Een onderzoek aan de Boundary Element Methode voor nauwkeurige localisatie van hersenactiviteit

Raymond van Gent

1 december 1997

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Introductie

Mijn afstudeeropdracht wordt uitgevoerd bij het MEG centrum KNAW. Het MEG centrum KNAW is een instituut van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, gehuisvest in de polikliniek van het Academisch Ziekenhuis van de Vrije Universiteit in Amsterdam.

Het MEG centrum richt zich op toepassing en verbetering van de techniek van het Magneto-encefalogram en dat betekent letterlijk "magnetisch hersenschrift". MEG is een nieuwe methode waarmee de werking van de hersenen kan worden bestudeerd. Dit gebeurt met behulp van magnetische signalen die door de hersencellen worden gemaakt als ze actief zijn. Als de hersencellen actief zijn ontstaan er potentiaalverschillen op de hoofdhuid en een magnetisch signaal buiten het hoofd. De meting van het magnetisch signaal wordt MEG genoemd.

Meerkanaals MEG/EEG (EEG staat voor Electro-encefalogram) signalen kunnen worden gebruikt om de onder- liggende activiteit te lokaliseren (in ons geval dus de hersenactiviteit). Hiertoe wordt een mathematisch model opgesteld dat het verband geeft tussen electrische bronnen en de gegeven signalen. Wanneer de geometrie van de geleider bekend is en wanneer de bron door een beperkt aantal parameters beschreven wordt (bv. een stroomdipool) dan is het bronlocatie probleem teruggebracht tot een parameterschattingsprobleem: bepaal die set bron parameters die de metingen zo goed mogelijk beschrijven. De nauwkeurigheid waarmee bronnen in de hersenen gelocaliseerd kunnen worden wordt in belangrijke mate bepaald door de nauwkeurigheid van het gebruikte geleidingsmodel. Het eenvoudigste model van het hoofd bestaat uit een set van concentrische bolschillen, met ieder hun eigen geleidbaarheid. Deze schillen stellen dan voor: de hersenen, de cerebrospinale vloeistoflaag, de schedel en de huid. Het bolschillenmodel is analytisch oplosbaar en geeft een snel algoritme, maar een beperkte nauwkeurigheid.

Met de zogenaamde Boundary Element Methode (BEM) kan een realistisch gevormd hoofd worden gemodelleerd dat bestaat uit homogene compartimenten van constante geleidbaarheid. Hiertoe wordt een randintegraalvergelijking opgesteld voor de potentiaal op de scheidingsoppervlakken. Deze vergelijking kan worden opgelost door een driehoeksbelegging te maken op de scheidingsoppervlakken. Op elk van de driehoekjes wordt de potentiaal constant genomen, of de potentiaal kan een lineair of kwadratisch verloop hebben. Hiermee wordt de integraalvergelijking gediscretiseerd en krijgen we een systeem van lineaire vergelijkingen dat numeriek oplosbaar is. Bij het localiseren van electrische bronnen uit MEG/EEG signalen wordt voor een groot aantal combinaties van bronnen de potentiaal/het magnetisch veld uitgerekend. Daarom is het toepassen van realistische modellen een afweging van snelheid en nauwkeurigheid. Hoe meer driehoekjes en groter de orde van de interpolatie over de driehoekjes, hoe nauwkeuriger het model, maar hoe langzamer het algoritme. Met behulp van simulaties willen we er achter komen waar het optimum in de praktijk ligt.

Mijn afstudeeropdracht is voor het oplossen van het probleem een snel en een zo nauwkeurig mogelijk model te krijgen. Er zijn dan enkele vragen die nader onderzocht moeten worden. Hoe fijn moet de driehoeksbelegging worden gekozen willen we een bepaalde nauwkeurigheid verkrijgen? Is het mogelijk cq wenselijk om een locale verfijning toe te passen? Heeft het zin om hogere orde interpolaties op de driehoeken te gebruiken of neemt dan alleen de grootte van het systeem van vergelijkingen toe? Kan met een grovere driehoeksbelegging worden volstaan als we in plaats van platte driehoekjes gekromde driehoekjes nemen en wegen de extra kosten hier tegenop?

Hoofdstuk 2

De fysische achtergronden van het probleem

2.1 De Methode

Meerkanaals MEG/EEG signalen kunnen worden gebruikt om de onderliggende hersenactiviteit te lokaliseren. Dat gebeurt bij de MEG met een apparaat met meetpunten, die de magnetisch signalen meten, op een deel van een bolschil die over het hoofd heen wordt geschoven. Bij het maken van een EEG daarintegen moeten de meetpunten op het hoofd aangebracht worden die de potentiaal aldaar meten.
Het voordeel van MEG boven een EEG is dus onder andere dat het minder werk kost, er hoeven geen elektroden op de hoofdhuid aangebracht te worden, en dat de methode gebruikersvriendelijker is. MEG is ook minder gevoelig voor geleidingsverschillen.
Het maken van een MEG/EEG wordt onder andere gedaan bij epilepsie patienten en mensen met de ziekte van Alzheimer. Om deze mensen in de toekomst te kunnen genezen is het van belang om de werking van de hersenen beter te bestuderen. Dit wordt gedaan door de patienten een opdracht te geven waarbij men de hersenen moet gebruiken. Hierdoor ontstaan er signalen die gemeten worden met de MEG/EEG.
Het is van groot belang dat de metingen een zo nauwkeurig mogelijke beschrijving van de locatie van de signalen leveren.

Figuur 2.1: MEG systeem

2.2 Probleemstelling

Bij het genereren van een MEG wordt het magnetisch veld bepaald dat afgegeven wordt door de aanwezigheid van hersenactiviteit. Met het gemeten magnetische veld hopen we de locatie en sterkte van de bronnen te kunnen bepalen, die voor deze activiteit zorgen.
Als we het magnetisch veld weten kunnen we de potentiaal uitrekenen die daarmee samenhangt. Dit doen we met twee van de vergelijkingen van *Maxwell*. Deze luiden [4]:

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{J}, \tag{2.1}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{0}. \tag{2.2}$$

Hier is $\mathbf{D}$ de diëlectrische verplaatsing met S.I. eenheid Cm^{-2} , $\mathbf{H}$ de mag-

netische veldsterkte in $Cm^{-1}s^{-1}$, **J** de totale stroomdichtheid in $Cm^{-2}s^{-1}$, **B** de magnetische inductie in $Nsm^{-1}C^{-1}$ en **E** de electrische veldsterkte in NC^{-1}. De totale stroomdichtheid **J** wordt bepaald door de volume stroom, die ontstaat doordat er electromagnetische krachten op de vrije ladingen werken, en door de stroom afkomstig van de bronnen.
Verder gebruiken we dat geldt:

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J_i}. \tag{2.3}$$

met conductiviteit σ in $C^2N^{-1}m^{-2}s^{-1}$ en $\mathbf{J_i}$ de stroomdichtheid van de i^e bron.
Als we naar het aantal vergelijkingen en onbekenden kijken die hierboven staan dan komen we op 6 vergelijkingen met 12 onbekenden(**D**,**H**,**B**,**E**). Het stelsel vergelijkingen is dus incompleet. Om dit op te lossen moeten we enkele aannames doen.

We gebruiken daarvoor de materiaal vergelijkingen, die de verhouding weergeven tussen de elektrische verplaatsing en het elektrische veld, en de verhouding tussen het magnetische veld en de magnetische inductie. Voor de door ons beschouwde biologische toepassingen zijn deze verhoudingen lineair en krijgen we

$$\mathbf{H} = \mu_{\mathbf{0}}^{\mathbf{-1}}\mathbf{B} \quad , \quad \mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}, \tag{2.4}$$

met μ_0 de magnetische permeabiliteit van vacuüm in Ns^2C^{-2} en ϵ als de permittiviteit in $C^2N^{-1}m^{-2}$. Dit zijn de materiaalconstanten.
We hebben nu dus 6 nieuwe vergelijkingen gevonden die ervoor zorgen dat het aantal vergelijkingen gelijk is aan het aantal onbekenden.
We nemen in ons probleem aan dat

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \simeq \mathbf{0} \quad , \quad \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \simeq \mathbf{0}. \tag{2.5}$$

Dit doen we, omdat **B** en **D** niet afhankelijk zijn van tijdsvertragingen, er treden geen faseverschillen op. Dus als de bron verandert in de tijd dan verandert het veld ook. De tijdschaal waarop je kijkt is dus veel kleiner dan de tijdschaal waarop **B** en **D** veranderen. De velden varieëren wel met de tijd en dus is het een quasi-stationair probleem met lage frequenties.

Met al deze veronderstellingen kunnen we de vergelijkingen van *Maxwell* reduceren tot de volgende vergelijkingen:

$$\text{rot}(\mu_0^{-1}\mathbf{B}) = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J_i}, \tag{2.6}$$

$$\text{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0}. \tag{2.7}$$

Uit de laatste vergelijking volgt dat er een functie moet zijn waarvoor de rotatie nul is. Dit geldt als deze functie een gradient van een scalair is.
We kiezen daarom

$$\mathbf{E} = -\nabla\psi. \tag{2.8}$$

ψ wordt de potentiaal genoemd met als dimensie $NC^{-1}m^{-1} = Volt$ en dit wordt in de fysica ook wel de spanning genoemd. In hoofdstuk 3 zullen we (2.8) gebruiken om het één en ander te vereenvoudigen.
We hebben nu genoeg fysische vergelijkingen om een model op te stellen waarmee we de potentiaal kunnen uitrekenen. Verder kunnen we met de potentiaal en de vergelijkingen (2.6) en (2.8) de magnetische inductie **B** bepalen.
Voor het oplossen van **B** gebruiken we de wet van *Biot-Savart* (zie [4], pagina 83-86 en [9]) en krijgen dan:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \mathbf{J}(\mathbf{x_0}) \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x_0}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}|^3} dV \tag{2.9}$$

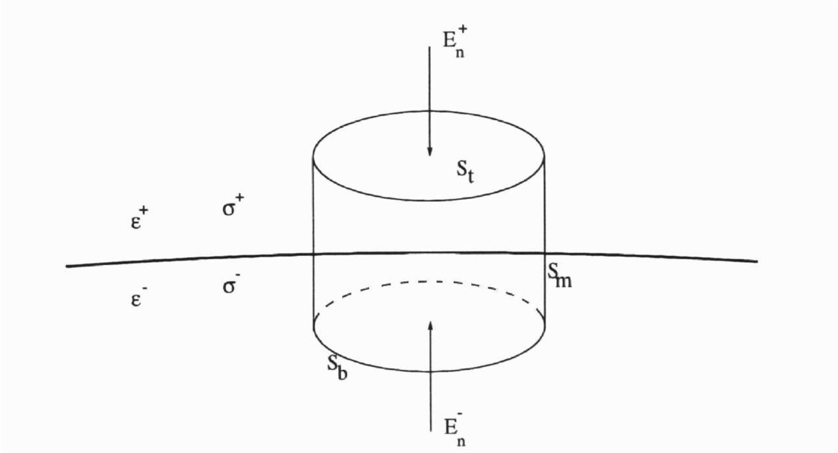
met $\mathbf{x_0}$ als integratievariabele en $\mathbf{x}$ het punt waar we **B** willen weten.
Om dit zo nauwkeurig mogelijk te kunnen uitvoeren is het van belang dat we een nauwkeurige weergave hebben van het oppervlak waar de activiteiten plaats vinden. Merk op dat **J** en dus **B** afhangt van $\sigma\nabla\psi$.

2.3 Randvoorwaarden

Om een stelsel vergelijkingen eenduidig op te lossen zijn randvoorwaarden nodig. Bovendien hebben we in ons probleem te maken met verschillende schillen met ieder zijn eigen geleiding en daarom zijn er ook aansluitvoorwaarden nodig. In deze paragraaf zullen we daarom de randen tussen de verschillende bollen beschouwen.

We bekijken een geleidend medium met conductiviteit $\sigma \neq 0$. Als er een electrisch veld ontstaat, treedt er verplaatsing van vrije lading op.
Op de grens tussen twee lagen hebben we behoud van lading zodat er evenveel lading een volume in stroomt als er uit stroomt . Deze eigenschappen,

samen met het feit dat het medium *isotroop* en *homogeen* is, leveren de benodigde voorwaarden aan de scheidingsoppervlakken.



