Numerieke Berekeningen aan een Luchtstroming in een Spleetblazer, uit het Oogpunt van Trekkrachtgeneratie in een Nonwoven-produktieproces

26 Juni 1997

Debby Lanser

Afstudeercommissie :

prof. dr. ir. P. Wesseling (TU Delft)
ir. A. Segal (TU Delft)
ir. H. Bijl (STW, TU Delft)
dr. ir. B. Koren (CWI)
dr. R. v.d. Hout (Akzo Nobel)

Voorwoord

Via deze weg wil ik Akzo Nobel, maar in het bijzonder het CWI bedanken voor de mogelijkheden, die zij hebben geboden om dit afstudeerwerk te realiseren. Daarnaast bedank ik ir. B.G.M. van Wachem en de faculteit Scheikundige Technologie aan de TU Delft voor het beschikbaar stellen van het software pakket CFX4. Tenslotte gaat dank uit naar de leden van mijn afstudeercommisie, prof. dr. ir. P. Wesseling, ir. A. Segal, ir. H. Bijl, dr. ir. B. Koren en dr. R. van der Hout.

Debby Lanser, juni 1997

Inhoudsopgave

Samenvatting

Akzo Nobel is een belangrijke producent van zgn. nonwovens of spinvliezen. Een essentiële rol in een nieuw nonwovenproduktieproces wordt gespeeld door de spleetblazer. Om de filamenten, de dunne draadjes waaruit het nonwoven is opgebouwd, te verstrekken en te transporteren, wordt in de spleetblazer een trekkracht aan de filamenten uitgeoefend. De trekkrachtgeneratie vindt plaats door onder hoge druk lucht langs de filamenten te blazen. Dankzij het snelheidsverschil tussen de perslucht en de filamenten wordt de benodigde schuifspanning geleverd. Met de aanvoer van de perslucht gaan relatief hoge kosten gepaard. Een aanknopingspunt voor kostenreductie wordt gevormd door een verbreding in de blazergeometrie, welke essentieel blijkt te zijn voor de generatie van voldoende trekkracht.

Ons onderzoek is erop gericht geweest door numerieke berekeningen aan de luchtstroming in verschillende blazergeometrieën meer inzicht te verkrijgen in de trekkrachtverhogende werking van de verbreding. De luchtstroming is daartoe gemodelleerd met behulp van de 2D Navier-Stokes vergelijkingen. Aangenomen is dat de perslucht een ideaal gas is.

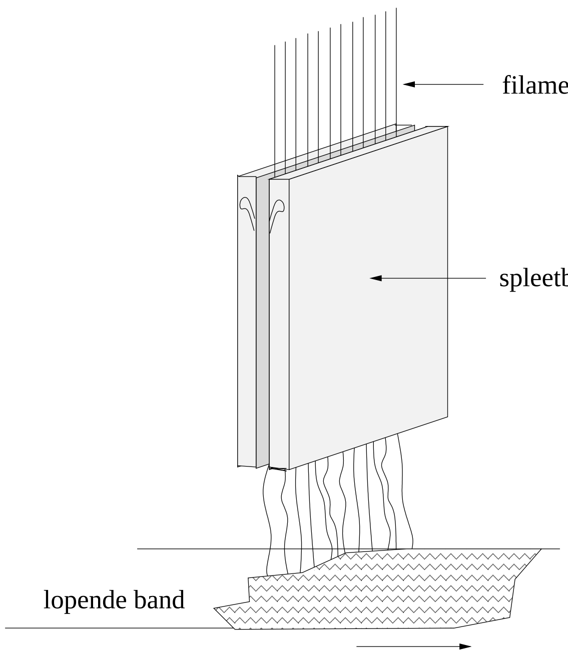
De Navier-Stokes vergelijkingen zijn op numerieke wijze opgelost. Om inzicht te verkrijgen in de numerieke discretisatie- en oplosmethoden en de randvoorwaarden keuzes, welke zijn gemaakt om een goed gesteld probleem in de zin van Hadamard te realiseren, hebben we in eerste instantie de Euler vergelijkingen beschouwd. Zowel voor de discretisatie van de Euler vergelijkingen als de Navier-Stokes vergelijkingen is een eindige volume methode toegepast. Na evaluatie van verschillende Flux Vector Splitting (FVS) en Flux Difference Splitting (FDS) methoden is voor de discretisatie van de convectieve fluxen gekozen voor een eerste orde upwindschema volgens Osher. De diffusieve fluxen zijn op centrale wijze gediscretiseerd. Als oplosmethode is een multiroostermethode gebruikt. Een belangrijk onderdeel in deze methode vormt een preconditionering, welke is toegepast op de gediscretiseerde vergelijkingen om te voorkomen dat in regionen met een laag Machgetal convergentieproblemen optreden. De vergelijkingen, de randvoorwaarden en de discretisatie- en oplosmethode zijn geïmplementeerd in een code welke is ontwikkeld op het CWI door Koren.

