snelheidsprofiel parabolisch.



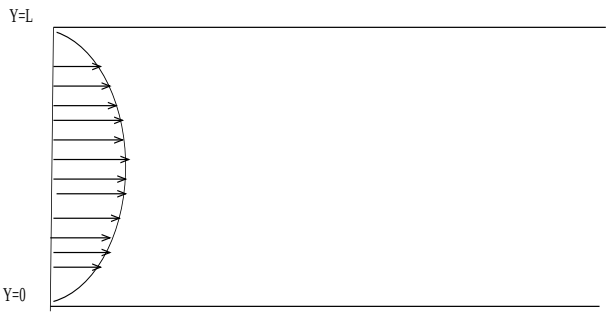
Figuur 6: Het ontstaan van de trapeziumvormige cellen wanneer de bewegende rand aan het zuiden van de centrum van de cel ligt

5.1 De analytische oplossing

De grootheden u, v en p zijn functies van x en y.
De basisvergelijkingen voor de stationaire stroming langs de wanden luiden als volgt:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \mu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}), \tag{16}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \mu(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}), \tag{17}$$



Figuur 7: Parabolisch profiel van de snelheid voor de Poiseuille stroming

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{18}$$

$$u(x,0) = 0, \tag{19}$$

$$u(x,L) = 0, \tag{20}$$

$$\begin{aligned} p(0,y) &= p^0, & (21)\\ p(D,y) &= p^1, & (22) \end{aligned}$$

waarin D de afstand in de x-richting is. Stel dat de snelheid $v(x,y)$ constant is. Omdat de snelheid aan de randen nul is volgt

$$v(x,y) = 0.$$

Gezien de continuiteitsvergelijking volgt dat :

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 0$$

en dus dat $u(x,y)$ alleen van y afhangt.
Uit de formule (17) volgt dat:

$$\frac{-1}{\rho}\frac{\partial p(x,y)}{\partial y} = 0$$

en dus dat de druk $p(x,y)$ alleen van x afhangt.
Dit invullen in de formule (16) geeft:

$$\mu\frac{d^2u(y)}{dy^2} = \frac{1}{\rho}\frac{dp(x)}{dx} = k,$$

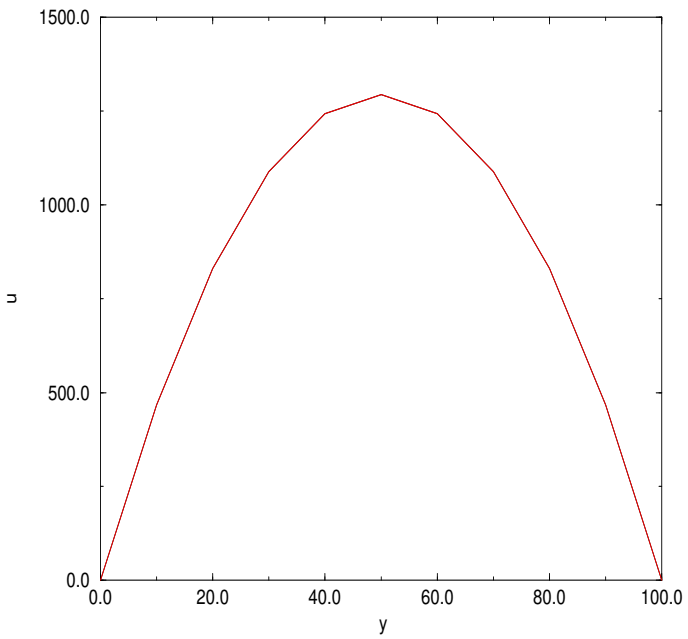
waarbij k een constante is.
Het is eenvoudig (met verwerken van de randvoorwaarden) in te zien dat:

$$u(y) = \frac{1}{2\mu}ky(y-L)$$

en

$$p(x) = p^0 + k\rho x,$$

waarbij $k = \frac{p^1 - p^0}{\rho D}$. Dit is drukval per lengteeenheid. Omdat $p^0 \geq p^1$ is k negatief. Dit wordt ook in de volgende hoofdstukken gebruikt. Voor het profiel van de analytische oplossing van de snelheid (zie figuur(8)).



Figuur 8: Het profiel van de analytische oplossing van de snelheid voor de Poiseuille stroming

5.2 De numerieke oplossing

De volgende stap is het volgende probleem numeriek op te lossen:

$$\mu \frac{d^2u(y)}{dy^2} = \frac{1}{\rho}\frac{dp(x)}{dx}, \tag{23}$$

$$u(0) = 0, \tag{24}$$

$$u(L) = 0, \tag{25}$$

Dit probleem heet Fully-Developed channel flow en om de numerieke oplossing in de tijd naar de analytische oplossing te laten convergeren, stappen we over naar het zogeheten Pseudo-transient probleem:

$$\frac{\partial u(y,t)}{\partial t} = -k + \mu \frac{\partial^2 u(y,t)}{\partial y^2}, \quad 0 \leq y \leq L, \quad 0 \leq t, \tag{26}$$

$$u(0,t) = 0, \tag{27}$$

$$u(L,t) = 0, \tag{28}$$

$$u(y,0) = 0. \tag{29}$$

Waarbij gebruik gemaakt is van het feit dat $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = k$. We gaan eerst het probleem discretiseren.

5.2.1 De expliciete methode van Euler

Voor het oplossen van probleem (26) t/m (29) voeren we een rooster in:

$$y_i = i\Delta y,$$

voor

$$i = 0, \cdots, N,$$

en

$$\Delta y = \frac{L}{N}.$$

waarbij N is het aantal lijnstukken.
Verder verdelen we het tijdsinterval $[0,T]$ in N_T intervallen met lengte Δt. Definieer $t^n = n\Delta t$ en $\hat{u}_i^n$ is de numerieke benadering van $u(u_i,t^n) = u(i\Delta y, n\Delta t)$. De tijdsintegratie met de expliciete methode van Euler geeft:

$$(\frac{\partial u(y,t^n)}{\partial t})_i \approx \frac{\hat{u}_i^{n+1} - \hat{u}_i^n}{\Delta t}. \tag{30}$$

De ruimtelijke discretisatie geeft:

$$(\frac{\partial^2 u(y,t^n)}{\partial y^2})_i \approx \frac{\hat{u}_{i-1}^n - 2\hat{u}_i^n + \hat{u}_{i+1}^n}{(\Delta y)^2}. \tag{31}$$

Neem

$$\frac{\mu\Delta t}{(\Delta y)^2} = \eta.$$

Het invullen van de formules (30) en (31) in de formule (26) geeft:

$$\hat{u}_i^{n+1} = \hat{u}_i^n - k\Delta t + \eta\hat{u}_{i-1}^n - 2\eta\hat{u}_i^n + \eta\hat{u}_{i+1}^n. \tag{32}$$

of

$$\hat{u}_i^{n+1} = -k\Delta t + \eta\hat{u}_{i-1}^n + (1-2\eta)\hat{u}_i^n + \eta\hat{u}_{i+1}^n \tag{33}$$

In matrix notatie luidt het discretisatie schema :

$$A\hat{\mathbf{u}}^{\mathbf{n}} + \mathbf{r} = \hat{\mathbf{u}}^{\mathbf{n+1}}, \tag{34}$$

waarbij

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \eta & 1-2\eta & \eta & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \eta & 1-2\eta & \eta \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{35}$$

en

$$\hat{\mathbf{u}}^{\mathbf{n+1}} = \begin{pmatrix} \hat{u}_0^{n+1} \\ \vdots \\ \hat{u}_N^{n+1} \end{pmatrix} \tag{36}$$

en

$$\hat{\mathbf{u}}^{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} \hat{u}_0^{n} \\ \vdots \\ \hat{u}_N^{n} \end{pmatrix} \tag{37}$$

en

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -k\Delta t \\ \vdots \\ -k\Delta t \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{38}$$

$$u(y,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

en

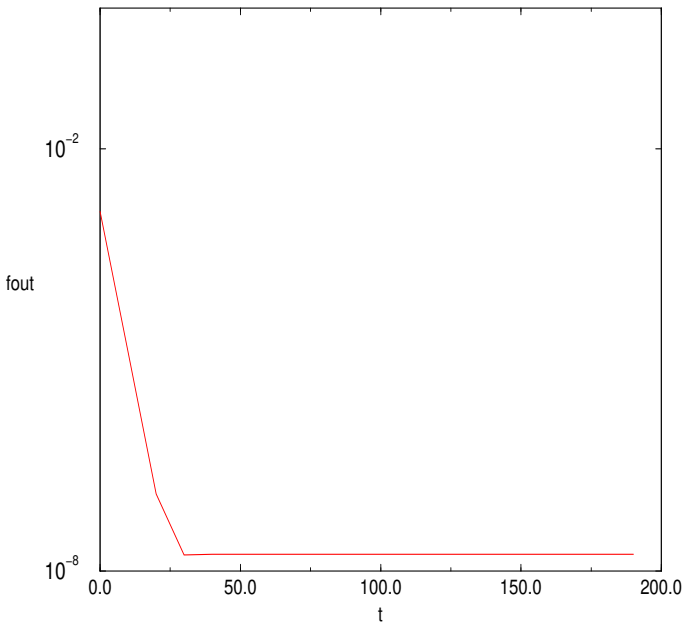
$$\hat{u}_0^{n+1} = 0 \tag{40}$$

$$\hat{u}_N^{n+1} = 0 \tag{41}$$

Voor bepaalde waarden van de parameters wordt in FORTRAN een programma geschreven. Die waarden zijn:
$\mu = 1$, $N = 10$, $\Delta t = 10$, $L = 1$, $k = -1$, $t_{begin} = 0$ en $t_{end} = 200$, waarin t_{begin} staat voor de begintijd en t_{end} voor de eindtijd. Er blijkt uit de resultaten dat de numerieke oplossing in de tijd naar de analytische oplossing convergeert (zie figuur 9).
De fout E_1 is de maximale fout:

$$E_1 = max(u_i^n - \hat{u}_i^n)$$

$$\text{voor } \; i = 0, \cdots, N.$$



Figuur 9: De fout tussen de numerieke oplossing berekend met de expliciete methode van Euler en de analytische oplossing gaat na 20 tijdstapen naar 10^{-8}