Figuur 2.2: "pillendoosje"

2.3.1 Voorwaarden op de scheidingsoppervlakken

Om de voorwaarden te bepalen beschouwen we een "pillendoosje" (zie figuur (2.2)) en stellen daar een vergelijking op. Daarna laten we het "pillendoosje" in de limiet naar nul gaan.
Vanwege het feit dat div(rot·) = 0 krijgen we, met vergelijking (2.6), dat

$$\mathrm{div}\mathbf{J} = \mathrm{div}(\sigma\mathbf{E} + \mathbf{J_i}) = 0, \tag{2.10}$$

in het "pillendoosje".
We nemen aan dat op het scheidingsoppervlak geen bronnen zitten. Als we het "pillendoosje" klein nemen geldt dus $\mathbf{J_i} = 0$.
De vergelijking die nu overblijft is dan:

$$\mathrm{div}\mathbf{J} = \mathrm{div}(\sigma\mathbf{E}) = 0. \tag{2.11}$$

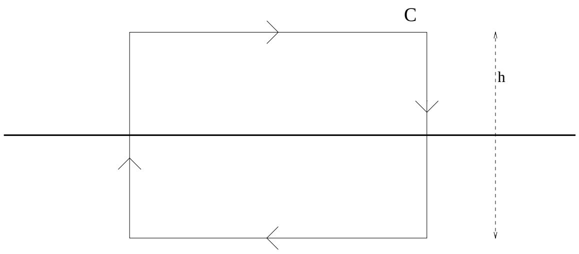
Nemen we de volume integraal van deze vergelijking over het volume boven het oppervlak en het volume onder het oppervlak, en gebruiken we de divergentiestelling van *Gauss* (zie bijlage A), dan krijgen we een integraal over de drie oppervlakken S_t (het bovenvlak), S_b (het ondervlak) en S_m (de mantel), die bestaat uit een stuk boven en een stuk onder het oppervlak

waar we het "pillendoosje" op nemen.
Nemen we hier de limiet naar nul van dan krijgen we

$$\sigma^+ \mathbf{E}_n^+ = -\sigma^- \mathbf{E}_n^- . \tag{2.12}$$

Dit geldt voor de verschillende randen tussen de compartimenten (zie ook [5]). Met $\mathbf{E}_n$ als de electrische veldsterkte in de normaalrichting zoals aangegeven in figuur (2.2). Uit deze vergelijking volgt dat

$$\sigma^+ \frac{\partial \psi^+}{\partial n} = -\sigma^- \frac{\partial \psi^-}{\partial n} \tag{2.13}$$



Figuur 2.3: Gesloten kring

De tweede voorwaarde wordt gelevert door vergelijking (2.7) en de stelling van *Stokes* (zie Bijlage A). We krijgen dan dat de kringintegraal over een gesloten contour altijd gelijk aan nul is. Nemen we daarom de kring zoals in figuur (2.3), en maken we h kleiner tot aan zijn limiet, dan krijgen we dat

$$\mathbf{E}_t^+ = -\mathbf{E}_t^- , \tag{2.14}$$

is en dus geldt dat de tangentiële component van $\mathbf{E}$ continu moet zijn. En omdat $\mathbf{E} = -\nabla\psi$ geldt dus dat de potentiaal ψ continu over een scheidingsoppervlak verloopt. (De potentiaal is op een constante na bepaald, maar we nemen de constante in ons geval gelijk aan nul.)

2.3.2 Buitenste Rand

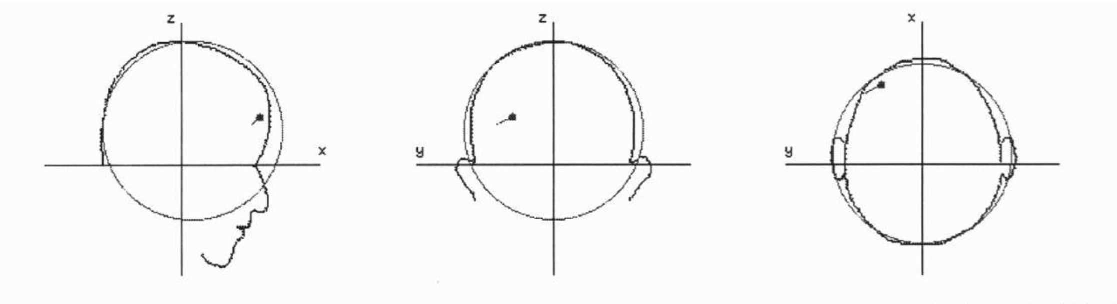
Bij de buitenste schil kan bovenstaande aanpak ook gebruikt worden om de randvoorwaarde te bepalen.
Kijken we alleen naar de buitenste schil dan hebben we een speciaal geval van vergelijking (2.12), omdat buiten het medium de electrische veldsterkte gelijk is aan nul. We krijgen daar dan een homogene *Dirichlet* voorwaarde voor het electrische veld. Dit geeft, net als hiervoor, dat

$$\sigma \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \tag{2.15}$$

en dus hebben we een homogene *Neumann* voorwaarde voor de potentiaal.

2.4 Modellering van het hoofd

De nauwkeurigheid waarmee bronnen in de hersenen gelocaliseerd kunnen worden, wordt in belangrijke mate bepaald door de geometrie van het geleidingsmodel (het hoofd). Het hoofd bestaat uit verschillende compartimenten en het eenvoudigste model daarvan bestaat uit een set concentrische bolschillen, met ieder zijn eigen geleidbaarheid. Deze schillen stellen dan voor: de hersenen, de celobrospinale vloeistoflaag, de schedel en de hoofdhuid.
Als we r als de afstand van het middelpunt tot aan een oppervlak nemen en de hoofdhuid zit op 10 cm, dan worden de hersenen, in dit model, gemodelleerd in het gebied $r \in [0\ ,\ 8.5]$ cm, is $r \in [8.5\ ,\ 8.8]$ cm in de cerebrospinale vloeistoflaag, $r \in [8.8\ ,\ 9.2]$ cm in de schedel en is $r \in [9.2\ ,\ 10.0]$ cm in de hoofdhuid (deze waarden gelden als het hoofd een straal van 10 cm heeft, is dit anders dan blijven de verhoudingen ongeveer hetzelfde).
Het bolschillen model is analytisch oplosbaar (zie paragraaf 3.4), maar geeft een beperkte nauwkeurigheid, omdat het menselijk hoofd nu eenmaal niet op een bol lijkt. Het bolschillen model is dus niet erg realistisch.



Figuur 2.4: Bolschillen vs. Realistisch

We moeten dus een betere geometrische beschrijving van het hoofd maken om een oplossing te krijgen die nauwkeuriger en dus realistischer is. Met dit realistische model kunnen we dan op een nauwkeurige manier de locatie van de bron bepalen uit de metingen, maar is het mathematische model niet meer analystisch oplosbaar.

2.5 Het Inverse Probleem

Wat we in ons probleem uiteindelijk willen weten is de locatie van de bronnen. Dit probleem wordt ook wel een inverse probleem genoemd. In ons geval komt dat doordat we de potentiaal meten en dus, net als de geometrie, als bekend beschouwen. Het inverse probleem is over het algemeen moeilijker oplosbaar dan het voorwaartse probleem. Een ander probleem dat bij het inverse probleem ontstaat is dat de oplossing niet eenduidig hoeft te zijn. Kijken we naar het magnetisch inverse probleem, dan blijkt dat dit geen unieke oplossing heeft. Dit komt door het feit dat er zogenaamde magnetisch stille bronnen zijn, die geen magnetisch veld buiten de geleider V produceren. Zo'n stroombron kan altijd aan de oplossing worden toegevoegd zonder het veld buiten V te beinvloeden (zie [9]).

Wat we wel willen weten zijn de locatie en de sterkte van de onderliggende bronnen. Deze bepalen de grootte van de potentiaal. Om de waarde van die bronnen nu te bepalen moeten we die waarde vinden waarvoor geldt dat de bijbehorende potentiaal het minst van de meetwaarde afwijkt.
Bij zowel het voorwaartse probleem, waar we de potentiaal willen weten, als bij het inverse probleem is de geometrie van het oppervlak heel belangrijk. Is het oppervlak niet realistisch genoeg dan kan het voorkomen dat we de bronnen op een hele andere plaats berekenen dan waar ze in werkelijkheid zitten. Het is daarom dan ook belangrijk dat aan een bepaalde nauwkeurigheid, van de geometrische beschrijving, wordt voldaan.
Daar de belegging van de geometrie waarschijnlijk invloed heeft op de locatie van de bronnen, willen we onderzoeken hoe we een zo nauwkeurig mogelijke discretisatie van de geometrie van het hoofd krijgen. Daartoe moeten we alleen eerst naar het voorwaartse probleem kijken en de waarde van de bronnen als bekend beschouwen. Als we dan een goede oplossing voor de, gegeven, bronnen gevonden hebben, kunnen we weer terug naar het inverse probleem (voor het vinden van deze oplossing gebruiken we een algoritme dat al aanwezig is). Het inverse probleem laten we voorlopig ook even voor wat het is en in het vervolg zullen we het voorwaartse probleem beschouwen.

Hoofdstuk 3

Mathematische probleemstelling

3.1 Afleiding van het Mathematische Model

Voor een goed mathematisch probleem leiden we een vergelijking af die we kunnen oplossen, hier een partiële differentiaal vergelijking voor de potentiaal, met voldoende randvoorwaarden.
In dit hoofdstuk zullen we hiervoor zorgen en gaan we de verkregen vergelijking omschrijven naar een integraalvergelijking.

3.1.1 De Vergelijking voor de Potentiaal

Om het fysisch probleem, omschreven in paragraaf 2.2, te kunnen oplossen moeten we het gaan omschrijven naar een mathematisch probleem.
We maken daarvoor gebruik van de vergelijkingen van *Maxwell* (2.6) en (2.7). Uit vergelijking (2.7) volgde dat

$$\mathbf{E} = -\nabla\psi, \tag{3.1}$$

moet gelden (zie [5]), met ψ als de potentiaal. Van vergelijking (2.6) nemen we de divergentie en maken we gebruik van het feit dat de divergentie van de rotatie gelijk aan nul is.
We krijgen dan, met (3.1):

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{div}\mathbf{J} &= \mathrm{div}(\sigma\mathbf{E} + \mathbf{J_i}), \\ \mathrm{div}(\sigma\mathbf{E}) &= -\mathrm{div}\mathbf{J_i}, \end{aligned}$$

$$\mathrm{div}(\sigma\nabla\psi) = \mathrm{div}\mathbf{J_i} = v, \tag{3.2}$$

met v als de gegeven bronverdeling.
Het medium is *homogeen* en *isotroop*, dus is σ een stuksgewijze constante en dat levert uiteindelijk de vergelijking die opgelost dient te worden:

$$\mathrm{div}(\sigma\nabla\psi) = v. \tag{3.3}$$

3.1.2 Randvoorwaarden

Voor het oplossen van vergelijking (3.3) zijn aansluitcondities en randvoorwaarden nodig. In paragraaf 2.3 is daar al iets over gezegd. Als we de aansluitcondities omschrijven in mathematische vergelijkingen krijgen we (zie [5]) dat

$$(\sigma\nabla\psi) \cdot n \qquad \text{continu} \tag{3.4}$$

(n is de normaalcomponent en naar buiten gericht)

en

$$\psi \qquad \text{continu} \tag{3.5}$$

moet gelden. We hebben nu dus twee aansluitvoorwaarden.
In het speciale geval, als we de rand tussen het medium en de omgeving beschouwen, geldt voor vergelijking (3.4) dat

$$(\sigma\nabla\psi) \cdot n = 0 \tag{3.6}$$

en is een randvoorwaarde aan het buitenste oppervlak.

3.1.3 Model

Het resultaat is nu dat we een mathematisch model hebben gekregen. Als we maar naar één bolschil kijken dan wordt het model:

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(\sigma\nabla\psi) &= v & \qquad \mathbf{x} \in V \\ (\sigma\nabla\psi) \cdot n &= 0 & \qquad \mathbf{x} \in S, \end{aligned} \tag{3.7}$$

hier is S de bolschil en V het volume van de bol.
Hebben we echter meerdere bolschillen dan hebben we de aansluitvoorwaarden nodig (zie paragraaf 3.3.1). Vanwege het feit dat we, in beide gevallen,

een *Neumann* randvoorwaarde voor de potentiaal hebben, kan de oplossing van dit probleem slechts op een constante na bepaald worden.