Het werk heeft geresulteerd in twee mogelijke verklaringen voor de effectiviteit van de verbreding in de blazergeometrie. Het betreft compressibele niet-viskeuze en incompressibele viskeuze verstopping. De naamgeving is gebaseerd op de achterliggende standaard stromingsproblemen. Verstopping veroorzaakt terugstroming in het gebied rond de lucht- en draadinlaat. Deze terugstroming leidt op zijn beurt tot trekkrachtreductie ten gevolge van negatieve schuifspanningen ter plaatse. Naar aanleiding van de verklaringen zijn drie numerieke testsets uitgevoerd, waarin respectievelijk Reynolds variaties en breedte- en hoogte variaties in een blazergeometrie met een diffusorverbreding zijn toegepast. Op basis van deze resultaten doen we enkele suggesties omtrent mogelijke geometrieveranderingen, die ten goede komen aan trekkrachtverhoging. Zo blijkt vergroting van de diffusorbreedte te resulteren in een essentiële trekkrachtverhoging. Verder duiden de numerieke resultaten naar aanleiding van de Reynolds variaties in de richting van een optimaal Reynoldsgetal. Bij dit Reynoldsgetal is de weerstand over de lengte van het trekkanaal zodanig ingeperkt, dat terugstroming in het trekkanaal wordt voorkomen. Daarnaast wordt er voldoende diffusie toegestaan om de in geblazen luchtstraal over het trekkanaal te diffunderen. Een belangrijke rol in de resultaatvorming is weggelegd voor de voorgeschreven randvoorwaarden aan de draadinlaat. De randvoorwaarden staan een ongedwongen in- of uitstroom toe ten gevolge van de toestand in het binnengebied van de blazer.

Hoofdstuk 1

Inleiding

Akzo Nobel is één van de belangrijkste producenten van zgn. spinvliezen of nonwovens. Een nonwoven lijkt veel op een weefsel. Het onderscheidt zich echter door zijn ongeordende structuur. Waar bij weefsels garens netjes geordend worden geweven, worden bij nonwovens losse filamenten, draadjes met een diameter van $\pm 30\ \mu$m, random over elkaar tot een vlies afgelegd, waarna de filamenten op één of andere wijze met elkaar worden verbonden. De eigenschappen van nonwovens, zoals bijvoorbeeld sterkte of uiterlijke vormgeving, zijn veelal iets minder goed dan die van weefsels. In tal van toepassingen is dat echter geen probleem, zodat de aanmerkelijk lager liggende produktiekosten hebben geleid tot een sterke marktgroei. De nonwovens worden bijvoorbeeld toegepast als basislaag voor tapijtruggen, als basis voor bitumineuze dakbedekking, maar ook in maandverband of als filter. Bij Akzo Nobel werkt men momenteel aan een proefopstelling voor een nieuw produktieproces voor nonwovens. Een belangrijk onderdeel uit dit produktieproces is de spleetblazer. Deze spleetblazer vormt het uitgangspunt van ons onderzoek.



Figuur 1.1: Grove situatieschets ter ideevorming van de blazergeometrie.

In de spleetblazer bevindt zich een gordijn van filamenten. Filamenten zijn zeer dunne draadjes, waaruit de nonwoven is opgebouwd. Onder hoge druk blaast men in de blazer lucht langs de filamenten. De perslucht bereikt daarbij snelheden tussen de 100-300 m/s. Ten gevolge van het verschil in snelheid van de filamenten (± 80 m/s) en de perslucht treden aan de wand van de filamenten schuifspanningen op.