5.2.2 De impliciete methode van Euler

Als we hetzelfde probleem oplossen met de impliciete tijdsintegratie methode van Euler krijgen we:

$$\hat{u}_i^{n+1}(1+2\eta) = \hat{u}_i^n + \eta\hat{u}_{i-1}^{n+1} + \eta\hat{u}_{i+1}^{n+1} - k\Delta t, \qquad (42)$$
$$\text{voor } \; i = 1, \cdots, N-1,$$

of

$$\hat{u}_i^{n+1}(1+2\eta) - \eta\hat{u}_{i-1}^{n+1} + \eta\hat{u}_{i+1}^{n+1} = \hat{u}_i^n - k\Delta t, \qquad (43)$$

en

$$\hat{u}_0^n = 0, \qquad (44)$$

$$\hat{u}_N^n = 0. \qquad (45)$$

Het discretisatie schema in matrixvorm wordt:

$$A\hat{\mathbf{u}}^{\mathbf{n+1}} = \hat{\mathbf{u}}^{\mathbf{n}} + \mathbf{r}, \qquad (46)$$

waarbij

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\eta & 1+2\eta & -\eta & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -\eta & 1+2\eta & -\eta \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (47)$$

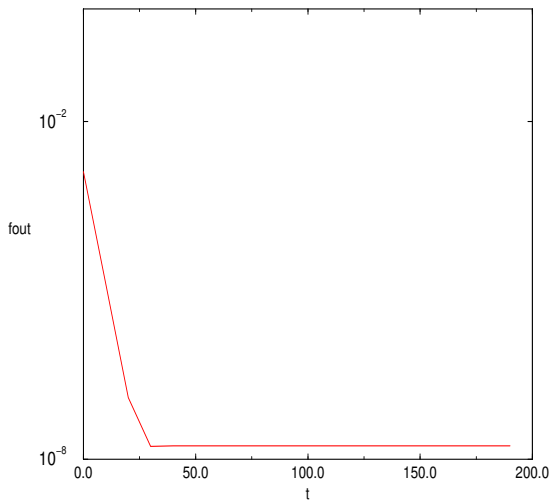
Formules 36 tot en met 41 blijven ook in dit geval geldig.
Na oplossen van het lineaire stelsel krijgen we $\hat{\mathbf{u}}^{n+1}$. Analoog aan het geval waar de expliciete methode van Euler gebruikt wordt, is een programma in FORTRAN geschreven met dezelfde waarden van de parameters als het vorige geval. Er blijkt dat de numerieke oplossing in de tijd naar de analytische oplossing convergeert(zie figuur 10).

6 De Poiseuille stroming met bewegende randen

6.1 De analytische oplossing

In dit geval beweegt de bovenste plaat met een snelheid u_{top} in de x-richting en de onderste plaat beweegt met een snelheid u_{bodem} in de x-richting.
De formules (16) t/m (18) blijven ook in dit geval geldig, alleen de formules (19) en (20) worden vervangen door:

$$u(x,0) = u_{bodem}, \qquad (48)$$
$$u(x,L) = u_{top}, \qquad (49)$$
$$(50)$$



Figuur 10: De fout tussen de impliciete oplossing berekend met de impliciete methode van Euler en de analytische oplossing gaat na 20 tijdstapen naar 10^{-8}

$$u(x,y,0) = \begin{pmatrix} u_{bodem} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_{top} \end{pmatrix}.$$

Analoog aan het geval waar de randen stil staan (zie formule (23)) hebben we met de volgende formule te maken:

$$\mu \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = k.$$

Na verwerken van de randvoorwaarden komen we tot de volgende uitdruking :

$$u(y) = \frac{k}{2\mu}y^2 + Cy + u_{bodem}.$$

waarin

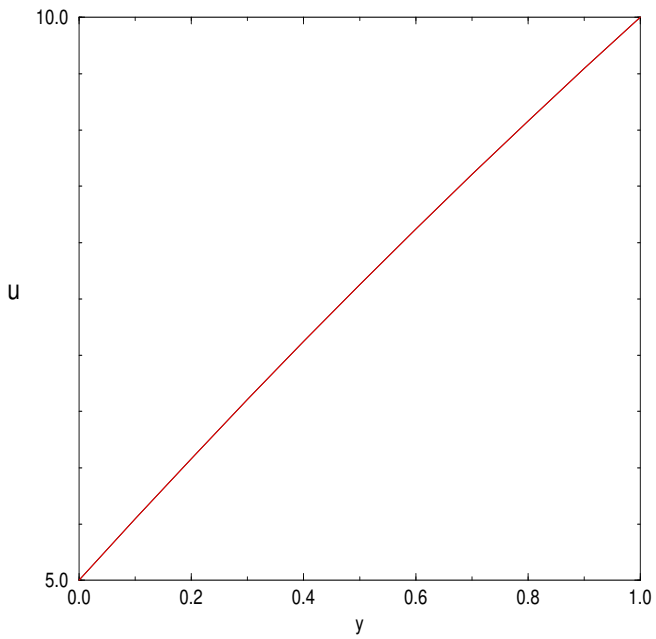
$$C = \frac{u_{top} - u_{bodem}}{L} - \frac{k}{2\mu}.$$

Dit is de analytische oplossing voor de snelheid.
De druk wordt gegeven door:

$$p = p_0 + k\rho x,$$

waarbij $k = \frac{p^1 - p^0}{\rho D}$ Voor $k = -1$,$u_{bodem} = 5$ en $u_{top} = 10$ het profiel van de analytische snelheid is lineair (zie figuur 11).

Voor $k = -20$,$u_{bodem} = 5$ en $u_{top} = 10$ het profiel van de analytische snelheid is



Figuur 11: De analytische snelheid voor het bewegend rand probleem voor $k = -1$

parabolisch (zie figuur 12).

6.2 De numerieke oplossing

6.2.1 De expliciete methode van Euler

De formules (30) t/m (39) zijn ook in dit geval geldig. Alleen (40) en (41) worden vervangen door:

$$\hat{u}_0^{n+1} = u_{bodem}, \tag{51}$$

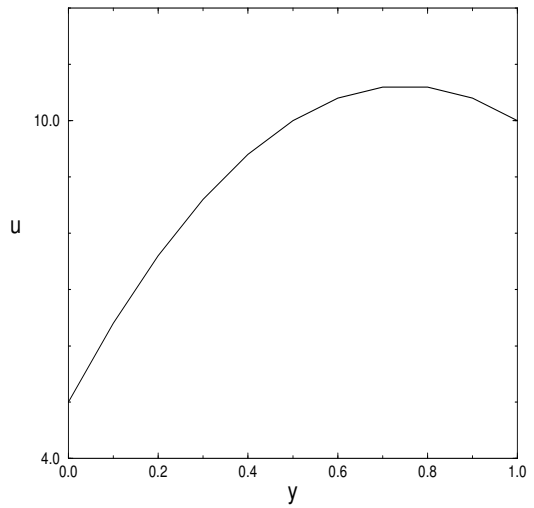
$$\hat{u}_N^{n+1} = u_{top}. \tag{52}$$

We nemen nu $u_{bodem} = 5$ en $u_{top} = 10$. Voor de andere parameters maken we gebruik van dezelfde waarden als in de vorige gevallen. Er blijkt ook in dit geval dat de numerieke oplossing na 20 tijdstappen naar de analytische oplossing convergeert (zie figuur 13).