3.1.4 Bronterm v

Om het model op te lossen moeten we ook weten wat v is. In ons geval beschouwen we de hersenen. Het wordt over het algemeen geaccepteerd dat de bronstroom in de hersenen zich als een dipool gedraagt (zie [5]).
Als de bron wordt beschreven met een stroomdipool met moment $\mathbf{M}$ en op de plaats $\mathbf{x_{dip}}$ zit, wordt de opgewekte stroom

$$\mathbf{J_i}(\mathbf{x}) = \mathbf{M}\delta(\mathbf{x_{dip}} - \mathbf{x}) = \mathbf{M}\delta(x_{dip} - x)\delta(y_{dip} - y)\delta(z_{dip} - z) \quad (3.8)$$

(met δ de *Dirac*-delta, zie bijlage A) en daardoor hebben we

$$v = \mathrm{div}\mathbf{J_i} = \mathbf{M} \cdot \nabla\delta(\mathbf{x_{dip}} - \mathbf{x}) = -\mathbf{M} \cdot \nabla_{dip}\delta(\mathbf{x_{dip}} - \mathbf{x}). \quad (3.9)$$

Hierbij is ∇_{dip} de gradient met betrekking tot het bronpunt. Dit doen we, omdat we hiermee de potentiaal verdeling, als gevolg van een dipool, kunnen bepalen.

3.2 De Integraalvergelijking voor de Potentiaal

Vergelijking (3.7) kunnen we oplossen door deze om te schrijven in de vorm van een integraalvergelijking en dat gaan we in deze paragraaf ook doen (zie ook [8]).
Voor de afleiding van de integraalvergelijking zullen we gebruik maken van de tweede Greense identiteit:

$$\int_V (\psi\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\psi)dV = \int_S (\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi) \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.10)$$

Eerst beschouwen we het mathematische model (3.7) en lossen dit op voor het veld van een puntbron met sterkte 4π op de plaats $\mathbf{x_0}$:

$$\nabla^2\phi = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x_0}). \quad (3.11)$$

De Greense potentiaal wordt gegeven door

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}|} = \frac{1}{R}. \quad (3.12)$$

Deze voldoet (in zwakke zin) aan (3.11). De afleiding hiervan is te vinden in [7]. In (3.12) is R gedefinieerd als:

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{x_0}) = |\mathbf{x} - \mathbf{x_0}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \tag{3.13}$$

We zullen de Greense potentiaal gebruiken bij de afleiding van de integraalvergelijking.

3.2.1 Eén Compartiment

We schrijven de Greense identiteit als volgt:

$$\int_V \psi \nabla^2 \phi dV = \int_V \phi \nabla^2 \psi dV + \int_S \psi \nabla \phi \cdot d\mathbf{S} - \int_S \phi \nabla \psi \cdot d\mathbf{S}. \tag{3.14}$$

We vullen nu voor ϕ de functie gegeven in (3.12) in. Merk op dat $\mathbf{x_0}$ de integratievariabele is en dat R een functie is van $\mathbf{x}$ en $\mathbf{x_0}$ (zie 3.13), maar deze laten we om schrijfwerk te besparen weg. Dit geeft dan de volgende integraalvergelijking voor $\mathbf{x} \in V$:

$$-4\pi\psi(\mathbf{x}) = \int_V \frac{1}{R} \nabla^2 \psi(\mathbf{x_0}) dV + \int_S \psi(\mathbf{x_0}) \nabla \frac{1}{R} \cdot d\mathbf{S} - \int_S \frac{1}{R} \nabla \psi(\mathbf{x_0}) \cdot d\mathbf{S}. \tag{3.15}$$

Als $\mathbf{x} \notin V$ dan

$$0 = \int_V \frac{1}{R} \nabla^2 \psi(\mathbf{x_0}) dV + \int_S \psi(\mathbf{x_0}) \nabla \frac{1}{R} \cdot d\mathbf{S} - \int_S \frac{1}{R} \nabla \psi(\mathbf{x_0}) \cdot d\mathbf{S}. \tag{3.16}$$

En als $\mathbf{x} \in S$ wordt het probleem:

$$-\Omega(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) = \int_V \frac{1}{R} \nabla^2 \psi(\mathbf{x_0}) dV + \int_S \psi(\mathbf{x_0}) \nabla \frac{1}{R} \cdot d\mathbf{S} - \int_S \frac{1}{R} \nabla \psi(\mathbf{x_0}) \cdot d\mathbf{S}. \tag{3.17}$$

Hier is $\Omega(\mathbf{x})$ de ruimtehoek in een punt $\mathbf{x}$ en Ω is gelijk aan 2π als we te maken hebben met een glad oppervlak. Het verschil in de linkerterm komt doordat we met een deltafunctie te maken hebben. Per definitie geldt tenslotte dat:

$$\int_V \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) d\mathbf{x_0} = \int_{B_\varepsilon(\mathbf{x})} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) d\mathbf{x_0} = 1 \quad , \quad \mathbf{x} \in V \tag{3.18}$$

als $\mathbf{x} \in V$, waarbij $B_\varepsilon(\mathbf{x})$ een bol is met middelpunt $\mathbf{x}$ en straal ε klein genoeg. Deze integraal is 0 als $\mathbf{x} \notin V$.
Als $\mathbf{x} \in S$, de rand van V, dan geldt, voor ε klein genoeg,

$$\int_V \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) d\mathbf{x_0} = \int_{B_\varepsilon(\mathbf{x}) \cap V} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) d\mathbf{x_0} = \frac{\Omega(\mathbf{x})}{4\pi} \tag{3.19}$$

We moeten er nu rekening mee houden dat vergelijking (3.17) een oneigenlijke integraal bevat. Merk op dat (3.15) ook een oneigenlijke integraal bevat en (3.16) niet, omdat daar $\mathbf{x}$ nooit gelijk aan $\mathbf{x_0}$ wordt.
Vullen we de gegevens uit het mathematische model (3.7) in vergelijking (3.17) in, dan resulteert dat in een integraalvergelijking van de onderstaande vorm:

$$\Omega(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) = \psi_m(\mathbf{x}) + \int_S K(\mathbf{x}, \mathbf{x_0})\psi(\mathbf{x_0}) \cdot d\mathbf{S} \tag{3.20}$$

met

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x_0}) = -\nabla \frac{1}{R} = -\nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}|} \tag{3.21}$$

en

$$\psi_m(\mathbf{x}) = -\Big[\int_V \frac{1}{R} \nabla^2 \psi dV - \int_S \frac{1}{R} \nabla \psi \cdot d\mathbf{S} \Big] \tag{3.22}$$

waarbij $\nabla^2 \psi$ en $\nabla \psi$ gegeven zijn door het model (3.7). We weten dat σ stuksgewijs constant is, constant per compartiment, en dus wordt (3.22) met (3.7):

$$\psi_m(\mathbf{x}) = -\int_V \frac{v}{R\sigma} dV = -\frac{1}{\sigma} \int_V \frac{v}{R} dV \tag{3.23}$$

Deze vergelijking kunnen we vereenvoudigen, als we aannemen dat we te maken hebben met een dipoolbron (zie paragraaf 3.1.4) in volume V_5, tot:

$$\psi_m(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sigma} \mathbf{M} \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x_{dip}})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x_{dip}}|^3} \tag{3.24}$$

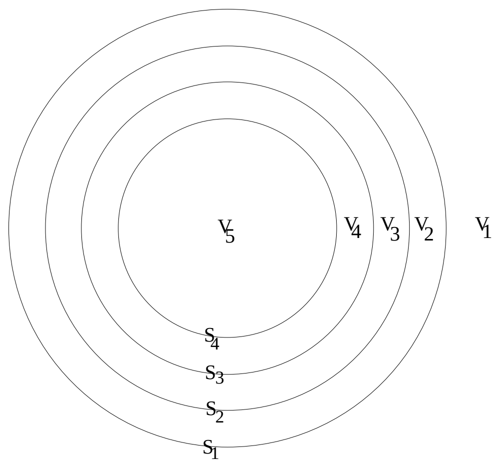
met $\mathbf{M}$ de sterkte van de dipool en $\mathbf{x_{dip}}$ zijn locatie in V.
We hebben nu dus de integraalvergelijking afgeleid voor het geval dat we met één compartiment te maken hebben .

3.3 Meerdere Compartimenten

Als we naar ons probleem kijken zien we, dat we te maken hebben met meerdere compartimenten en niet, zoals hiervoor beschreven, met maar één compartiment. Het model (3.7) en de verkregen integraalvergelijking (3.20) moeten we dus nog aanpassen.

3.3.1 Integraalvergelijking voor geneste compartimenten

Daar we nu naar meerdere compartimenten gaan kijken hebben we de aansluitvoorwaarden nodig voor het oplossen van ons model. Stel dat we kijken naar de geneste volumes V_i (i=1..5) die gescheiden zijn door de oppervlakken S_i (i=1..4). V_1 is het volume buiten het hoofd is, V_5 het volume van de hersenen.



Figuur 3.1: Meerdere Compartimenten, genest

Noem de potentiaal in volume V_i, ψ_i. Het model gaat dan over in:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\sigma_i \nabla \psi_i) &= v_i & \mathbf{x} \in V_i \quad & i = 1..5 \quad (3.25)\\
\psi_i &= \psi_{i+1} & \mathbf{x} \in S_i \quad & i = 2..4\\
(\sigma_i \nabla \psi_i) \cdot n &= -\sigma_{i+1} \nabla \psi_{i+1} \cdot n & \mathbf{x} \in S_i \quad & i = 2..4\\
(\sigma_1 \nabla \psi_1) \cdot n &= 0 & \mathbf{x} \in S_1 \quad &
\end{aligned}$$

Met S_i het scheidingvlak tussen volume V_i en volume V_{i+1} en n de naar buiten gerichte normaal.

Nu we het model voor de geneste compartimenten hebben, kunnen we weer overgaan naar een integraalvergelijking.
Omdat het aantal volumes dat een oppervlak scheidt altijd gelijk aan twee is, komt een oppervlak ook twee keer voor in de vergelijking. Namelijk vanuit volume V_i bekeken en vanuit volume V_{i+1} bekeken.
Verder geldt dat:

$$\sigma_i^+ = \sigma_{i+1}^- \qquad i = 1..4, \tag{3.26}$$

want de linkerterm is de conductiviteit boven oppervlak S_i en zit dus in volume V_{i+1} en de rechterterm is de conductiviteit onder oppervlak S_{i+1} en zit dus ook in volume V_{i+1}.

De integraalvergelijking voor ons probleem vinden we door naar verschillende Greense volumes te kijken.
Kies $\mathbf{x} \in \mathbf{S_i}$, kies V_i als Greense volume V en vermenigvuldig met σ_i dan krijgen we:

$$\begin{aligned} \Omega_i(\mathbf{x})\sigma_i\psi_i &= -\int_{V_i} \sigma_i \frac{1}{R}\nabla^2\psi_i dV \qquad (3.27) \\ &+ \int_{S_i} \{-\sigma_i\psi_i\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\sigma_i\frac{\partial}{\partial n}\psi_i\}dS_i \\ &+ \int_{S_{i-1}} \{-\sigma_i\psi_i\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\sigma_i\frac{\partial}{\partial n}\psi_i\}dS_{i-1}. \end{aligned}$$

Kies vervolgens $\mathbf{x} \in \mathbf{S_i}$, kies V_{i+1} als Greense volume V en vermenigvuldig met σ_{i+1} dan krijgen we:

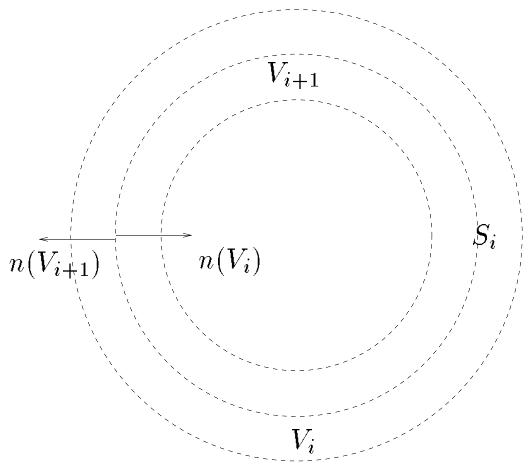
$$\begin{aligned} \Omega_{i+1}(\mathbf{x})\sigma_{i+1}\psi_{i+1} &= -\int_{V_{i+1}} \sigma_{i+1} \frac{1}{R}\nabla^2\psi_{i+1} dV \qquad (3.28) \\ &+ \int_{S_i} \{-\sigma_{i+1}\psi_{i+1}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\sigma_{i+1}\frac{\partial}{\partial n}\psi_{i+1}\}dS_i \\ &+ \int_{S_{i+1}} \{-\sigma_{i+1}\psi_{i+1}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\sigma_{i+1}\frac{\partial}{\partial n}\psi_{i+1}\}dS_{i+1}. \end{aligned}$$