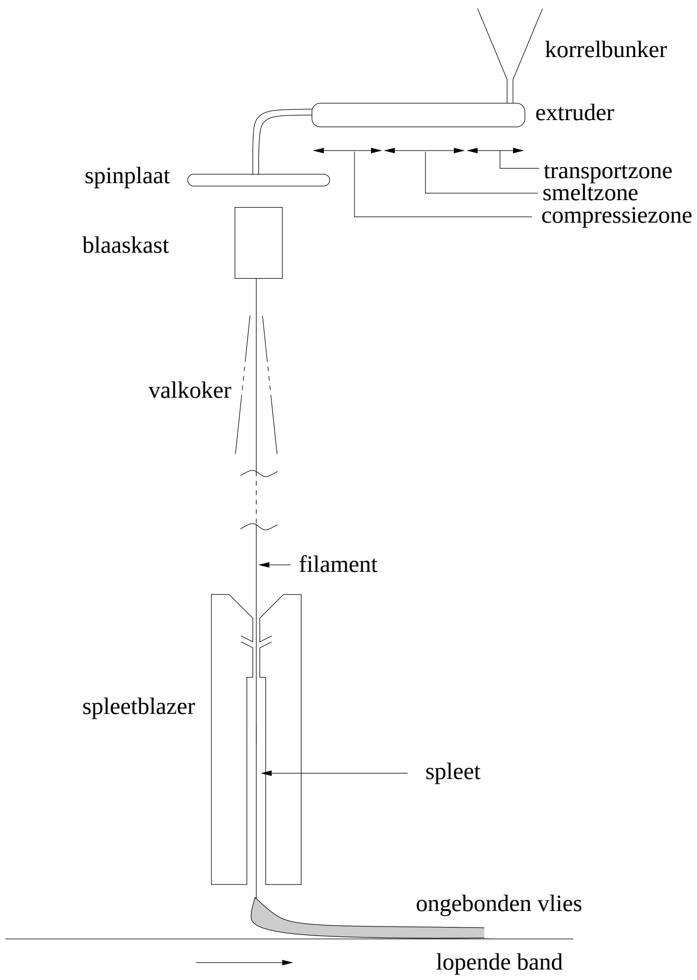
De filamenten ondervinden een trekkracht, waardoor ze, dankzij verstrekking, hun sterkte verkrijgen en door het produktieproces worden getransporteerd.
De hoeveelheid perslucht, die nodig is voor de generatie van de trekkracht, is groot. Daarnaast wordt de perslucht onder een druk van ± 6 bar de spleet ingespoten. De kosten die met deze toevoer gepaard gaan, zijn relatief hoog. Zij vormen een belangrijk onderdeel van de gemaakte kosten tijdens de produktie van het vlies. Bij Akzo Nobel gaat de interesse uit naar kostenreductie en men is dan ook geïnteresseerd in de exacte werking van de blazer. De interesse richt zich daarbij o.a. op de invloed van een verbreding, welke in de blazergeometrie is opgenomen. Deze verbreding blijkt van essentieel belang te zijn voor de generatie van extra trekkracht op de filamenten. Voor de oorzaak is nog geen sluitende verklaring gevonden.
Mijn afstudeeronderzoek is gericht op numeriek onderzoek naar de luchtstroming in de blazer. Met de berekening van de luchtstroming willen we informatie verkrijgen over zijn trekkrachtwerking. Welke verandering treedt er bijvoorbeeld op in de luchtstroming rond de verbreding in de blazer? Wat is de samenhang tussen de blazergeometrie, de luchtstroming en de trekkracht op de filamenten? Ons werk moet bijdragen aan extra inzicht over de mogelijkheden van geometrieveranderingen aan de blazer, waarbij de hoeveelheid perslucht wordt gereduceerd zonder aan trekkracht aan de filamenten in te boeten.

Hoofdstuk 2

Industriële achtergrond

2.1 Het spinproces

Bij Akzo Nobel is men bezig met het ontwikkelen van een nieuwe spinvliestechnologie. De ontwikkeling is vorm gegeven in een proefmachine, machine 550, die bij de fiber- en garenresearchdivisie in Arnhem staat opgesteld. Wij besteden kort aandacht aan de werking van dit produktieproces. In figuur 2.1 is het proces weergegeven.



Figuur 2.1: Schematische weergave van het produktieproces van nonwovens op machine 550.