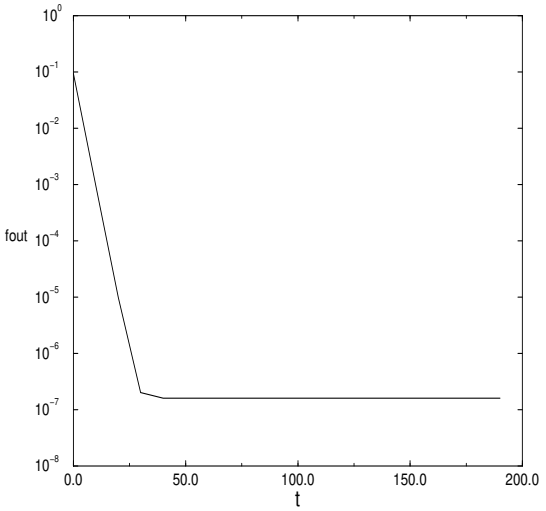
6.2.2 De impliciete methode van Euler

De formules (42),(43), (46) en (47) blijven ook in dit geval geldig . Alleen de formules (44) en (45) en worden vervangen door de volgende formules:

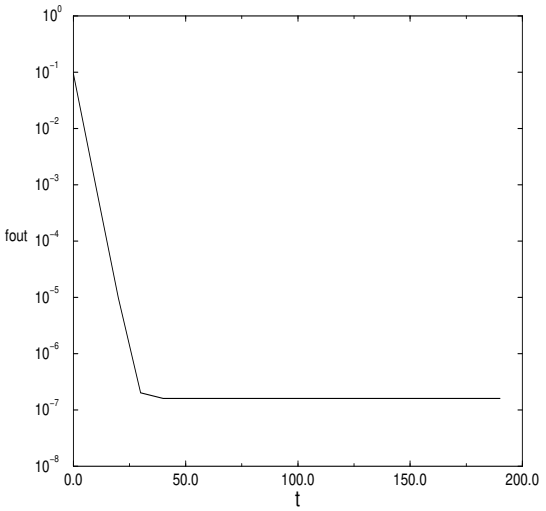
$$\hat{u}_0^n = u_{bodem}, \tag{53}$$



Figuur 12: De analytische snelheid voor het bewegend rand probleem $k = -20$



Figuur 13: Het gedrag van de fout in het geval van de expliciete methode van Euler en bewegende randen



Figuur 14: Het verloop van de foutin het geval van de impliciete methode van Euler en bewegende randen

$$\hat{u}_N^n = u_{top}, \tag{54}$$

Ook hier is een programma in Fortran geschreven en er blijkt daaruit dat de numerieke oplossing in de tijd naar de analytische oplossing nadert(zie figuur 14) .

7 Niet-Newtonse reologie

Tot nu toe waren wij bezig binnen het kader van Newtonse fluida. Voor niet-Newtonse fluida, wordt het verband tussen de spanningstensor en snelheid vastgelegd door een stelsel van partiële differentiaal vergelijkingen. Voor verschillende soorten van fluida zijn modellen bekend. We zullen ons beperken tot Power Law model. In dit model is de viscositeit afhankelijk van de afgeleide van de snelheid.

7.1 Poiseuille stroming met vaste randen

Analoog aan paragraaf 4.1 gaan we, in het geval van niet-Newtonse fluida, proberen de analytische en de numerieke oplossing van de snelheid te bepalen en ze te vergelijken. Eerst bepalen we de analytische oplossing van de snelheid.

7.1.1 De analytische oplossing

In deze paragraaf kijken we naar het geval waar de viscositeit niet constante is.
We gaan uit van de volgende formule:

$$\frac{d(\mu\frac{du}{dy})}{dy} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = k, \tag{55}$$

waarin

$$\mu = C|\frac{du}{dy}|^{e-1} \text{ (De power wet)}, \tag{56}$$

$$\text{en} \quad k = \frac{p^1 - p^0}{\rho D}. \tag{57}$$

C en e zijn positieve constanten. In principe mag de parameter e elke positieve waarde aannemen, maar ons interesse gaat uit naar de waarden die tussen 0 en 1 liggen.
Neem

$$C_1 = \frac{k}{C}. \tag{58}$$

We kunnen twee gebieden onderscheiden:

$$0 \leq y \leq \frac{L}{2} \text{ en } \frac{L}{2} \leq y \leq L. \tag{59}$$

Gebied 1: $0 \leq y \leq \frac{L}{2}$.
Gezien het parabolisch verloop van de analytische oplossing van de snelheid voor het Newtonse geval nemen we aan dat $\frac{du}{dy} \geq 0$ op $0 \leq y \leq \frac{L}{2}$ geldt
We zullen dit na afloop controleren. Het invullen van de formules (56) en (58) in (55) geeft:

$$\frac{d(\frac{du}{dy})^e}{dy} = C_1. \tag{60}$$

De algemene vorm van de oplossing luidt :

$$u(y) = \frac{e}{C_1(e+1)}[(C_1 y + C_2)^{1+\frac{1}{e}}] + C_3, \tag{61}$$

waarbij C_2 en C_3 constanten zijn die met de randvoorwaarden te bepalen zijn. Uit de aanname dat:

$$\frac{du}{dy}(\frac{L}{2}) = 0, \tag{62}$$

volgt dat:

$$C_2 = -\frac{C_1 L}{2}.$$

We hebben aangenomen dat $u(0) = 0$ en daaruit volgt dat:

$$C_3 = -\frac{e}{C_1(e+1)}[(C_2)^{1+\frac{1}{e}}].$$

Het invullen van C_2 en C_3 in de algemene vorm van de oplossing (61) geeft:

$$u(y) = \frac{e}{C_1(e+1)}[(C_1y + C_2)^{1+\frac{1}{e}} - (C_2)^{1+\frac{1}{e}}]. \tag{63}$$

Het differentiëren van formule (63) geeft:

$$\frac{du}{dy} = (C_1y - \frac{C_1L}{2})^{\frac{1}{e}}. \tag{64}$$

Omdat C_1 negatief is (immers $C_1 = \frac{k}{C}$ en $k \leq 0$ en $y \leq \frac{L}{2}$) volgt dat de aanname over het teken van de afgeleide van u klopt.

Gebied 2: $\frac{L}{2} \leq y \leq L$
We nemen nu aan dat $\frac{du}{dy} \leq 0$ op $\frac{L}{2} \leq y \leq L$
We zullen dit na afloop controleren. In dit geval wordt formule (56) wordt:

$$\mu = C(-\frac{du}{dy})^{e-1}. \tag{65}$$

neem $v = -u$ dan formule wordt (65) :

$$\mu = C(\frac{dv}{dy})^{e-1}. \tag{66}$$

Het invullen van de formule (66) in de formule (55) geeft:

$$\frac{d(\frac{dv}{dy})^e}{dy} = \bar{C}_1, \tag{67}$$

waarin

$$\bar{C}_1 = -\frac{k}{C}.$$

De algemene vorm van de oplossing luidt:

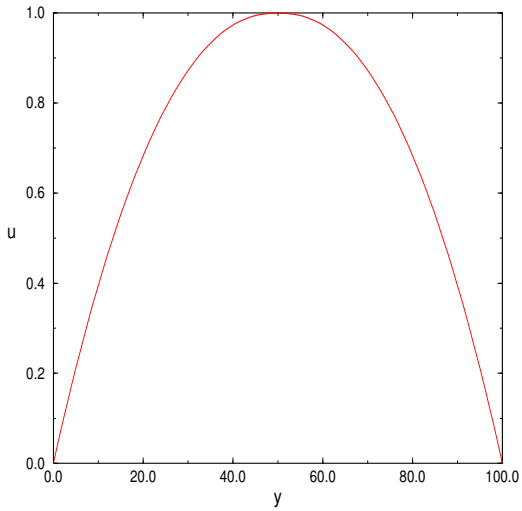
$$v(y) = \frac{e}{\bar{C}_1(e+1)}[(\bar{C}_1y + \bar{C}_2)^{1+\frac{1}{e}}] + \bar{C}_3. \tag{68}$$

waarbij $\bar{C}_2$ en $\bar{C}_3$ zijn constanten die met de randvoorwaaarden te bepalen zijn:

$$\frac{dv}{dy}(\frac{L}{2}) = 0. \tag{69}$$

Hieruit volgt dat:

$$\bar{C}_2 = -\frac{\bar{C}_1L}{2}. \tag{70}$$



Figuur 15: Het profiel van de analytische snelheid voor $e = 0.8$

Gegeven is

$$v(L) = 0.$$

Hieruit volgt dat

$$\bar{C}_3 = -\frac{e}{\bar{C}_1(e+1)}[(\bar{C}_1 L + \bar{C}_2)^{1+\frac{1}{e}}]. \tag{71}$$

Het invullen van formules (70) en (71) in formule (68) levert:

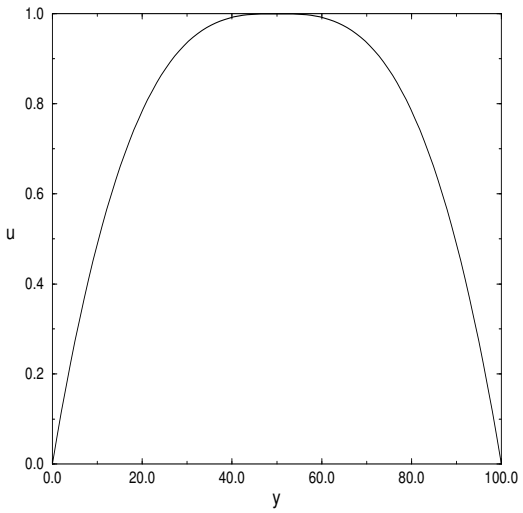
$$u(y) = -\frac{e}{\bar{C}_1(e+1)}[(\bar{C}_1(y - \frac{L}{2}))^{1+\frac{1}{e}} - (\bar{C}_1\frac{L}{2})^{1+\frac{1}{e}}], \tag{72}$$

Analoog kan ook nagegaan worden dat de aanname klopt en dat beide analytische oplossingen dezelfde waarde op $\frac{L}{2}$ hebben (daarmee is de continuiteit gegarandeerd). In beide gevallen is nagegaan dat de twee aananmes, die over het teken van de snelheid zijn gemaakt, kloppen. De volgende stap is om het analytische resultaat numeriek te gaan controleren.
Om een beeld te krijgen over het profiel van de analytische snelheid zie figuren (15) t/m (17).