Kies $\mathbf{x} \in \mathbf{S_i}$, kies V_j als Greense volume V en vermenigvuldig met σ_j dan krijgen we, met $j \neq i, i+1$:

$$0 = -\int_{V_j} \sigma_j \frac{1}{R}\nabla^2\psi_j dV \tag{3.29}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \int_{S_j} \{ -\sigma_j \psi_j \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \sigma_j \frac{\partial}{\partial n} \psi_j \} dS_j \\
&+ \int_{S_{j-1}} \{ -\sigma_j \psi_j \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \sigma_j \frac{\partial}{\partial n} \psi_j \} dS_{j-1}.
\end{aligned}
$$

We zijn er bij de bovenstaande vergelijkingen steeds vanuit gegaan dat we op oppervlak $\mathbf{S_i}$ staan en kijken naar een puntbron in een willekeurig volume V_k.
Verder gebruiken we het onderstaande figuur:



Figuur 3.2: Bolschillen V_i en V_{i+1}

Van vergelijking (3.29) weten we dat deze geldt voor meerdere j, namelijk voor $j = 1..5$ met $j \neq i, i+1$.
Tellen we al deze vergelijkingen bijelkaar op, dus vergelijking (3.27), vergelijking (3.28) en vergelijking (3.29) voor alle j, dan krijgen we een sommatie over j. Bij deze sommatie valt het één en ander weg als we gebruik maken van de aansluitvoorwaarden en de randvoorwaarde. Door gebruik te maken van de aansluitvoorwaarden vallen de termen $\frac{1}{R}\sigma_j \frac{\partial}{\partial n}\psi_j$ tegen elkaar weg, deze term blijft alleen op de buitenrand nog over. Gelukkig hebben we daar een homogene *Neumann* randvoorwaarde en valt de term daar ook weg.
Als we dit gedaan hebben dan krijgen we de volgende vergelijking:

$$
(\Omega_k \sigma_k + \Omega_{k+1} \sigma_{k+1}) \psi(\mathbf{x}) \quad = \quad - \sum_{j=1}^{5} \sigma_j \int_{V_j} \frac{1}{R} \nabla^2 \psi dV +
$$

$$+\sum_{j=1}^{4}(\sigma_j - \sigma_{j+1}) \int_{S_j} \psi_j(\mathbf{x_0}) K_j(\mathbf{x}, \mathbf{x_0}) \cdot d\mathbf{S_j} \tag{3.30}$$

met

$$K_j(\mathbf{x}, \mathbf{x_0}) = -\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}|}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbf{S_j} \tag{3.31}$$

Omdat we weten dat $\sigma_i = \sigma_i^-$, want σ_i is de conductiviteit in volume V_i en σ_i^- is de conductiviteit net onder oppervlak S_i en is dus ook de conductiviteit in volume V_i. Met vergelijking (3.26) komen we dan op de volgende vergelijking uit:

$$\begin{aligned}(\Omega^+\sigma_k^+ + \Omega^-\sigma_k^-)\psi(\mathbf{x}) &= -\sum_{j=1}^{5}\sigma_j \int_{V_j} \frac{1}{R}\nabla^2\psi dV + \\ &+ \sum_{j=1}^{4}(\sigma_j^- - \sigma_j^+) \int_{S_j} \psi_j(\mathbf{x_0}) K_j(\mathbf{x}, \mathbf{x_0}) \cdot d\mathbf{S_j}\end{aligned} \tag{3.32}$$

met $K_j(\mathbf{x}, \mathbf{x_0})$ als (3.31).
Hierbij is de normaal van het volume naar het oppervlak wat we bekijken gericht en geldt de vergelijking voor $k = 1....4$. We hebben nu dus een stelsel integraalvergelijkingen die we moeten gaan oplossen.
In vergelijking (3.32) moet een volume integraal worden opgelost, maar omdat we uit het model (3.25) al weten dat $\sigma_j\nabla^2\psi_j = v_j$ geldt dat de volume integraal als een bekende functie. Deze functie kunnen we, afhankelijk van v_j, dan wel analytisch, dan wel numeriek bepalen. Hier hebben we aangenomen dat we met een dipoolbron te maken hebben en dan is de volume integraal analytisch oplosbaar.
Het hoeft niet zo te zijn dat de compartimenten, net zoals in figuur (3.1), bolschillen zijn. Het is zelfs zo dat de volumes volstrekt willekeurig kunnen liggen. In ons geval is het zo dat de schillen wel genest zijn, maar niet bolvormig.

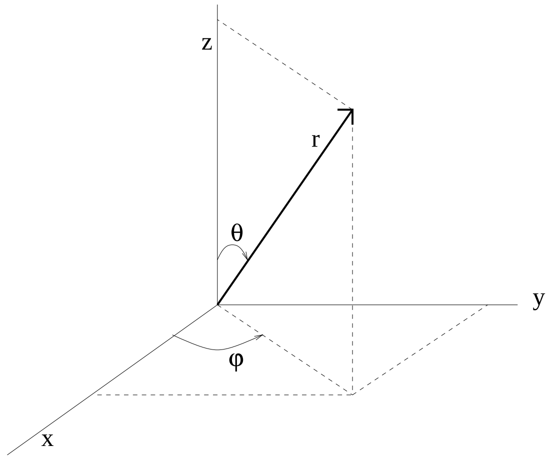
3.4 Analytische oplossing Bolschillen-model

In deze sectie zullen we de analytische oplossing van het bolschillenmodel bespreken. We gaan hier van het oorspronkelijke model (3.7) uit en dus niet van de integraalvergelijking (3.32).

3.4.1 Omschrijven naar Bolcoördinaten

Omdat we een bol beschouwen gaan we het model (3.7) omschrijven naar bolcoördinaten.

$$\begin{aligned} x &= r sin\theta cos\varphi \\ y &= r sin\theta sin\varphi \\ z &= r cos\theta \end{aligned} \tag{3.33}$$



Figuur 3.3: Bolcoördinaten

Vullen we de bolcoördinaten in dan krijgen we dat

$$div(\sigma\nabla\psi) = v \tag{3.34}$$

overgaat in:

$$\frac{1}{\sigma(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^2\sigma(r)\frac{\partial\psi}{\partial r}\right\} + \frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right\} + \frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = \frac{r^2 v}{\sigma(r)} \tag{3.35}$$

(v is hier in bolcoördinaten) waarin $\sigma(r)$ de radiële geleidings verdeling is. Deze is stuksgewijs constant en in het vervolg zullen we deze constante σ_i noemen.

3.4.2 Oplossing

Voor een dipool met sterkte $\mathbf{M}$ op de plaats $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ wordt de potentiaal gegeven door de volgende uitdrukking:

$$\psi_{dipool}(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\sum_{\alpha=0}^{1} \frac{Y_{nm\alpha}(\theta,\varphi)}{\|Y_{nm\alpha}\|^2}\mathbf{M}\cdot\nabla_0 R_n(r_0,r)Y_{nm\alpha}(\theta_0,\varphi_0). \tag{3.36}$$

Met:

$$\begin{aligned} Y_{nm\alpha} &= P_{nm}(cos\theta)X_m(\varphi), \\ X_m(\varphi) &= cosm\varphi \qquad \alpha = 0, \\ &= sinm\varphi \qquad \alpha = 1. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Hier is $P_{nm}(cos\theta)$ de geassocieerde *Legendre* functie (zie Bijlage C).
Verder zijn $Y_{nm\alpha}$ niet-genormaliseerde bolfuncties van de n^{de} orde met graad m, de functie is even0 als $\alpha = 0$ en oneven als $\alpha = 1$. De bolfuncties zijn de eigenfuncties van het θ en φ gedeelte van de *Laplace* operator:

$$\Big[\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}[sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}] + \frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Big]Y_{nm\alpha} = -n(n+1)Y_{nm\alpha} \tag{3.38}$$

De norm van de bolfuncties wordt gegeven door:

$$\|Y_{nm\alpha}\| = \sqrt{\int_S Y^2_{nm\alpha}dS} = \sqrt{\frac{2\pi}{2n+1}(1+\delta_{0m})\frac{(n+m)!}{(n-m)!}} \tag{3.39}$$

met δ_{0m} als de *Kronecker* delta (zie bijlage A).
Verder is

$$\begin{aligned} R_n(r_0,r) &= CR_n^{(1)}(r)R_n^{(2)}(r_0) \qquad r < r_0 \\ &= CR_n^{(1)}(r_0)R_n^{(2)}(r) \qquad r \geq r_0 \end{aligned} \tag{3.40}$$

met

$$C = \frac{1}{(2n+1)\sigma_N B_N^{(2)}} \tag{3.41}$$

en

$$R_n^{(i)}(r) = A_j^{(i)} P_n(r) + B_j^{(i)} Q_n(r) \qquad r_{j-1} \geq r \geq r_j \tag{3.42}$$

dit geldt voor $j = 2..5$ met r_i als de straal van bolschil i $(i = 1..5)$, r_1 is dus de straal van de huid en $r_5 = 0$. In deze vergelijking geldt verder dat $\sigma_N = \sigma_5$ en dus gelijk aan de radiële component van de conductiviteit in de hersenen, $B_N = B_5$ is de waarde van de constante, die hieronder wordt gegeven, in de hersenen, r is de plaats van waaruit we kijken en r_0 de plaats waar de bron zit.
Verder geldt in vergelijking (3.42) dat

$$P_n = r^{\nu_n} \qquad en \qquad Q_n = r^{-\nu_n - 1} \tag{3.43}$$

met

$$\nu_n = \frac{1}{2}\{-1 + \sqrt{1 + 4n(n+1)}\} = n. \tag{3.44}$$

Voor het oplossen van het probleem waren aansluitvoorwaarden en een randvoorwaarde gegeven. Deze gaan we gebruiken om de constanten $A_j^{(i)}$ en $B_j^{(i)}$ te bepalen.

De aansluitvoorwaarden leveren de volgende twee vergelijkingen de continuïteit van ψ geeft:

$$A_{j+1}^{(i)} P_n(r_j) + B_{j+1}^{(i)} Q_n(r_j) = A_j^{(i)} P_n(r_j) + B_j^{(i)} Q_n(r_j), \tag{3.45}$$

en de continuïteit van σ maal de normaalafgeleide van de potentiaal ψ levert:

$$\sigma_{j+1}\{A_{j+1}^{(i)} P'_n(r_j) + B_{j+1}^{(i)} Q'_n(r_j)\} = \sigma_j\{A_j^{(i)} P'_n(r_j) + B_j^{(i)} Q'_n(r_j)\}. \tag{3.46}$$

met r_j de straal van bol j. (In het vervolg laten we de boven indices (i), en het argument r_j even weg.) De vergelijkingen kunnen we in matrix-vector notatie schrijven en dat levert

$$\begin{pmatrix} A_{j+1} \\ B_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_n & Q_n \\ \sigma_{j+1} P'_n & \sigma_{j+1} Q'_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P_n & Q_n \\ \sigma_j P'_n & \sigma_j Q'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_j \\ B_j \end{pmatrix}, \tag{3.47}$$

of eenvoudiger

$$\begin{pmatrix} A_{j+1} \\ B_{j+1} \end{pmatrix} = M_{j,n}(r_j) \begin{pmatrix} A_j \\ B_j \end{pmatrix}. \tag{3.48}$$

Er zijn hier 8 onbekenden ($A_2..A_5$ en $B_2..B_5$) en vergelijking (3.48) levert 6 vergelijkingen voor beide (i) en dus zijn er nog twee voorwaarden nodig (voor beide (i)) die moeten gelden om de oplossing te kunnen bepalen. Hiervoor gebruiken we dat de potentiaal eindig is in de oorsprong en de normaalafgeleide van de potentiaal gelijk is aan nul op de buitenste rand (de randvoorwaarde). Neem daarom

$$\lim_{r \to 0} R_n^{(1)}(r) \quad eindig \tag{3.49}$$

en

$$\lim_{r \to r_1} R'^{(2)}_n(r) = 0. \tag{3.50}$$

In vergelijking (3.49) nemen we als boven index (1), omdat we daar naar nul toe lopen en er dus altijd een r_0 is die groter is dan r en kijken we dan naar vergelijking (3.40) dan zien we dat we boven index (1) moeten gebruiken. De reden waarom we in vergelijking (3.50) als boven index (2) nemen komt tot stand met een zelfde soort redenering, alleen vinden we nu altijd een r die groter is dan r_0.
De constanten $A^{(i)}$ en $B^{(i)}$ die ervoor zorgen dat, $R_n^{(1)}$ aan de voorwaarde (3.49) voldoet en $R_n^{(2)}$ aan (3.50) voldoet, kunnen nu bepaald worden.
Dit houdt in dat de extra twee vergelijkingen voor i=1 dan worden:

$$\begin{pmatrix} A_N^{(1)} \\ B_N^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.51}$$