Het produktieproces van machine 550 is een variant op het smeltspinproces. Als eerste stap worden polymeerkorrels, de grondstof voor het vlies, via een korrelbunker naar de extruder gevoerd. In de extruder smelt men het polymeer (smeltzone), waarna men het onder druk (compressiezone) wegperst naar de spinpompen. Deze pompen moeten er voor zorgen dat het vloeibare polymeer, in vakjargon de smelt genoemd, regelmatig over de spinplaat wordt verdeeld.
De spinplaat is te vergelijken met een grote douchekop. Over een lengte van 1.5 m wordt door zgn. spingaten een gordijn van filamenten geperst. De vorm van de spingaten bepaalt de coupe van de filamenten, waarbij het bovendien mogelijk is door bv. smeltaanvoer van twee verschillende extruders bikomponentgaren te vervaardigen. Om wat voor filamenten het in ons geval gaat, valt onder het bedrijfsgeheim. Als de filamenten uit de spinplaat komen, worden ze door een blaaskast gevoerd, waar via dwarsaanblazing door een laminaire luchtstroom met lage snelheid (0.5–1 m/s) de filamenten worden afgekoeld. De lage snelheid is daarbij nodig om te voorkomen dat de filamenten verward raken of blijven plakken. Om de koeling te voltooien lopen de filamenten vervolgens door een valkoker met een hoogte van $2-3$ m. Tijdens dit traject van de spinplaat tot en met de valkoker, de spinlijn, treedt naast afkoeling verstrekking op. De polymeren in de filamenten oriënteren zich, waarop kristallisatie volgt. Door verstrekking verkrijgt het filament een grotere sterkte.
Voor het verstrekken en transporteren van de filamenten door de omringende lucht is een trekkracht nodig. Voor de generatie van deze trekkracht is een spleetblazer in het geheel opgenomen. Het principe achter de generatie werkt als volgt. De spleetblazer is een luchtinjector, zie figuur 2.5, waarbij vanuit de suskamers door de luchtinlaat perslucht onder hoge druk onder een hoek tegen de filamenten wordt aangeblazen. De maximale snelheid van de lucht in het trekkanaal bedraagt meer dan 250 m/s. De filamentsnelheid daarentegen ligt aanmerkelijk lager, ± 80 m/s. Dit verschil in snelheid zorgt voor een snelheidsgradiënt op het filamentoppervlak. Deze snelheidsgradiënt genereert een schuifspanning in de luchtstromingsrichting. De filamenten ondervinden op deze wijze een trekkracht in de blazer.
Tussen de spinlijn en de blazer bevindt zich een spanningsverhogend mechanisme. De trekkracht, die de filamenten uiteindelijk in de spinlijn ondervinden, ligt daarom aanzienlijk hoger dan de kracht, die zij oorspronkelijk in de blazer ondervonden. Dit mechanisme valt onder het bedrijfsgeheim.
Als laatste stap in het proces worden de filamenten op een transportband afgelegd, waarna het aldus ontstane vlies een thermische binding ondergaat. Het vlies wordt opgewikkeld en is klaar voor gebruik.

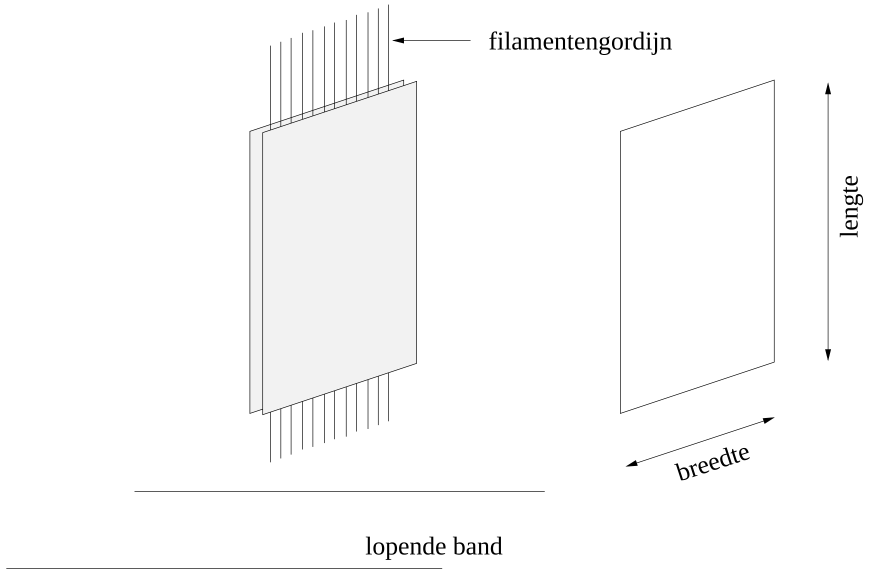
2.2 De problematiek rondom de spleetblazer bij Akzo Nobel