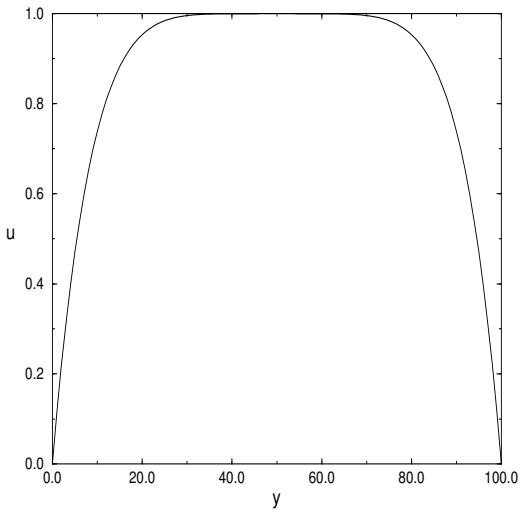
7.1.2 De numerieke oplossing

Eerst gebruiken we de expliciete methode van Euler als de numerieke tijdsintegratie methode.

De expliciete methode van Euler



Figuur 16: Het profiel van de analytische snelheid voor $e = 0.5$



Figuur 17: Het profiel van de analytische snelheid voor $e = 0.2$

We gaan uit van de volgende vergelijkingen:

$$\frac{\partial u(y,t)}{\partial t} = -k + \frac{\partial(\mu \frac{\partial u(y,t)}{\partial y})}{\partial y}, \tag{73}$$

$$u(0,t) = 0, \tag{74}$$

$$u(L,t) = 0, \tag{75}$$

$$u(y,0) = 0, \tag{76}$$

Na het toepassen van de tijd en ruimtelijke discretisatie krijgen we: Neem

$$\beta = \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_i^{n+1} &= -k\Delta t + \beta[\mu_{i-\frac{1}{2}}\hat{u}_{i-1}^n + \\ &\quad (\frac{1}{\beta} - (\mu_{i-\frac{1}{2}} + \mu_{i+\frac{1}{2}}))\hat{u}_i^n + \\ &\quad +\mu_{i+\frac{1}{2}}\hat{u}_{i+1}^n] \end{aligned} \tag{77}$$

waarbij

$$\mu_{i-\frac{1}{2}} = C(|\frac{\partial u(y,t)}{\partial y}|)^{e-1}|_{i-\frac{1}{2}} \tag{78}$$

en

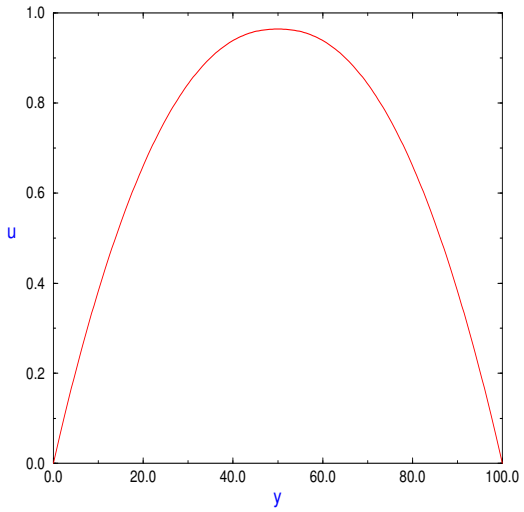
$$\mu_{i+\frac{1}{2}} = C(|\frac{\partial u(y,t)}{\partial y}|)^{e-1}|_{i+\frac{1}{2}}. \tag{79}$$

Het discretisatie schema in matrixvorm wordt:

$$A\hat{\mathbf{u}}^{\mathbf{n+1}} = \hat{\mathbf{u}}^{\mathbf{n}} + \mathbf{r}, \tag{80}$$

waarbij

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\beta\mu_{i-\frac{1}{2}} & 1+\beta(\mu_{i-\frac{1}{2}}+\mu_{i+\frac{1}{2}}) & -\beta\mu_{i+\frac{1}{2}} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -\beta\mu_{i-\frac{1}{2}} & 1+\beta(\mu_{i-\frac{1}{2}}+\mu_{i+\frac{1}{2}}) & -\beta\mu_{i+\frac{1}{2}} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{81}$$



Figuur 18: Het profiel van de numerieke snelheid voor $e = 0.8$ na 200000 stappen

en

$$\hat{\mathbf{u}}^{\mathbf{n+1}} = \begin{pmatrix} \hat{u}_0^{n+1} \\ \vdots \\ \hat{u}_N^{n+1} \end{pmatrix} \tag{82}$$

en

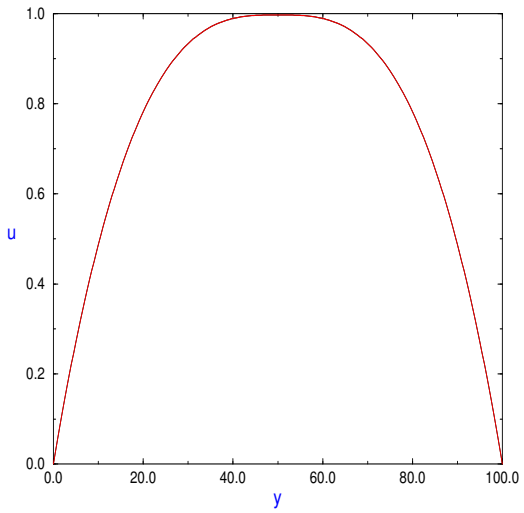
$$\hat{\mathbf{u}}^{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} \hat{u}_0^{n} \\ \vdots \\ \hat{u}_N^{n} \end{pmatrix} \tag{83}$$

en

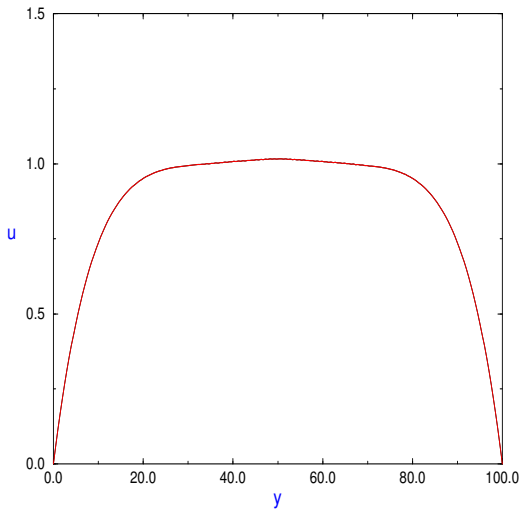
$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -k\Delta t \\ \vdots \\ -k\Delta t \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{84}$$

Voor de volgende waarden van de parameters is in Fortran een programma geschreven: $N = 200$, $Dt = 0.01$, $L = 100$, $u(\frac{L}{2}) = 1$, $t_{begin} = 0$, $t_{end} = 20000$, $u_{bodem} = 0$, $u_{top} = 0$, $C = 1$.
Om een idee te krijgen van de invloed die e heeft op het profiel van de numerieke snelheid, gaan we de waarden van e variëren(zie figuur 18 t/m 20).

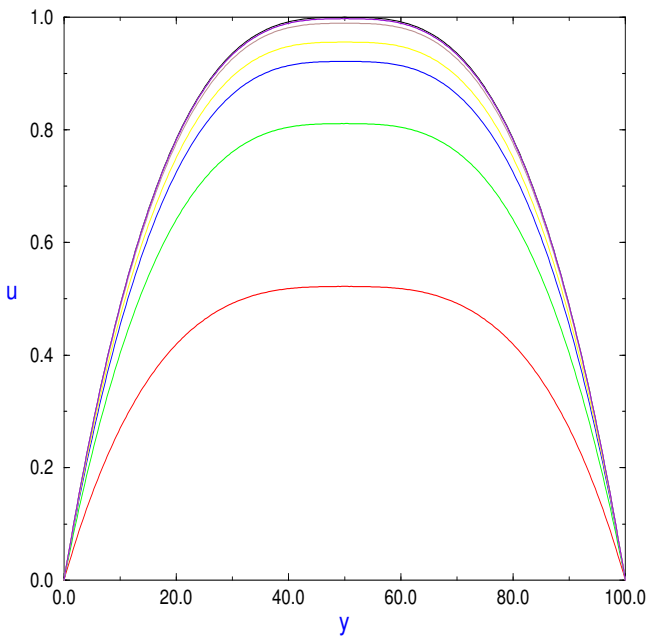
Merk op dat naarmate e naar nul nadert hoe meer het profiel van de numerieke snelheid vlakker wordt. Als e naar 1 gaat krijgen we het parabolische profiel van de



Figuur 19: Het profiel van de numerieke snelheid voor $e = 0.5$ na 200000 stappen



Figuur 20: Het profiel van de numerieke snelheid voor $e = 0.2$ na 200000 stappen



Figuur 21: De numerieke snelheid stijgt in de loop van de tijd naar de analytische snelheid voor $e = 0.5$

snelheid voor een constante viscositeit terug.
Om een idee te hebben over de fout tussen de analytische oplossing en de numerieke oplossing zie figuren (22) t/m (23).

Er blijkt uit de figuur (22) t/m (24) dat inderdaad de fout tussen de analytische en de numerieke snelheid klein wordt.
In de figuur (25) is te zien hoe variëert de fout E1 als functie van de het aantal roosterpunten voor veschillende waarden van e.