$B_N^{(1)}$ is gelijk aan 0, omdat anders vergelijking (3.49) niet geldt en $A_N^{(1)}$ kiezen we gelijk aan 1.
Voor de twee extra vergelijkingen voor i=2 moet gelden:

$$\begin{pmatrix} A_N^{(2)} \\ B_N^{(2)} \end{pmatrix} = \prod_{j=3}^{N} M_{j,n} \begin{pmatrix} -Q'_n(r_1)/P'_n(r_1) \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.52}$$

met $A_2^{(2)}$ zoals boven, omdat vergelijking (3.42) aan voorwaarde (3.50) moet voldoen en $B_2^{(2)}$ kiezen we gelijk aan 1. (N is hier waarde van de binnenste bol en in ons geval dus gelijk aan 5)
Met deze vergelijkingen kunnen A en B bepaald worden en hebben we alles wat we moeten weten om de analytische oplossing (3.36) van het bolschillen model met een dipoolbron te kunnen bepalen.
(Voor de volledige uitwerking zie [5] blz. 24-31)

Hoofdstuk 4

Boundary Element Methode

4.1 Wat is de Boundary Element Methode (BEM)?

Naast de Eindige Elementen Methode(EEM), de Eindige Differentie Methode(EDM) en de Eindige Volume Methode(EVM) is de Boundary Element Methode(BEM) een veel gebruikte numerieke methode om partiële differentiaalvergelijkingen op te lossen.
De Boundary Element Methode wordt gebruikt voor het oplossen van integraalvergelijkingen. Daartoe wordt een oppervlakte integraal gediscretiseerd. Dat doen we door allereerst het oppervlak in elementen te verdelen op dezelfde wijze als gebruikelijk in de EEM.

4.2 Voor- en nadelen van de BEM

In deze paragraaf zullen we enkele voor- en nadelen van de Boundary Element Methode bespreken.

4.2.1 De voordelen

Het grote voordeel van de BEM is dat de dimensie met 1 verminderd wordt. De BEM wordt meestal gebruikt bij problemen die te maken hebben met snel fluctuerende functies. Als we zo'n probleem oplossen met een andere oplosmethode dan blijkt dat het volume met enorm veel punten moet worden gediscretiseerd. Dit wordt met de BEM voorkomen en dus is dat een enorme reductie van de data die moet worden meegenomen.
Willen we alleen weten wat de oplossing voor de potentiaal op de oppervlakken is, dan is de BEM een goede methode om daarvoor te gebruiken.

4.2.2 De nadelen

Net als bij iedere methode kleven er nadelen aan deze methode. Enkele daarvan zullen we hieronder bespreken.
Eén van de grootste nadelen is dat we met een volle matrix te maken hebben voor het oplossen van het stelsel vergelijkingen. Het oplossen van het stelsel $Ax = b$ zal daarom meer tijd kosten dan wanneer we te maken hebben met een ijle matrix. Het opslaan van volle matrices kost ook meer geheugenruimte dan het opslaan van ijle matrices. Dit kan dus een probleem zijn als we te maken hebben met een probleem waarvoor de afmetingen van A heel groot zijn.
Een ander probleem is dat de afleiding van de Boundary Integral Equation (BIE) moeilijker is, in vergelijking met andere methodes. Ook kunnen de BIE van niet-lineaire problemen domein integralen hebben die het gebruik van domein elementen voor de evaluatie nodig hebben. Daardoor verlies je het grote voordeel van de dimensie reductie.
Verder is het nadeel van de BEM dat er alleen naar isotrope problemen kan worden gekeken, omdat er een fundamentele oplossing moet zijn. Dit heeft tot gevolg dat we te maken krijgen met singulariteiten waar we rekening mee moeten houden.

4.3 Algemene Boundary Element Methode

Stel we moeten het volgende model oplossen:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u(x,y,z) + \phi(x,y,z) &= 0, && \qquad (4.1)\\ u &= \overline{u} && op \quad S_u,\\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \overline{q} && op \quad S_q. \end{aligned}$$

Hier zijn de functies ϕ, $\overline{u}$, $\overline{q}$ gegeven, u de onbekende en de oppervlakken S_u en S_q suboppervlakken van S. Een exacte oplossing $u(x,y,z)$ bestaat als de volgende relatie voor willekeurige gewichtsfuncties u^*, v^* en w^* bestaat:

$$\int_V u^*(\nabla^2 u + \phi)dV + \int_{S_u} v^*(u - \overline{u})dS + \int_{S_q} w^*(\frac{\partial u}{\partial n} - \overline{q})dS = 0. \qquad (4.2)$$

dit is de variationele vorm van (4.1). Formulering (4.2) staat in de literatuur bekend als de sterke formulering. Het voordeel van deze formulering t.o.v. (4.1) is dat de oplossing aan iets minder gladheidseisen moet voldoen.

4.3.1 Oplossing die aan de randvoorwaarden voldoen

Indien u exact voldoet aan de randvoorwaarden, dan gaat (4.2) over in:

$$\int_V u^*(\nabla^2 u)dV + \int_V u^* \phi dV = 0. \tag{4.3}$$

Met de de eerste identiteit van Green (zie bijlage A) krijgen we

$$-\int_V \nabla u^* \cdot \nabla u dV + \int_S u^* \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_V u^* \phi dV = 0 \tag{4.4}$$

die de eerste zwakke vorm aangeeft. Deze vorm wordt meestal in de EEM gebruikt. Tevens vormt hij de basis voor veel existentie en eenduidigheids bewijzen.
Een tweede zwakke vorm krijgen we als we de tweede identiteit van Green (bijlage A) toepassen:

$$\int_V (\nabla^2 u^*) u dV + \int_S u^* \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int_S \frac{\partial u^*}{\partial n} u dS + \int_V u^* \phi dV = 0 \tag{4.5}$$

die de invers gewogen residu uitdrukking wordt genoemd. Deze laatste uitdrukking is met name geschikt voor de BEM. In dit geval hoeven aan u slechts lichte gladheidseisen te worden opgelegd (u continu), terwijl de testfunctie u^* wel 2 maal differentieerbaar moet zijn.

4.3.2 Randintegraal vergelijking

Als we in vergelijking (4.5) de functie u^* kiezen die voldoet aan:

$$\nabla^2 u_i^* + 4\pi\delta(x - x_i, y - y_i, z - z_i) = 0 \tag{4.6}$$

invullen dan gaat de vergelijking (4.5) over in de onderstaande randintegraal vergelijking:

$$-C_i u_i - \int_S \frac{\partial u_i^*}{\partial n} u dS + \int_S u_i^* \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_V u_i^* \phi dV = 0. \tag{4.7}$$

met $u_i = u(x_i, y_i, z_i)$. Vullen we (4.6) in dan geldt dat:

(i) $C_i = 4\pi$ voor punten (x_i, y_i, z_i) binnen volume V,
(ii) $C_i = 0$ als het punt buiten volume V ligt,
(iii) $C_i = \Omega_i$ (de ruimtehoek) als het punt op de rand van volume V ligt,
(iv) $C_i = 2\pi$ als het punt op de rand van V ligt en de rand glad is.

Vergelijking (4.7) wordt een Boundary Integral Equation (BIE) genoemd.

4.3.3 Randelement vergelijking

Laat het oppervlak S behorende bij volume V verdeeld zijn in n_e randelementen S_e dan geldt:

$$\int_S f dS = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{S_e} f dS. \tag{4.8}$$

Vergelijking (4.7) gaat dan over in:

$$\begin{aligned} C_i u_i \quad + \quad & \sum_{e=1}^{n_e} \int_{S_e} \frac{\partial u_i^*}{\partial n} u dS \\ = \quad & \sum_{e=1}^{n_e} \int_{S_e} u_i^* \frac{\partial u}{\partial n} dS + b_i \end{aligned} \tag{4.9}$$

met

$$b_i = \int_V u_i^* \phi dV. \tag{4.10}$$

In deze vergelijkingen zijn u_i^*, $\frac{\partial u_i^*}{\partial n}$, ϕ en C_i gegeven. Verder is u op een deel van de rand onbekend en daar is $\frac{\partial u}{\partial n}$ gegeven. Op de rest van de rand is $\frac{\partial u}{\partial n}$ onbekend en u gegeven.

Integraalvergelijking (4.9) vormt de basis voor de BEM. Allereerst worden u en $\frac{\partial u}{\partial n}$ op de rand benaderd door per randelement een polynoom te kiezen. Er geldt dan:

$$u(x, y, z) \approx \sum_{j=1}^{m} \hat{u}_j N_j(x, y, z) \tag{4.11}$$

en

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z) \approx \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} N_j(x, y, z) \tag{4.12}$$

met m het totaal aantal knooppunten en $N_j(x, y, z)$ de basisfuncties of shapefuncties op het oppervlak en $\hat{u}_j$ en $\frac{\partial \hat{u}}{\partial n}$ de veldfunctieparameters. Deze

vormen meestal een benadering van de waarde van u en $\frac{\partial u}{\partial n}$ in een knooppunt. De knooppunten zijn zo gekozen dat altijd geldt dat of u onbekend is en $\frac{\partial u}{\partial n}$ gegeven is of dat u gegeven en $\frac{\partial u}{\partial n}$ onbekend is.
Nu hebben we m vergelijkingen met 2m onbekende, maar op een deel van de rand is u gegeven en op de rest van de rand $\frac{\partial u}{\partial n}$. Dit levert m extra vergelijkingen waardoor we te maken hebben met 2m vergelijkingen met 2m onbekende.
De basisfuncties N_j hebben een lokaal karakter en zijn slechts in enkele elementen ongelijk aan nul.
In het geval van lineaire of kwadratische driehoeken vormen de hoekpunten respectievelijk de hoekpunten en de middens van de zijden de knooppunten. De basisfuncties N_j worden dan als volgt gedefinieerd:

$N_j(\mathbf{x}_i) = \delta_{ij}$ voor alle knooppunten
$N_j(\mathbf{x})$ is lineair (of kwadratisch) per driehoek.

We hebben nu een stelsel vergelijkingen waarbij op een deel van de rand u gegeven is en $\frac{\partial u}{\partial n}$ onbekend is en op de rest van de rand is het omgekeerde het geval.
Teneinde evenveel vergelijkingen als onbekenden te krijgen wordt voor $\mathbf{x}_i$ in (4.6) precies de knooppunten gekozen. Met andere woorden (4.6) wordt alleen toegepast voor punten $\mathbf{x}_i$ op de rand. Wat nog rest is het berekenen van de integralen in (4.9) en (4.10) en vervolgens het oplossen van het stelsel.

4.3.4 Constante randelementen

In het meest eenvoudige geval, het geval van constante elementen, worden de volgende benaderingen beschouwd:

- Het geometrische middelpunt van elk element wordt als de enige knoop beschouwd die het element representeert.
- De waarde van de parameters u en $\frac{\partial u}{\partial n}$ in het middelpunt van het element worden over het hele element als constant beschouwd, i.e. $u|_{S_e} \approx u_e$ en $\frac{\partial u}{\partial n}|_{S_e} \approx q_e$.
- Voor constante randelementen geldt dat $N_j(\xi, \eta) = 1$.

4.3.5 Integratie

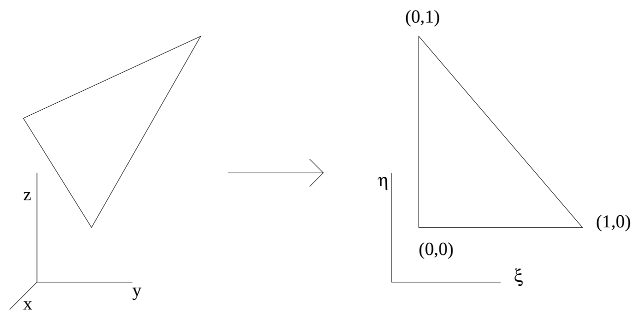
Willen we de integralen die overblijven berekenen dan kunnen we dat doen door een coördinaten transformatie toe te passen. De overgebleven integralen kunnen analytisch dan wel numeriek worden bepaald. De numerieke benadering wordt toegepast als de integralen niet analytisch te bepalen zijn. In het onderstaande zullen we eerst de transformatie bespreken en daarna de numerieke integratie van de moeilijke termen.