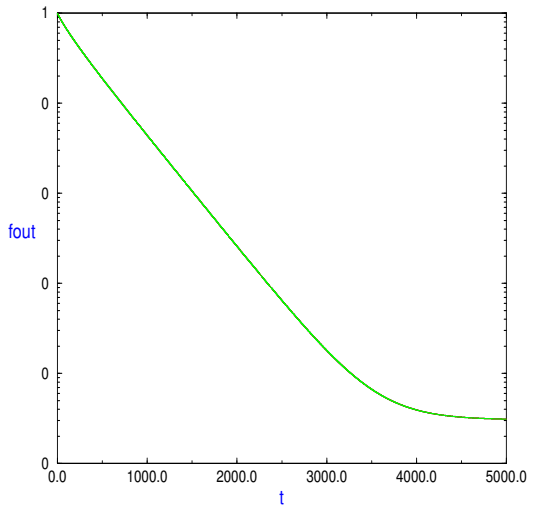
De impliciete methode van Euler

Formules (44) tot en met (46) blijven geldig. Formule (43) wordt vervangen door de volgende formule:

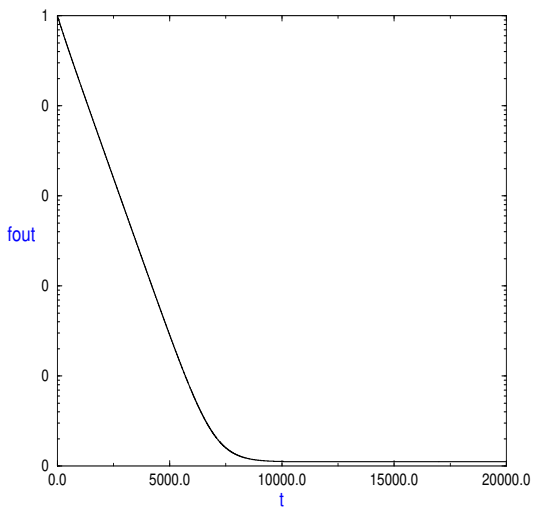
$$\hat{u}_i^{n+1}(1+\beta(\mu_{i-\frac{1}{2}}+\mu_{i+\frac{1}{2}}))-\beta\mu_{i-\frac{1}{2}}\hat{u}_{i-1}^{n+1}+\beta\mu_{i+\frac{1}{2}}\hat{u}_{i+1}^{n+1}=\hat{u}_i^n-k\Delta t, \tag{85}$$

$$\text{voor } \; i=1,\cdots,N-1, \tag{86}$$

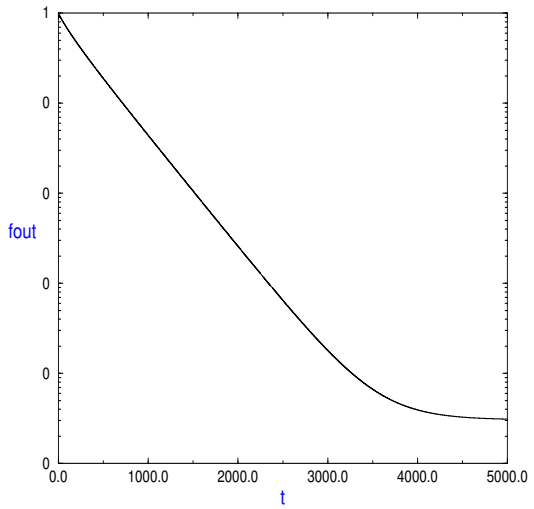
formule (47) wordt vervangen door de volgende formule :



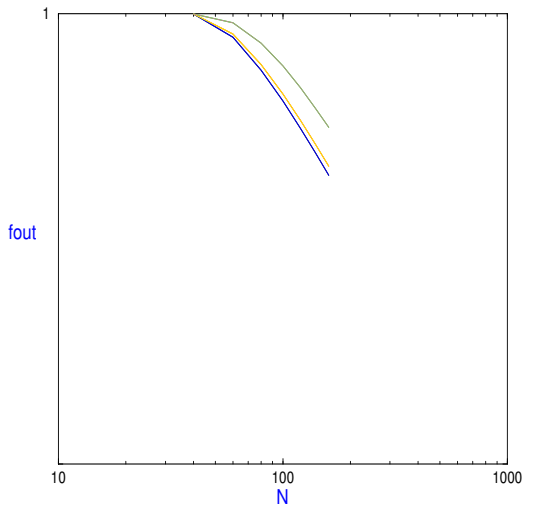
Figuur 22: De fout E1 tussen de numerieke oplossing berekend met de expliciete methode van Euler en de analytische oplossing voor $e = 0.9$



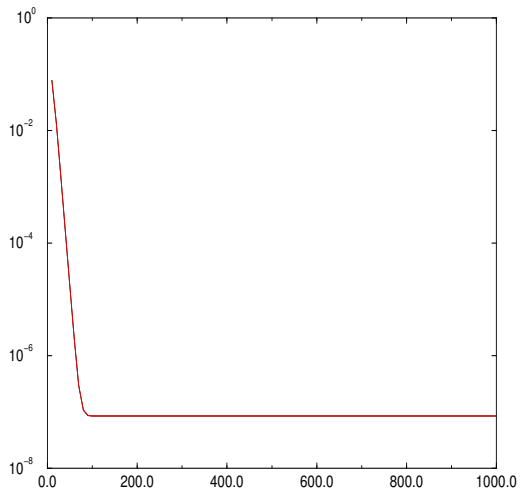
Figuur 23: De fout tussen de numerieke oplossing berekend met de expliciete methode van Euler en de analytische oplossing voor $e = 0.8$



Figuur 24: Het gedrag van de fout tussen de analytische en de numerieke snelheid voor $e = 0.5$



Figuur 25: Het gedrag van de fout tussen de analytische en de numerieke snelheid met stille randen als functie van het aantal roosterpunten voor $e = 0.9$, $e = 0.8$ en $e = 0.5$



Figuur 26: De fout E1 tussen de numerieke oplossing berekend met de impliciete methode van Euler en de analytische oplossing voor $e = 0.9$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\beta\mu_{i-\frac{1}{2}} & 1+\beta(\mu_{i-\frac{1}{2}}+\mu_{i+\frac{1}{2}}) & -\beta\mu_{i+\frac{1}{2}} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -\beta\mu_{i-\frac{1}{2}} & 1+\beta(\mu_{i-\frac{1}{2}}+\mu_{i+\frac{1}{2}}) & -\beta\mu_{i+\frac{1}{2}} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{87}$$

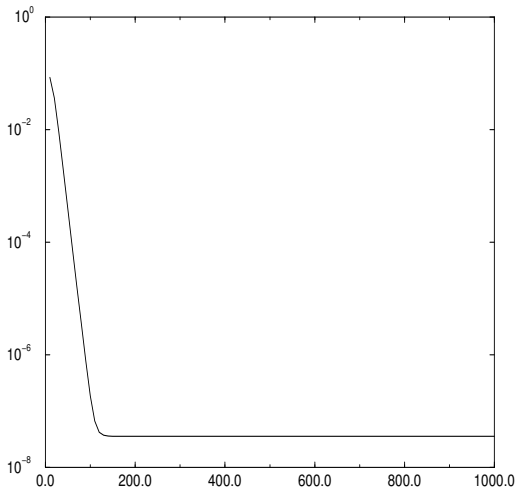
waarbij $\mu_{i-\frac{1}{2}}$ respectivelijk $\mu_{i+\frac{1}{2}}$ voldoen aan (78) respectivelijk (79). Om een idee te krijgen van het profiel van de fout zie figuren : Er blijkt uit de figuur (26) t/m (28) dat inderdaad de fout tussen de analytische en de numerieke snelheid klein wordt.

7.2 Poiseuille stroming met bewegende randen

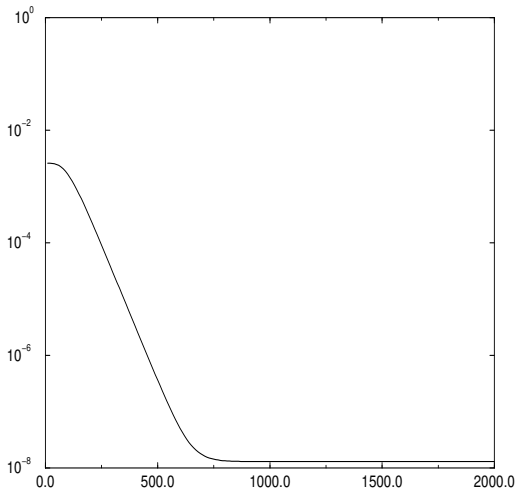
7.2.1 De analytische oplossing van de snelheid

We nemen aan de onderste plaat stil staat en de bovenste plaat met een snelheid U_{top} beweegt. We nemen aan dat op $y = y^\star$ de snelheid u zijn maximum aanneemt.
In deze paragraaf komen twee analytische methoden aan de orde om tot de analytische oplossing te komen .

De eerste methode
De formules (55) t/m (58) blijven ook in dit geval geldig .