Transformatie

Een oppervlakte randelement gedefinieerd in m geometrische punten in het globale x-y-z-vlak, mag getransformeerd worden in een 2-dimensionaal ξ-η-vlak door gebruik te maken van de volgende parameter vergelijkingen:

$$\begin{aligned} x(\xi,\eta) &= \sum_{j=1}^{m} x_j N_j(\xi,\eta), \\ y(\xi,\eta) &= \sum_{j=1}^{m} y_j N_j(\xi,\eta), \\ z(\xi,\eta) &= \sum_{j=1}^{m} z_j N_j(\xi,\eta). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Meestal wordt voor het getransformeerde element een simpele basis vorm gekozen zoals een rechthoekige driehoek met een rechte hoek in (0,0) en de eenheidslengte langs de assen (zie figuur 4.1).



Figuur 4.1: transformatie naar eenheidsdriehoek

Indien de transformatie gebaseerd is op dezelfde basis(shape) functies als waarmee de oplossing benaderd wordt, spreekt men over een isoparametrische transformatie. Voordeel hiervan is dat ook driehoeken met een kromme rand afgebeeld kunnen worden op een rechte rand, althans als een kwadratische benadering is gekozen.

Om de randintegralen nu helemaal om te kunnen schrijven moeten we de dS term nog transformeren. Daarvoor geldt:

$$dS = Jd\xi d\eta \tag{4.14}$$

met

$$J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2 + J_z^2}. \tag{4.15}$$

Hierbij is

$$\begin{aligned} J_x &= \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right), \qquad (4.16) \\ J_y &= \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right), \\ J_z &= \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right). \end{aligned}$$

We nemen aan dat het standaard element S_e een driehoek is waarvoor dan het volgende geldt:

$$\int_{S_e} f(x,y,z)dS = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} f(\xi,\eta)Jd\xi d\eta. \tag{4.17}$$

Numerieke integratie

Omdat sommige integralen niet exact uit te rekenen zijn wordt de integraal, in het getransformeerde element, benaderd met een integratieregel.
De algemene vorm van een integratieregel luidt:

$$\int_e Int(\xi)d\xi = \sum_{k=1}^{r} w_k Int(\xi_k) \tag{4.18}$$

met:

- r het aantal steunpunten in de integratieregel,
- w_k de gewichten,

- ξ_k de steunpunten,
- Int(ξ) de integrand.

Het is gebruikelijk om twee typen te onderscheiden:

1. Newton-Côtes-formules

Onder deze formules zullen we een formule die gebaseerd is op de interpolatie die gekozen is in de BEM benadering verstaan. Dat wil zeggen de integrand wordt met het zelfde polynoom benaderd als de oplossing en vervolgens wordt deze polynoombenadering geïntegreerd. In formulevorm:

$$\begin{aligned} \int_e Int(\xi)d\xi &\approx \sum_{k=1}^{r} \int_{e_k} Int(\xi_k)\varphi_k(\xi)d\xi \\ &= \sum_{k=1}^{r} \Big\{ \int_e \varphi_k(\xi)d\xi Int(\xi_k) \Big\} \end{aligned} \tag{4.19}$$

Dus $w_k = \int_e \varphi_k(\xi)d\xi$ (zie [2]).
De Newton-C$\hat{o}tes$-formule behorende bij het lineaire element in $\mathbb{R}^2$ wordt gegeven door:

$$\int_e Int(\xi)d\xi = \frac{|\triangle|}{6}[Int(\xi_1) + Int(\xi_2) + Int(\xi_3)] \tag{4.20}$$

met

$$|\triangle| = 2 \times oppervlakdriehoek \tag{4.21}$$

en ξ_1, ξ_2, ξ_3 de drie hoekpunten.

2. Gauss-formules

Gauss-formules zijn formules waarbij de steunpunten en gewichten zo gekozen zijn dat een hoge graad van nauwkeurigheid bereikt wordt. Alhoewel de integraal beter benaderd wordt vergt de evaluatie meer tijd. Voor enkele standaardelementen worden de gewichten en steunpunten van Gauss-regels in tabellen gegeven ([2],p.90).

4.3.6 Lineaire randelementen

Eén van de bruikbare oppervlakte elementen is een 3-knoopsdriehoek met lineaire basisfuncties waarvoor geldt dat $N_i = \lambda_i$ met:

$$\lambda_i(\xi) = a_0^i + a_1^i \xi + a_2^i \eta \tag{4.22}$$

en

$$\begin{aligned} a_0^i &= \frac{\xi_{i+}\eta_{i-} - \xi_{i-}\eta_{i+}}{\triangle}, \\ a_1^i &= \frac{\eta_{i+} - \eta_{i-}}{\triangle}, \\ a_2^i &= \frac{\xi_{i-} - \xi_{i+}}{\triangle}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Verder is hier

- $i+$ de cyclische opvolger van i,
- $i-$ de cyclische voorganger van i,
- dus $0- = 2$, $1+ = 2$, $2+ = 0$ etc,

en geldt:

$$\triangle = \det \begin{pmatrix} 1 & \xi_0 & \eta_0 \\ 1 & \xi_1 & \eta_1 \\ 1 & \xi_2 & \eta_2 \end{pmatrix}. \tag{4.24}$$

De lineaire basisfuncties uit (4.22) volgen uit de eis dat:

$$N_i(\xi_j) = \delta_{ij} \tag{4.25}$$

4.3.7 Kwadratische randelementen

We kunnen ook 6-knoops driehoekselementen gebruiken, deze worden gegeven door een combinatie van lineaire basisfuncties. De basisfuncties hier worden dan:

$$N_i = \lambda_i(2\lambda_i - 1) \qquad en \qquad N_{ii+} = 4\lambda_i\lambda_{i+}. \tag{4.26}$$

Verder geldt dat de hoekpunten hetzelfde zijn als bij een 3-knoops element en de overige worden bepaald door:

$$\xi_{ii+} = \frac{1}{2}(\xi_i + \xi_{i+}) \tag{4.27}$$

De Newton-Côtes integratieregel wordt in dit geval beschreven met:

$$\int_e f dx = \frac{|\triangle|}{6}\Big(f(\xi_{01}) + f(\xi_{12}) + f(\xi_{20})\Big) \tag{4.28}$$

(Voor meer zie [2], hoofdstuk 10.)

4.3.8 Oplossen van het lineaire stelsel

Als we de randelement vergelijking nu helemaal hebben uitgeschreven blijft er een stelsel lineaire vergelijkingen over dat nog opgelost dient te worden. Het lineaire stelsel dat opgelost moet worden ziet er als volgt uit:

$$A\mathbf{x} = B\mathbf{y} + c \tag{4.29}$$

met

$$\mathbf{x} = \Big(\hat{u}_1 ... \hat{u}_m\Big)^T, \tag{4.30}$$

en

$$\mathbf{y} = \Big(\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial n} ... \frac{\partial \hat{u}_m}{\partial n}\Big)^T \tag{4.31}$$

Verder volgt na het invullen van (4.11) en (4.12) in (4.9) dat

$$A = (a)_{ij} = \Big(C_i \delta_{ij} + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{S_e} \frac{\partial u^*}{\partial n}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x_0}) N_j(\mathbf{x_0}) dS\Big), \tag{4.32}$$

$$B = (b)_{ij} = \Big(\sum_{e=1}^{n_e} \int_{S_e} u^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{x_0}) N_j(\mathbf{x_0}) dS\Big) \tag{4.33}$$

en

$$c = (c)_i = \int_V u^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{x_0}) \phi(\mathbf{x_0}) dV. \tag{4.34}$$

Vergelijking (4.29) kunnen we netter schrijven door de onbekenden naar één kant te halen. Dit levert dat het volgende stelsel op:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & -B_{12} \\ A_{21} & -B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_{onbekend} \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial n}_{onbekend} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{12} & -B_{11} \\ A_{22} & -B_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_{bekend} \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial n}_{bekend} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \tag{4.35}$$

met A_{kl}, B_{kl} en c_k als resp. (4.32), (4.33) en (4.34). Verder is gegeven dat de knooppunten zo gekozen zijn dat in elke knoop of u of $\frac{\partial u}{\partial n}$ gegeven is. Laat u in p punten onbekend zijn dan is $\hat{u}_{onbekend}$ een vector met p elementen en $\frac{\partial \hat{u}}{\partial n}_{onbekend}$ een vector met $m - p$ elementen.

De integralen in deze vergelijking worden oplost op de manier beschreven in (4.3.5).
Hier hebben we met een volle matrix te maken. Dit volgt uit het feit dat de gewichtsfuncties een niet lokale structuur hebben en het volgt eveneens uit (4.32) en (4.33). Hebben we een stelsel met een volle matrix dan gebruiken we meestal een directe oplosmethode.

4.4 De BEM voor ons probleem

Nu we de algemene regels van de Boundary Element Methode (BEM) bekeken hebben, gaan we in deze paragraaf bekijken hoe we de BEM kunnen gebruiken voor ons probleem.

Wat we in ons geval willen weten is wat de potentiaal op de hoofdhuid is, dat wil zeggen op de rand van het hoofd. Die potentiaal is ontstaan door de aanwezigheid van een bron in de hersenen (de hersenactiviteit). Er is dus een situatie ontstaan waarbij we door de aanwezigheid van een bron in een volume, het resultaat op de rand, van dat volume, willen weten. We lossen dit probleem op met de Boundary Element Methode.

4.4.1 Randintegraal vergelijking

Als we de BEM willen gebruiken hebben we allereerst een integraalvergelijking nodig over het oppervlak. Deze hebben we al afgeleid in paragraaf 3.3. Hier is een stelsel integraalvergelijkingen, omdat we naar meerdere compartimenten kijken. Deze integraalvergelijking was:

$$\begin{aligned}(\Omega^+\sigma_k^+ + \Omega^-\sigma_k^-)\psi(\mathbf{x}) \quad &= \quad -\sum_{j=1}^{5}\sigma_j\int_{V_j}\frac{1}{R}\nabla^2\psi dV + \\ &\quad + \sum_{j=1}^{4}(\sigma_j^- - \sigma_j^+)\int_{S_j}\psi_j(\mathbf{x_0})K_j(\mathbf{x},\mathbf{x_0})\cdot d\mathbf{S_j}\end{aligned} \tag{4.36}$$

met

$$K_j(\mathbf{x},\mathbf{x_0}) \quad = \quad -\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x_0}|}, \qquad \mathbf{x}\in\mathbf{S_j} \tag{4.37}$$

voor $k = 1..4$.
Net als in het algemene geval hebben we gebruik gemaakt van een delta functie, een puntbron, als gewichtsfunctie. Verder is hier C_i gelijk aan Ω, want we willen weten wat $\mathbf{x}$ op de rand is.

4.4.2 Randelement vergelijking

Vervolgens gaan we de randintegraal vergelijking omschrijven in een randelement vergelijking. Dit doen we door de oppervlakken S_i op te delen in randelementen S_{ie} met

$$S_i = \bigcup_{e=1}^{n_{ie}} S_{ie}, \tag{4.38}$$

waarbij n_{ie} het aantal randelementen is waarin oppervlak S_i in verdeeld is. We krijgen dan als randelement vergelijking:

$$\begin{aligned}(\Omega^+\sigma_k^+ + \Omega^-\sigma_k^-)\psi(\mathbf{x}) &= -\sum_{j=1}^{5}\sigma_j\int_{V_j}\frac{1}{R}\nabla^2\psi dV + \\ &\quad + \sum_{j=1}^{4}\sum_{e=1}^{n_{je}}(\sigma_j^- - \sigma_j^+)\int_{S_{je}}\psi|_{S_{je}}K_j(\mathbf{x},\mathbf{x_0})\cdot d\mathbf{S_j},\end{aligned} \tag{4.39}$$

met $K_j(\mathbf{x},\mathbf{x_0})$ als in (4.37).

In vergelijking met het algemene geval valt het hier op dat er geen termen $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ meer zijn. Dit komt doordat deze termen op de scheidingsoppervlakken tegen elkaar weg vallen en op de rand is gegeven dat $\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0$.