Figuur 27: De fout tussen de numerieke oplossing berekend met de impliciete methode van Euler en de analytische oplossing voor $e = 0.8$



Figuur 28: De fout tussen de numerieke oplossing berekend met de impliciete methode van Euler en de analytische oplossing voor $e = 0.2$

We kunnen twee gevallen onderscheiden:
Geval I: $u(y)$ heeft geen intern maximum.
Geval II: $u(y)$ heeft een intern maximum.
Geval I: We nemen aan dat $U_{top} \geq 0$ en dus analoog aan het geval I op het gebied 1 van de paragraaf 7.1.1(dus in het geval van vaste randen), we krijgen met de volgende formule te maken :

$$u(y) = \frac{e}{C_1(e+1)}[(C_1 y + C_2)^{1+\frac{1}{e}} - (C_2)^{1+\frac{1}{e}}], \tag{88}$$

waarbij C_2 een constante is, die bepaald moet worden aan de hand van de randvoorwaarden:

$$u(L) = U_{top}. \tag{89}$$

Het invullen van formule (89) in formule (88) levert:

$$U_{top} = \frac{e}{C_1(e+1)}[(C_1 L + C_2)^{1+\frac{1}{e}} - (C_2)^{1+\frac{1}{e}}]. \tag{90}$$

De constante C_1 voldoet aan de volgende vergelijking:

$$C_1 = \frac{k}{C}. \tag{91}$$

De iteratieve methode van Newton-Raphson toegepast om de constante C_2 te bepalen. Gegeven een startwaarde x_0, het iteratie proces luidt dan :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{(\frac{df}{dx})(x_k)}. \tag{92}$$

In dit geval wordt de functie f gegeven door :

$$f(C_2) = (C_1 L + C_2)^{1+\frac{1}{e}} - (C_2)^{1+\frac{1}{e}} - U_{top} C_1 (\frac{e+1}{e}) \tag{93}$$

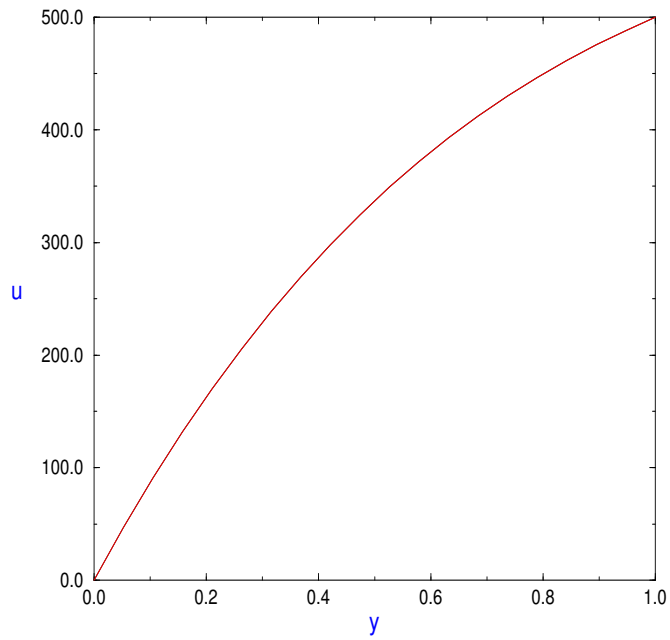
en zijn afgeleide is gelijk aan:

$$\acute{f}(C_2) = (\frac{e+1}{e})[(C_1 L + C_2)^{\frac{1}{e}} - (C_2)^{\frac{1}{e}}].$$

In figuur 29 is het profiel van de analytische snelheid te zien voor het geval $e = 0.2$.

Geval II: $u(y)$ heeft een intern maximum. Analoog aan de vorige paragraaf kunnen we ook hier twee gebieden onderscheiden:

$$0 \leq y \leq y^\star \text{ en } y^\star \leq y \leq L. \tag{94}$$



Figuur 29: Het verloop van de analytische snelheid voor $e = 0.2$

Gebied 1: $0 \leq y \leq y^\star$
We nemen aan dat $\frac{du}{dy} \geq 0$ op $0 \leq y \leq y^\star$ geldt.
De formule voor de snelheid lijkt op formule (**??**) namelijk:

$$u(y) = \frac{e}{C_1(e+1)}[(C_1 y + C_2)^{1+\frac{1}{e}} - (C_2)^{1+\frac{1}{e}}] \tag{95}$$

waarin

$$C_2 = -C_1 y^\star. \tag{96}$$

Analoog aan het vorige paragraaf kan ook hier nagegaan worden dat de aanname klopt.

Gebied 2: $y^\star \leq y \leq L$
We nemen nu aan dat $\frac{du}{dy} \leq 0$ op $y^\star \leq y \leq L$
op analoge wijze aan de vorige paragraaf wordt de volgende formule verkregen:

$$u(y) = -\frac{e}{\bar{C}_1(e+1)}[(\bar{C}_1(y - y^\star))^{1+\frac{1}{e}} - (\bar{C}_1(L - y^\star))^{1+\frac{1}{e}}] + U_{top}. \tag{97}$$

Om $y^\star$ te bepalen gaan we de continuiteit van de snelheid u op $y = y^\star$ opschrijven. De combinatie van de formules (95) en (97) op $y = y^\star$ levert na een vereenvoudiging:

$$-(\bar{C}_1(L-y^\star))^{1+\frac{1}{e}} - U_{top}\bar{C}_1\frac{e+1}{e} = -(C_2)^{1+\frac{1}{e}} \tag{98}$$

of

$$(-C_1(L-y^\star))^{1+\frac{1}{e}} - U_{top}C_1\frac{e+1}{e} = (-C_1y^\star)^{1+\frac{1}{e}}. \tag{99}$$

Stel dat :

$$f(y^\star) = -(-C_1(L-y^\star))^{1+\frac{1}{e}} + U_{top}C_1\frac{e+1}{e} + (-C_1y^\star)^{1+\frac{1}{e}}, \tag{100}$$

dan wordt de afgeleide van $f(y^\star)$:

$$\frac{df}{dy^\star} = -C_1\frac{e+1}{e}[(-C_1(L-y^\star))^{1+\frac{1}{e}} + (-C_1y^\star)^{\frac{1}{e}}]. \tag{101}$$

Na het toepassen van de iteratieve methode van Newton-Raphson op f wordt dan $y^\star$ verkregen.
De volgende stap is om een andere methode te gebruiken om aan de expliciete vorm van de snelheid te komen.

De tweede methode

We gaan uit van de volgende vergelijking (zie [8] pg 218):

$$\frac{d}{dy}(\mu\frac{du(y)}{dy}) = \frac{1}{\rho}\frac{dp(x)}{dx} = k \tag{102}$$

$$\text{waarbij} \quad k = \frac{p^1 - p^0}{\rho D}. \tag{103}$$

De formules (102) en (103) impliceren dat:

$$\mu\frac{du(y)}{dy} = (\frac{p^0 - p^1}{\rho D})L(\lambda - \xi). \tag{104}$$

Waarbij λ een constante die bepaald moet worden en $\xi = \frac{y}{L}$.
De variable μ voldoet aan de formule (56).
We kunnen twee gevallen onderscheiden:
Geval I: de snelheid $u(y)$ heeft geen intern maximum.
Geval II: de snelheid $u(y)$ heeft een intern maximum.
Geval I:$\mu = C\frac{du}{dy}^{e-1}$
Dit invullen in de formule (104) geeft:

$$(\frac{du}{dy})^e = (\frac{p^0 - p^1}{C\rho D})L(\lambda - \xi). \tag{105}$$

Neem

$$s = \frac{1}{e}$$

en

$$\alpha = (\frac{p^0 - p^1}{C\rho D})L$$

Het integreren van formule (105) geeft:

$$u(y) = \alpha^s(-L)(\frac{1}{s+1})(\lambda - \xi)^{1+s} + C_1 \tag{106}$$

Nu gaan we de randvoorwaarden verwerken:
Ten eerste: $u(0) = 0$, dit invullen in de formule (106) geeft:

$$C_1 = \alpha^s L(\frac{1}{s+1})(\lambda)^{1+s} \tag{107}$$

het invullen van de formule (107) in de formule (106) geeft:

$$u(y) = \alpha^s L(\frac{1}{s+1})[(\lambda)^{1+s} - (\lambda - \xi)^{1+s}] \tag{108}$$

Ten tweede : $u(L) = U_{top}$, dit invullen in de formule (106) geeft:

$$\alpha^s(-L)(\frac{1}{s+1})(\lambda - 1)^{1+s} + C_1 = U_{top} \tag{109}$$

De combinatie van de formule (107) en de laatste formule levert:

$$\alpha^s L(\frac{1}{s+1})[(\lambda)^{1+s} - (\lambda - 1)^{1+s}] = U_{top} \tag{110}$$

de combinatie van formule (108) en formule (110) geeft:

$$\frac{u(y)}{U_{top}} = \frac{[(\lambda)^{1+s} - (\lambda - \xi)^{1+s}]}{[(\lambda)^{1+s} - (\lambda - 1)^{1+s}]} \tag{111}$$

Uit de formule (110) volgt dat :

$$\alpha(\frac{L}{U_{top}})^{\frac{1}{s}} = [\frac{s+1}{(\lambda)^{1+s} - (\lambda - 1)^{1+s}}]^{\frac{1}{s}} \tag{112}$$

Neem

$$\Lambda = \alpha(\frac{L}{U_{top}})^{\frac{1}{s}}$$

de formule (112) wordt:

$$\Lambda = [\frac{s+1}{(\lambda)^{1+s} - (\lambda - 1)^{1+s}}]^{\frac{1}{s}} \tag{113}$$

Om geen intern maximum te hebben is het vereist dat Λ voldoet aan de volgende beperking:

$$\Lambda \leq (s+1)^{\frac{1}{s}} \tag{114}$$

De methode van Newton kan op formule (112) toegepast worden om λ te bepalen en daarmee de gezochte snelheid.
Het is nagegaan dat formule (111) aan formule (105) voldoet.
Geval II: Analoog aan het eerste geval worden de volgende formules gevonden: i.p.v de formule (111) komt de formule (zie [8] pg 189) :

$$\frac{u(y)}{U_{top}} = \frac{[(\lambda)^{1+s} - (\lambda - \xi)^{1+s}]}{[(\lambda)^{1+s} - (1 - \lambda)^{1+s}]} \tag{115}$$

de formule (114) wordt vervangen door:

$$\Lambda \geq (s+1)^{\frac{1}{s}} \tag{116}$$

de formule (113) wordt vervangen door:

$$\Lambda = [\frac{s+1}{(\lambda)^{1+s} - (1 - \lambda)^{1+s}}]^{\frac{1}{s}} \tag{117}$$

Ook in dit geval het is nagegaan dat formule (111) aan formule (105) voldoet. Door gebruik te maken van de twee methoden, wordt in beide gevallen dezelfde analytische snelheid verkregen.