Nu we de randelement vergelijking hebben kunnen we verder op de manier zoals beschreven is in het algemene stuk. We moeten er alleen rekening mee houden dat we te maken hebben met verschillende schillen die invloed op elkaar hebben.
Om te beginnen moeten we elke schil met driehoekjes beleggen en opmerken dat het aantal punten op de verschillende schillen niet gelijk hoeft te zijn. De potentiaal per schil wordt dan benaderd, als we naar schil k kijken, door:

$$\psi_k(x,y,z) \approx \sum_{j=1}^{m_k}\hat{\psi}_{k_j}N_{k_j}(x,y,z) \tag{4.40}$$

Vullen we dit voor $k = 1..4$, in (4.39), in dan krijgen we een lineair stelsel van de volgende vorm:

$$Cy - Ay = b, \tag{4.41}$$

met

$$\begin{aligned} y &= (\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2, \hat{\psi}_3, \hat{\psi}_4)^T, \\ \hat{\psi}_k &= \psi_k(\mathbf{x}_j), \quad j = 1..m_k \end{aligned} \tag{4.42}$$

en

$$\begin{aligned} b &= (\hat{D}_1, \hat{D}_2, \hat{D}_3, \hat{D}_4)^T, \\ \hat{D}_k &= D(\mathbf{x}_j), \quad j = 1..m_k \\ D(\mathbf{x}) &= -\sum_{j=1}^{5} \int_{V_j} \frac{v_j}{R} dV, \end{aligned} \tag{4.43}$$

met R een functie van $\mathbf{x}$ en $\mathbf{x_0}$ de integratievariabele. Vullen we echter in dat we te maken hebben met een een dipool in V_5 dan wordt $D(\mathbf{x})$ vereenvoudigd tot:

$$D(\mathbf{x}) = \mathbf{M} \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x_{dip}})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x_{dip}}|^3} \tag{4.44}$$

met $\mathbf{x_{dip}}$ de plaats van de bron in volume V_5. Verder is

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}, \\ C_k &= (\Omega^+ \sigma_k^+ + \Omega^- \sigma_k^-) I. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Na het invullen van (4.40) kregen we dus een lineair stelsel met een matrix A, deze matrix is als volgt gedefinieerd:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix}, \\ A_{ij} &= \Big(a\Big)_{dl} \qquad d = 1..m_i, l = 1..m_j \\ &= \sum_{e=1}^{n_{je}} (\sigma_j^- - \sigma_j^+) \int_{S_{je}} N_{jl}(\mathbf{x_0}) K_j(\mathbf{x_d}, \mathbf{x_0}) \cdot d\mathbf{S_j}, \\ \mathbf{x_d} &\in S_i. \end{aligned} \tag{4.46}$$

Dit wil zeggen dat als we een knooppunt op schil i kiezen de waarde van $\hat{\psi}$ afhankelijk van schil j is. Dit is weergegeven in matrix A_{ij} en omdat we te maken hebben met 4 schillen moet dit gelden voor $i, j = 1....4$. Daar we de potentiaal op de hele schil willen weten moeten we naar alle knooppunten kijken die op schil i liggen en dat zijn er m_i. Voor alle m_i punten geldt dat ze afhankelijk zijn van de potentiaal op schil j, die bedekt is met m_j punten. Matrix A_{ij} is dus een $m_i \times m_j$ matrix.

Verder merken we op dat, als we naar een punt op schil i kijken, die mede afhankelijk is van schil j, het voor kan komen dat $\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_i$. Dat wil zeggen dat we dan te maken hebben met een singuliere integrand en die komt tot uitdrukking in de submatrices A_{ii} op de hoofddiagonaal.
Het bepalen van matrix $G = C - A$ doen we weer met behulp van paragraaf 4.3.5. Het probleem is hier echter dat we te maken hebben met een singuliere integrand op de hoofddiagonaal van G en dus hoe we die uit moeten rekenen. Dit probleem kunnen we uit de weg gaan door gebruik te maken van het feit dat de som van de rijen gelijk aan nul is. Dat wil zeggen dat

$$\sum_{j=1}^{N} g_{ij} = 0 \qquad (4.47)$$

of met andere woorden

$$g_{ii} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} g_{ij} \qquad (4.48)$$

met N het totaal knooppunten. Deze relatie komt door het feit dat geldt dat als $\sum_j N_j(x, y, z) = 1$ er een eigenvector $(1, 1, .., 1)^T$ van G is, met als eigenwaarde 0 (zie [6]). De gegeven relatie geldt alleen in dit specifieke geval, omdat we te maken hebben met een homogene *Neumann* voorwaarde. Een ander voordeel van deze relatie is dat de ruimtehoek $\Omega(\mathbf{x})$ niet hoeven te bepalen, want deze komt tenslotte ook alleen maar op de hoofddiagonaal voor.

Hoofdstuk 5

Doel van het onderzoek

In de voorgaande hoofdstukken hebben we iets over het probleem, dat we willen oplossen, gezien en de methode die we daarvoor zullen gaan gebruiken, de Boundary Element Methode. In dit hoofdstuk zullen we in het kort bespreken wat het verdere doel van het onderzoek is en hoe we dat gaan aanpakken.

Het doel van dit onderzoek is op een nauwkeurige manier de hersenactiviteit te localiseren met de BEM.
Op dit moment wordt de BEM reeds gebruikt om het inverse probleem te helpen oplossen. Daarbij wordt het stelsel $Ax = b$ opgelost door A^{-1} te berekenen en deze telkens te gebruiken om de vector x, bij verschillende vectoren b, uit te rekenen.
Men wil echter de nauwkeurigheid van het voorwaartse probleem opvoeren, omdat deze mede bepalend is voor de nauwkeurigheid van het inverse probleem.

5.1 Mogelijke methoden voor het verbeteren van de nauwkeurigheid

In deze paragraaf zullen we enkele mogelijke oplossingen van ons probleem in het kort beschrijven.

5.1.1 Verfijning van het grid

De eerste mogelijkheid is het verfijnen van het grid. Dit roept natuurlijk ook weer vragen op. Hoe fijn moet het grid zijn willen we een bepaalde

nauwkeurigheid halen? Kan de computer het probleem dan nog aan en duurt het dan niet te lang? Hoe hangt de nauwkeurigheid van het aantal discretisatie punten en de interpolatie functie af?
Er moet hier wel opgemerkt worden dat, als we naar een realistisch model kijken, we te maken hebben met een beperkt aantal discretisatie punten, die verkregen zijn uit een MRI-scan (MRI = Magnetic Resonance Imaging). De vraag is dan, hoe fijn moet de MRI-scan zijn willen we een nauwkeurigheid van een bepaalde orde en wordt het probleem dan niet te groot?

5.1.2 Lokale verfijning

Een andere oplossing zou kunnen zijn het toepassen van lokale verfijning. We passen alleen lokale verfijning toe als we lokaal grote onnauwkeurigheden verwachten. In ons probleem zou dat kunnen betekenen dat er een lokale verfijning moet plaats vinden op de plaats waar de bron het dichtst bij het oppervlak zit. Immers verwachten we dat in die omgeving de potentiaal op een klein interval erg varieert.
Het probleem met lokale verfijning is echter dat we de matrix A telkens opnieuw moeten uitrekenen als we de bron op een andere plaats nemen.
Dit probleem kunnen we voorkomen door gebruik te maken van de kennis die men de afgelopen jaren heeft vergaard. Hierdoor weten dus al waar de bron ongeveer komt te zitten als we een bepaalde stimulatie van de hersenen uitvoeren. Zo zorgt een visuele stimulatie ervoor dat de hersenactiviteit ergens in het achterste deel van het hoofd zit. Kijken we echter naar geheel nieuwe onderzoeks gebieden dan hebben we het probleem, van welk gebied we gaan verfijnen, wel. Dat geeft extra rekentijd en dat willen we vermijden.

5.1.3 Gekromde randelementen

Een idee dat nog verder uitgewerkt dient te worden is om in plaats van platte, gekromde driehoekjes te nemen. Dit betekent dat de driehoekjes iets gekromd zijn, maar de knooppunten zijn nog wel hetzelfde. Als dit gedaan wordt dan is het rooster een betere benadering van het oppervlak en we hopen dat hiermee de oplossing nauwkeuriger wordt.
Een voordeel van dit alternatief is dat de matrix A even groot blijft en maar één keer uitgerekend hoeft te worden.
Een probleem zou hier echter kunnen zijn dat we dan meer gegevens nodig hebben dan alleen de waarde van de potentiaal in de knooppunten, waardoor we polynomen van een hogere orde nodig hebben.
Ook hier kunnen we ons weer afvragen hoe de nauwkeurigheid van het aantal

discretisatie punten en de interpolatie functie afhangt. Verder kunnen we ons afvragen hoe we een gekromd driehoekje moeten definiëren?

5.1.4 EEM in plaats van BEM

Een alternatief zou kunnen zijn om in plaats van de BEM toe te passen, gebruik te maken van de EEM.
Het verschil tussen deze twee methodes is dat we bij de BEM een relatief kleine, maar volle matrix hebben en bij de EEM hebben we te maken met een grote, maar ijle matrix. De vraag is dan of we toch niet beter de EEM kunnen gebruiken? Heeft dit praktisch gezien wel zin, daar we de potentiaalverdeling toch alleen op het oppervlak willen weten?

5.2 Testprobleem

Het testprobleem dat we zullen gaan bekijken is een vergelijking met het bolschillen model. Daar weten we wat de analytische oplossing (zie paragraaf 3.4) en kunnen we deze vergelijken met de oplossing verkregen met de BEM. Het bolschillen model lossen we op voor respectievelijk 1 schil, 3 schillen en 4 schillen, waarbij we bij het 4 schillen model te maken hebben met dunne, goed geleidende lagen.

5.3 Tijdschema

Uit het voorgaande blijkt wel dat er teveel vragen zijn die er in één afstudeer periode opgelost kunnen worden en daarom moeten we dus prioriteiten stellen.
Het onderzoek richt zich vooral op de BEM en we zullen ons er niet mee bezich houden of de EEM een betere methode is of niet. Verder zullen we in eerste instantie de mogelijk van lokale verfijning ook niet onderzoeken, omdat het ons, in eerste instantie, niet de ideale oplossing van het probleem lijkt.

In de komende maanden zullen we ons voornamelijk bezig houden met de vragen die verfijning van het grid en gekromde randelementen met zich meebrengen. En daar verwachten we ongeveer 24 weken mee bezig te zijn, waarbij we $\pm$ 7 met verfijning met de vragen over verfijning van het grid bezich zijn en $\pm$ 17 weken met de gekromde randelementen. Verder moeten we nog een week of 3 uittrekken voor de verslaglegging, met andere woorden rekenen we er dus op dat het onderzoek eind juni 1998 is afgerond.

Mocht alles sneller gaan dan gepland dan kunnen we de extra tijd gebruiken voor wat uitvoeriger simulaties en eventueel naar het inverse probleem kijken.

Bibliografie

[1] A.El-Zafrany. *Techniques of the Boundary Element Method*, volume 5 of *Ellis Horwood Series*. Ellis Horwood, Bedford, 1997.

[2] J.van Kan A.Segal. *Numerieke methoden voor partiële differentiaalvergelijkingen*. Delftse Uitgevers Maatschappij, Delft, 1993.

[3] Prof.dr.H.G.Meijer/dr.M.G.de Bruin. *Bijzondere Functies*. Technische Universiteit Delft, collegediktaat a56.

[4] W. Buijze. *Inleiding Elektriciteit*. Delftse Uitgevers Maatschappij, Delft, 1990.

[5] Jan C. de Munck. *A mathematical and physical interpretation of the electromagnetic field of the brain*. PhD thesis, University of Amsterdam, 1989.

[6] J.C. de Munck. A linear discretization of the volume conductor boundary integral equation using analytically integrated elements. *IEEE*, 39(9):986–989, 1992.

[7] G.C. Herman. *Mathematische methoden uit de fysica II*. Technische Universiteit Delft, collegediktaat a262.

[8] A.C.L.Barnard I.M.Duck and M.S.Lynn. The application of electromagnetic theory to electrocardiology, 1. derivation of the integral equations. *Biophys. J.*, 7:443–462, 1967.

[9] Jukka Sarvas. Basic mathematical and electromagnetic concepts of the biomagnetic inverse problem. *Phys.Med.Biol.*, 32(1):11–22, 1987.