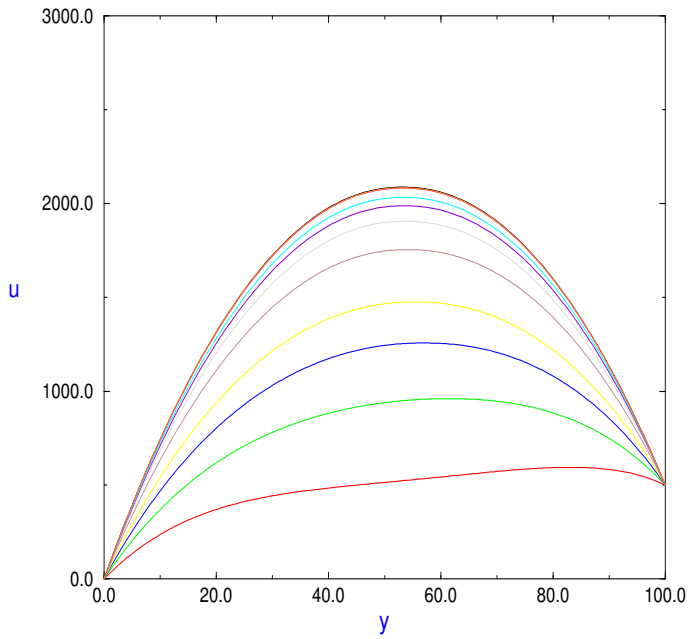
7.2.2 De numerieke oplossing van de snelheid

De expliciete methode van Euler

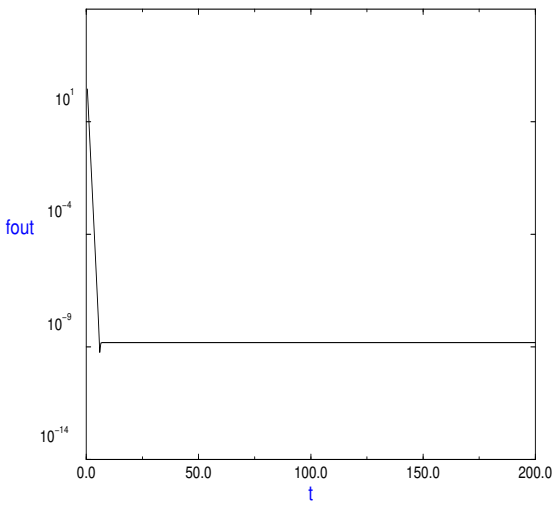
Analoog aan de paragraaf 7.1.2 de formules (73), (74) en (76)t/m(79) blijven geldig, alleen de formule (75) wordt vervangen door de volgende formule:

$$u(L,t) = U_{top}. \tag{118}$$

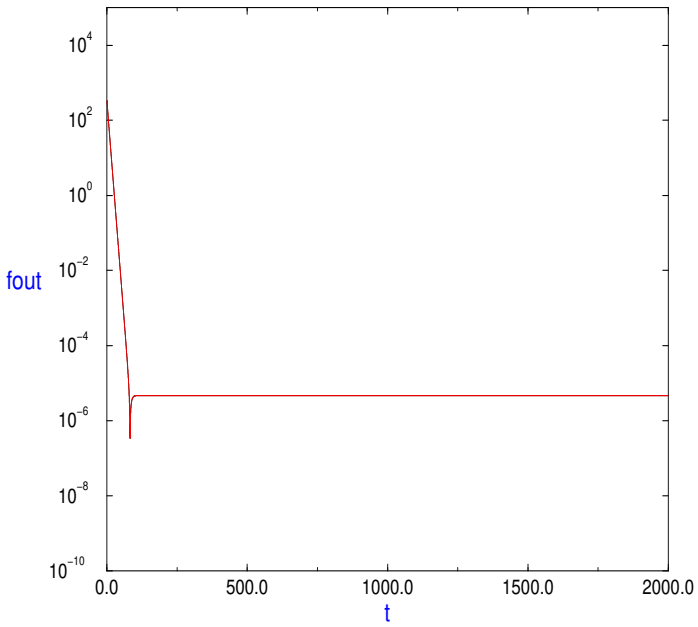
Om een idee te hebben over de fout tussen de analytische oplossing en de numerieke oplossing zie figuren (31 t/m 32).



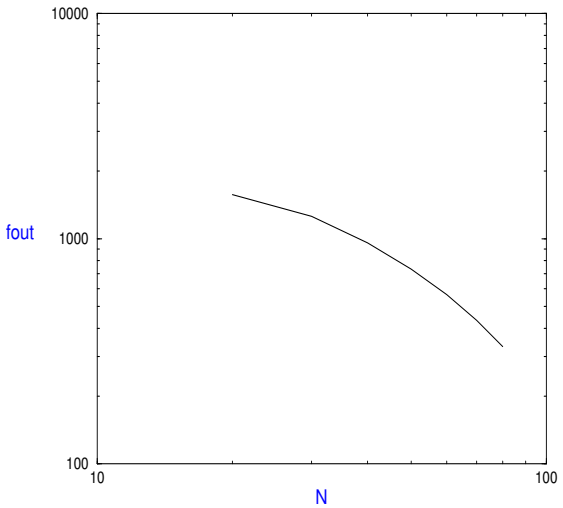
Figuur 30: De numerieke snelheid stijgt in de loop van de tijd naar de analytische snelheid voor $e = 0.9$



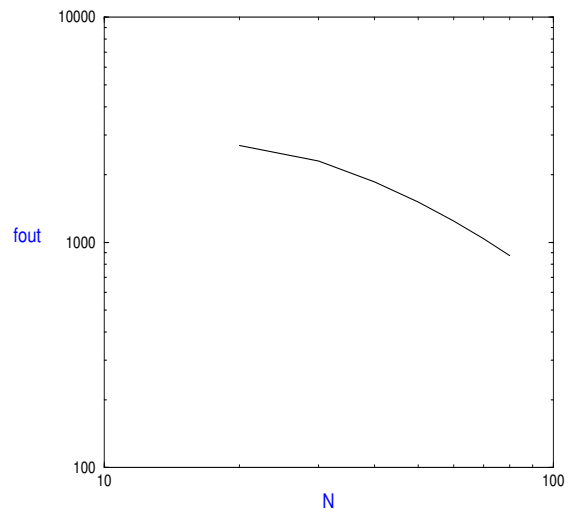
Figuur 31: Het gedrag van de fout tussen de analytische en de numerieke snelheid voor $e = 0.9$ met bewegende randen



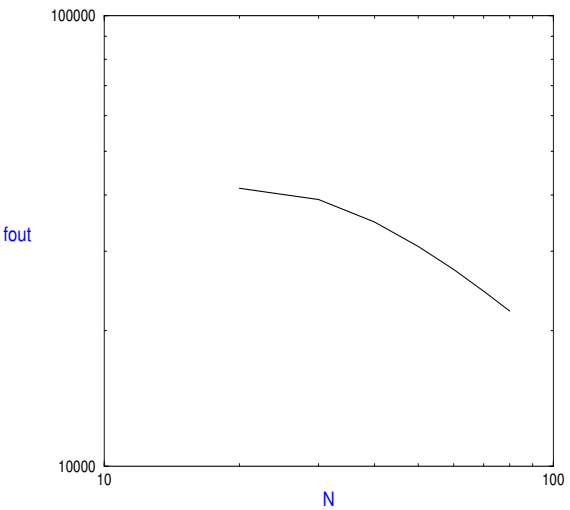
Figuur 32: Het gedrag van de fout tussen de analytische en de numerieke snelheid voor $e = 0.5$ met bewegenden randen



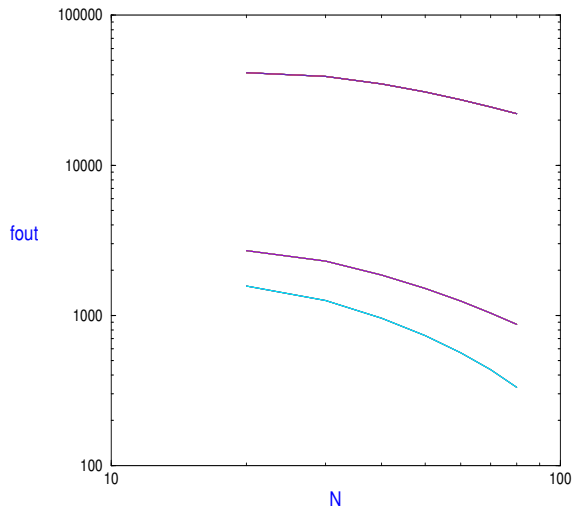
Figuur 33: Het gedrag van de fout tussen de analytische en de numerieke snelheid voor $e = 0.9$ met bewegenden randen als functie van het aantal roosterpunten