Bijlage A

Stellingen, definities etc.

A.1 Divergentie stelling van Gauss

De stelling van Gauss is als volgt:

$$\int_V \mathrm{div}\,\mathbf{A}dV = \int_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS, \tag{A.1}$$

hierin is V het volume dat door het gesloten oppervlak S wordt omsloten.

A.2 Stelling van Stokes

De stelling van Stokes is gegeven door

$$\int_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}. \tag{A.2}$$

Hierin is C de kring ("contour") waarlangs de kring-integraal wordt berekend; S is een oppervlak dat C als rand heeft.

A.3 Delta van Dirac

De *Dirac* deltafunctie is dan als volgt gedefinieerd:

> $\delta(x-x_i)$ is overal gelijk aan nul behalve in het punt x_i, daar is hij oneindig. Verder is de integraal van een delta-functie gelijk aan 1, oftewel een delta-functie is de afgeleide van een stapfunctie.

A.3.1 Delta functie in d-dimensionale ruimte

In een d-dimensionale ruimte, mag een *Dirac* deltafunctie gedefinieerd worden in termen van 1-dimensionale deltafuncties, en wel op de volgende manier:

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x_i}) = \prod_{\alpha=1}^{d} \delta(x_\alpha - x_{\alpha_i}) \tag{A.3}$$

met $\mathbf{x} = (x_1..x_d)$.

A.4 Fundamentele oplossing

Definitie: Als een klasse van Boundary Value Problems wordt weergegeven met de volgende differentiaalvergelijking:

$$D(u) + \phi = 0 \tag{A.4}$$

waarin D een differentiaaloperator en ϕ een gegeven functie is, dan is een *fundamentele oplossing* van zo'n probleem, elke mogelijke singuliere oplossing u^* van de vergelijking:

$$D(u^*) + \delta = 0 \tag{A.5}$$

met δ een geschikte Dirac delta functie. ([1],p.45)

A.5 Kronecker delta

De Kronecker delta is als volgt gedefinieerd:

$$\begin{aligned} \delta_{\alpha\beta} &= 1 \qquad \alpha = \beta \\ &= 0 \qquad \alpha \neq \beta \end{aligned} \tag{A.6}$$

A.6 De Greense identiteit

Laat $f(x, y, z)$ en $g(x, y, z)$ continue functies zijn met continue partiële afgeleide in een gesloten drie-dimensionale ruimte V met grensoppervlak S, dan worden de Greense identiteiten gegeven zoals hieronder.

A.6.1 De eerste Greense identiteit

De volgende vergelijking staat bekend als de eerste Greense identiteit:

$$\int_V \left(f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g\right) dV = \int_S f \frac{\partial g}{\partial n} dS \tag{A.7}$$

A.6.2 De tweede Greense identiteit

Deze identiteit heeft de volgende mathematische vergelijking:

$$\int_V \left(f\nabla^2 g - g\nabla^2 f\right) dV = \int_S \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right) dS \tag{A.8}$$

Bijlage B

De vectoroperator "nabla" ∇

$$\text{nabla} = \nabla = \imath\frac{\partial}{\partial x} + \jmath\frac{\partial}{\partial y} + \ell\frac{\partial}{\partial z} \tag{B.1}$$

B.1 Gradiënt

De vectoroperatie "nabla" toegepast op een scalair V geeft:

$$\text{grad}V = \nabla V = \imath\frac{\partial V}{\partial x} + \jmath\frac{\partial V}{\partial y} + \ell\frac{\partial V}{\partial z} \tag{B.2}$$

B.2 Divergentie

Het inprodukt tussen "nabla" en een vector **A** levert:

$$\text{div}\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{B.3}$$

B.3 Rotatie

Het uitwendig product van "nabla" met een vector **H** levert:

$$\begin{aligned} \text{rot}\mathbf{H} &= \nabla \times \mathbf{H} \qquad \text{(B.4)} \\ &= \imath\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) - \jmath\left(\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z}\right) + \ell\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

B.4 Enkele belangrijke betrekkingen

Hieronder staan enkele formules waar de drie bovenstaande operaties gebruikt worden.

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \tag{B.5}$$

$$\nabla \times (V\mathbf{A}) = V(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla V) \tag{B.6}$$

$$\nabla \cdot (V\mathbf{A}) = V(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla V) \tag{B.7}$$

$$\nabla \times (\nabla V) = \mathbf{0} \tag{B.8}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \tag{B.9}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \tag{B.10}$$

B.5 Operator van *Laplace*

De operator van *Laplace* is het kwadraat van "nabla" toegepast op een scalair en geeft:

$$\nabla \cdot \nabla V = \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \tag{B.11}$$

Bijlage C

Bijzondere functies

C.1 *Legendre* polynomen

Polynomen van *Legendre* zijn polynomen die oplossing zijn van de onderstaande differentiaalvergelijking:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \tag{C.1}$$

C.1.1 Polynomen

De polynomen worden als volgt gedefinieerd:

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (1-x)^n(1+x)^n \tag{C.2}$$

met

$$P_n = P_{-n-1} \quad , \quad P_n(1) = 1 \quad , \quad P_n(-1) = (-1)^n \tag{C.3}$$

C.1.2 Norm

$$\|P_n\|^2 = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1} P_n(x)D^n(1-x^2)^n dx = \frac{2}{2n+1} \tag{C.4}$$

C.1.3 Geassocieerde *Legendre* functie

De geassocieerde functie is:

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} D^m P_n(x) \tag{C.5}$$

met

$$D = \frac{d}{dx} \quad , \quad P_n^m(x) \equiv 0 \qquad m > n \tag{C.6}$$

(Voor meer over Legendre functies zie [3].)

Bijlage D

Meerdere Compartimenten

Zoals we eerder al gezien hebben, kan het voorkomen dat we met meer compartimenten te maken hebben. In ons geval was dat ook zo, maar dit was een sterk vereenvoudigd geval van meerdere compartimenten. Er is ook een model af te leiden die voor willenkeurige volume's geldt en dus niet genest hoeven te zijn. Het model (3.7) en de verkregen integraalvergelijking (3.20) gaan we dus weer aanpassen.

D.1 Het Model voor meerdere compartimenten

Stel dat we kijken naar de volume's V_i (i=1...I) die gescheiden zijn door de oppervlakken S_{ij} (j $\in$ J(i)) met J(i) = { indices van de volumes die aan volume i grenzen }.
Noem de potentiaal in volume V_i, ψ_i en op oppervlak S_{ij}, ψ_{ij}. De normaal-afgeleide op S_{ij} in de richting van (i) naar (j) is ∂_{ij}.

Er geldt dat $\psi_{ij} = \psi_{ji}$, maar $\partial_{ij}\psi \neq \partial_{ji}\psi$.
Nu we dit allemaal weten kunnen we het mathematische model (3.7) gaan herschrijven en dan krijgen we:

$$\begin{aligned}
\sigma_i \nabla^2 \psi_i &= v_i & \mathbf{x} \in V_i \quad (i = 1..I) \qquad \text{(D.1)} \\
\sigma_i \partial_{ij} \psi_i &= -\sigma_j \partial_{ji} \psi_j & \mathbf{x} \in \mathbf{S_{ij}} \quad (i = 2..I) \\
\psi_i &= \psi_j & \mathbf{x} \in \mathbf{S_{ij}} \quad (i = 2..I) \\
\sigma_1 \partial_{1j} \psi_1 &= 0 & \mathbf{x} \in \mathbf{S_{1j}} \qquad \text{(D.2)}
\end{aligned}$$

voor $j = 1, .., I$. Hier geldt dat I gelijk is aan het aantal volume's met volume V_1 als volume dat het geheel omvat (dus de lucht). Verder is S_{ij} het scheidingsoppervlak tussen volume V_i en V_j.

D.2 De Integraalvergelijking voor meerdere compartimenten

Voor het afleiden van de integraalvergelijking voor meerdere compartimenten gebruiken we een generalisatie van vergelijking (3.17), met R weer als (3.13).

Laat $\mathbf{x} \in \mathbf{S_{ij}}$ en kies het Greense volume V als V_i, dan krijgen we:

$$\Omega_i(\mathbf{x})\psi_i(\mathbf{x}) = -\int_{V_i} \frac{1}{R}\nabla^2\psi(\mathbf{x_0})dV + \sum_{\substack{k=1 \\ k\in J(i)}}^{I} \int_{S_{ik}} \left\{-\psi_{ik}(\mathbf{x_0})\partial_{ik}\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\partial_{ik}\psi(\mathbf{x_0})\right\}\cdot d\mathbf{S_{ik}} \tag{D.3}$$

Neem weer $\mathbf{x} \in \mathbf{S_{ij}}$ en kies nu het Greense volume V als V_j, dan krijgen we:

$$\Omega_j(\mathbf{x})\psi_j(\mathbf{x}) = -\int_{V_j} \frac{1}{R}\nabla^2\psi(\mathbf{x_0})dV + \sum_{\substack{k=1 \\ k\in J(j)}}^{I} \int_{S_{jk}} \left\{-\psi_{jk}(\mathbf{x_0})\partial_{jk}\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\partial_{jk}\psi(\mathbf{x_0})\right\}\cdot d\mathbf{S_{jk}} \tag{D.4}$$

Neem ook nu weer $\mathbf{x} \in \mathbf{S_{ij}}$, kies het Greense volume V als V_ι en $\iota \neq i, j$. Dit resulteert in:

$$0 \quad = \quad -\int_{V_\iota} \frac{1}{R}\nabla^2\psi(\mathbf{x_0})dV + \sum_{\substack{k=1 \\ k\in J(\iota)}}^{I} \int_{S_{\iota k}} \left\{-\psi_{\iota k}(\mathbf{x_0})\partial_{\iota k}\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\partial_{\iota k}\psi(\mathbf{x_0})\right\}\cdot d\mathbf{S_{\iota k}} \tag{D.5}$$

De rechterterm is hier gelijk aan nul, omdat $\mathbf{x}$ buiten het Greense volume ligt (in het algemeen zijn er meer van deze vergelijkingen).

Het is duidelijk dat elk oppervlak twee volume's scheidt en dus komt elk oppervlak twee keer in de vergelijkingen voor. Verder geldt dat :

$$S_{ij} = S_{ji} \qquad \partial_{ij}\frac{1}{R} = -\partial_{ji}\frac{1}{R}. \tag{D.6}$$

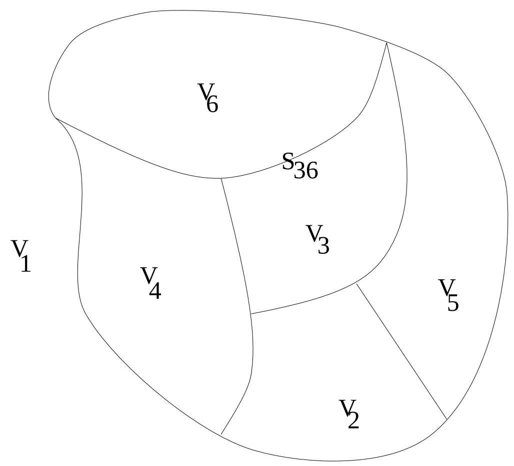
Het tweede deel van vergelijking (D.6) volgt uit het feit dat $\frac{1}{R}$ overal differentieerbaar is.
We vermenigvuldigen (D.3) met σ_i, (D.4) met σ_j en (D.5) met σ_ι. Tevens sommeren we (D.5) over ι en tellen we de drie vergelijkingen op. Als we nu (D.6) gebruiken dan krijgen we:

$$\begin{aligned}(\Omega_i(\mathbf{x})\sigma_i + \Omega_j(\mathbf{x})\sigma_j)\psi(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{2\pi}\sum_\iota \sigma_\iota \int_{V_i} \frac{1}{R}\nabla^2\psi(\mathbf{x_0})dV + \\ &+ \sum_{(k\iota)} \int_{S_{k\iota}} \Big\{(\sigma_k - \sigma_\iota)\psi_{k\iota}(\mathbf{x_0})\Big\} K_{k\iota}(\mathbf{x},\mathbf{x_0}) \cdot d\mathbf{S_{k\iota}}\end{aligned} \tag{D.7}$$

met

$$K_{k\iota}(\mathbf{x},\mathbf{x_0}) = -\partial_{k\iota}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x_0}|} \tag{D.8}$$

Dit is de vergelijking die voor meerdere compartimenten (zie figuur D.1) geldt.



Figuur D.1: Meerdere Compartimenten, willekeurig