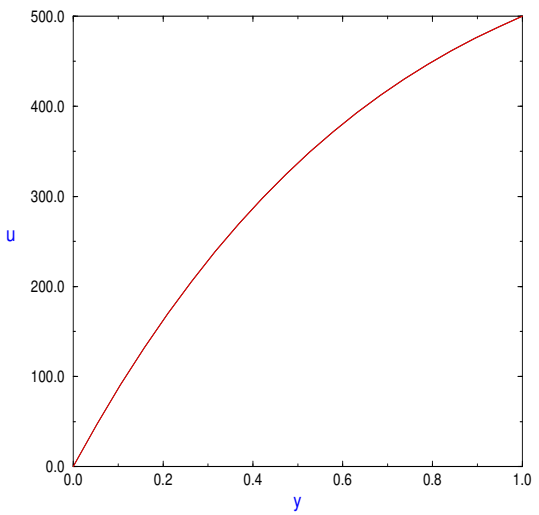
Figuur 34: Het gedrag van de fout tussen de analytische en de numerieke snelheid voor $e = 0.8$ met bewegenden randen als functie van het aantal roosterpunten



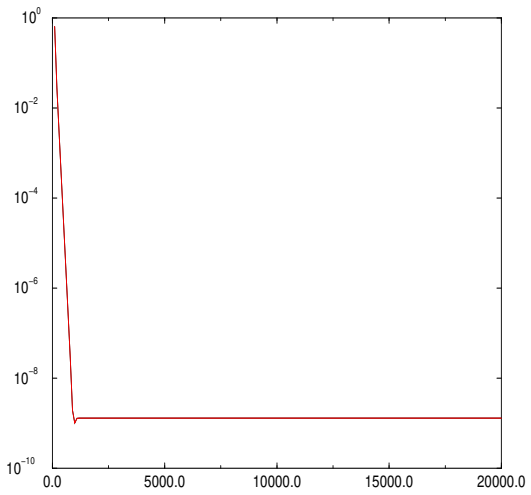
Figuur 35: Het gedrag van de fout tussen de analytische en de numerieke snelheid voor $e = 0.5$ met bewegenden randen als functie van het aantal roosterpunten



Figuur 36: Het gedrag van de fout tussen de analytische en de numerieke snelheid met bewegenden randen als functie van het aantal roosterpunten



Figuur 37: Het verloop van de numerieke snelheid voor $e = 0.2$



Figuur 38: De fout E1 tussen de numerieke oplossing berekend met de impliciete methode van Euler en de analytische oplossing voor $e = 0.9$

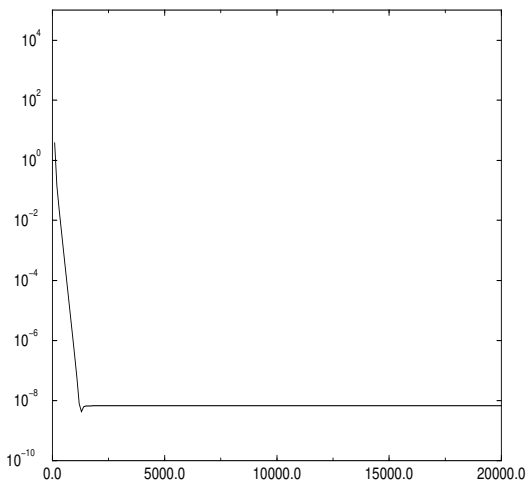
Er blijkt ook hier uit de figuren (31 t/m 32) dat inderdaad de fout tussen de analytische en de numerieke snelheid naar 10^{-9} respectievelijk 10^{-5} gaat.

De impliciete methode van Euler

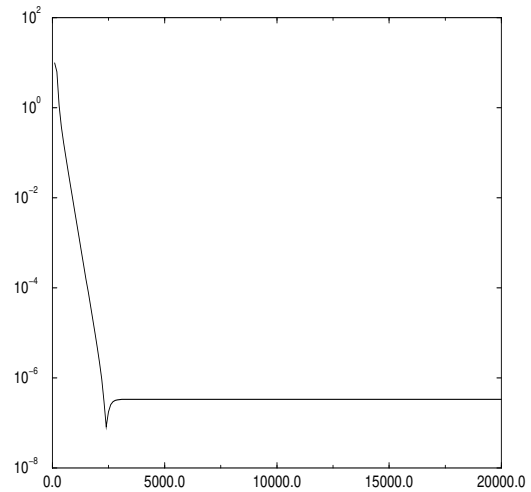
Formules (85) tot en met (87) en formules (53) tot en met (54) blijven geldig. Ook hier is een programma in Fortran 77 geschreven. Om het gedrag van de fout te bekijken zie figuren (38) t/m (40) Er blijkt uit de figuur (38) t/m (40) dat inderdaad de fout tussen de analytische en de numerieke snelheid klein wordt.

8 De samenvatting

In dit verslag wordt een cartesisch rooster methode voor bewegende interne randproblemen beschreven. Om die methode te testen , is het verstandig om naar eenvoudige en bekende problemen binnen de stromingsleer te kijken. In dit verslag worden de Poiseuille en Couette stromingen langs twee oneindige en parallelle wanden besproken maar zonder rekening te houden met interne bewegende randen.
De reden om deze typische stromingsproblemen te bestuderen is dat de analytische oplossing van de snelheid eenvoudig te bepalen en we kunnen dus de numerieke en de analytische oplossingen met elkaar vergelijken.
We kunnen twee gevallen onderscheiden:
Geval I:Newtonse reologie.



Figuur 39: De fout tussen de numerieke oplossing berekend met de impliciete methode van Euler en de analytische oplossing voor $e = 0.8$



Figuur 40: De fout tussen de numerieke oplossing berekend met de impliciete methode van Euler en de analytische oplossing voor $e = 0.2$

Geval II:Niet-Newtonse reologie.

Geval I:Newtonse reologie.
In dit geval is de viscositeit constant. Ten eerste wordt er gekeken naar de Poiseuille stroming en daarna naar de Couette stroming.
In beide gevallen blijkt de analytische oplossing een tweede-graads polynoom te zijn en heeft dus een parabolisch profiel.
Als numerieke methode wordt van zowel de expliciete als de impliciet methode van Euler gebruik gemaakt. Voor beide numerieke methoden is een tweede-orde ruimtelijke discretisatie schema gebruikt met als gevolg dat met een willekeurig aantal roosterpunten kan de analytische oplossing goed benadert worden.
Geval II:Niet-Newtonse reologie.
In dit geval is de viscositeit afhankelijk van de gradiënt van de snelheid. Analoog aan het eerste geval wordt eerst de Poiseuille stroming besproken en daarna de Couette stroming. In beide gevallen is de analytische oplossing bepaald en blijkt een polynoom te zijn, waarbij de machten kunnen breuken zijn.
Als numerieke methode wordt van de expiciete methode van Euler gebruik gemaakt. Er blijkt uit de resultaten dat de fout klein wordt naarmate het aantal roosterpunten groot wordt.

9 De onderzoekpunten

De onderzoekpunten zijn :

- Het bestuderen van een één dimensionaal bewegend intern randprobleem.
- Het terugvinden van de eerdere gekregen resultaten maar deze keer met CFX-code.
- Twee-dimensionaal probleem waarbij het bewegende lichaam rechthoekig is.
- Het geval dat het bewegende lichaam een complexe vorm heeft

Referenties

[1] Joel H.Ferziger, Milovan Peric, *Computational Methods for Fluid Dynamics*, second edition, Springer, Berlin, 1999.

[2] T.Ye, R.Mittal, H.S. Udaykumar and W. Shyy, *An Accurate Cartasian Grid Method for Viscous Incompressible Flows with Complexe Immersed Boundaries*.J.Comput.Phys.**256**,223(1999).

[3] P.Wesseling, *Principles of fluid dynamics*,AIO cursus Burgercentrum, 2000.

[4] D. Goldstein, R. Handler, and L. Sirovich, *Modelling of a no-slip surface with and external flow field*, J.Comput.Phys.**105**,354(1993).

[5] C. S. Peskin, *Numerical analysis of blood flow in the heart*, J.Comput.Phys.**25**, 220(1977).

[6] J. M. Yosuf, *Interaction of Massive Particles with Turbulence*, Ph.D. Thesis. Departement of Mechanical and Aerospace Engineering, Cornell University, 1996.

[7] H.S. Udaykumar, R.Mittal ,and W.Shyy, *Solid-liquid phase front computation in the sharp interface limit in fixed grid* ,J.Comput.Phys.**153**.535-574(1999).

[8] Byron Bild, R.Robert, C.Armstrong, *Dynamics of Polymeric Liquids*, John Wiley & Sons, Toronto, 1977.

[9] H. A. Van der Vorst, *A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of non-symmetric linear systems* , SIAM J. Sci. Statist. Comput. **13**, 631(1992).

[10] H.S. Udaykumar, W. Shyy, M. M. Rao, and R. W. Smith, *Computational Fluid Dynamics with Moving Boundaries*,Taylor & Francis, London,1996.