Rondom de werking van de proefmachine rijzen nog steeds vragen met name waar het de werking van de blazer betreft. Voor de produktie van het vlies van 1.5 m breed is ongeveer 3000 Nm^3/uur [1] perslucht nodig. De lengteproduktie in dat uur bedraagt ± 720 m afhankelijk van de snelheid van de transportband en de gewenste vliesdikte. De kosten voor de toevoer van één Nm^3 onder een druk van 6 bar bedragen ongeveer $6-7$ cent, zodat men al gauw f200.00/uur kwijt is aan perslucht. Dit is een relatief hoge kostenpost. Verbetering van de spleetblazer, qua luchtverbruik en/of generatie van trekkracht op de filamenten is daarom voor Akzo Nobel van groot belang.
Met het oog op kostenreductie kocht men enkele jaren geleden een Japans blazermodel op. De trekkracht, die deze blazer genereerde, bleek bij gelijke persluchtaanvoer aanmerkelijk hoger te liggen dan die van het oude model. De blazertypes verschilden op één essentieel punt. Het Japanse type bezat op zo'n 20 cm van de luchtinlaat een verbreding van ± 1 mm (op ± 2 mm) in het trekkanaal. Voor de trekkrachtverhogende werking van deze verbreding is nog geen duidelijk aanwijsbare oorzaak gevonden. Men hoopt hierop een antwoord te vinden.
Daarnaast blijkt de blazer volgens Arbowetgeving teveel lawaai te produceren. Het is niet toegestaan werknemers bij het huidige geluidsniveau met de machine te laten werken. Wanneer de proefmachine in produktie wordt genomen, wil men zelfs 6 m i.p.v. 1.5 m breed vlies produceren, zodat het geluidsniveau zeker omlaag zal moeten.
Samengevat vraagt de blazer om optimalisatie qua luchtverbruik, generatie van trekkracht en geluidsniveau. Om tot een succesvolle verbetering te komen is inzicht nodig in de werking van de spleetblazer. Een stap hiertoe is de beschouwing van de luchtstroming in de blazer.

[1] Een Nm^3 (normaalkubieke meter) lucht is een m^3 lucht bij een druk van 1 atm en bij een temperatuur van 293 K

2.3 De spleetblazer en zijn geometrie

De blazer bestaat grofweg uit twee vlakke platen met een lengte van 60 cm bij een breedte van 1.5 cm. De platen zijn op een afstand van enkele millimeters van elkaar geplaatst. Tussen de platen door wordt een gordijn van filamenten geleid. In figuur 2.2 staat deze grove situatie ter ideevorming geschetst.



Figuur 2.2: Grove situatieschets van een blazer met een filamentengordijn.

De onderlinge afstand tussen de filamenten bedraagt ongeveer 0.5 cm. Met de breedte van de blazer varieert de breedte van het filamentengordijn dat men door de blazer kan voeren. De breedte van het geproduceerde vlies is direct gerelateerd aan deze gordijnbreedte. De blazer in machine 550 heeft een breedte van 1.5 m. In de toekomst wil men vliezen van 6 m breed gaan produceren.

Wij zullen de stroming gaan bepalen in een proefopstelling van de spleetblazer. Bij Akzo Nobel verricht momenteel H. Persoon (een afstudeerder van de TU Delft, faculteit Technische Natuurkunde) experimenteel onderzoek aan deze proefopstelling. Hij verricht metingen aan de druk, de snelheid en turbulentieïntensiteit. De keuze voor zijn proefopstelling is gebaseerd op het feit dat we via zijn data geschikte keuzes kunnen maken omtrent de randvoorwaarden voor ons probleem. Daarnaast kunnen onze numerieke resultaten in een later stadium met zijn experimentele resultaten worden vergeleken. Helaas verschilt zijn proefopstelling op enkele punten van de blazer uit machine 550. De verbreding volgt in zijn proefopstelling op een grotere afstand van de luchtinlaat en de breedte bedraagt slechts 25 cm. Ondanks deze verschillen, zijn we met de geometrie van Persoon in staat een goed beeld te schetsen van de belangrijkste aspecten van de stroming in de spleetblazer. Bij Akzo Nobel neemt men aan dat de breedte van de blazer geen invloed heeft op de stroming van de perslucht.

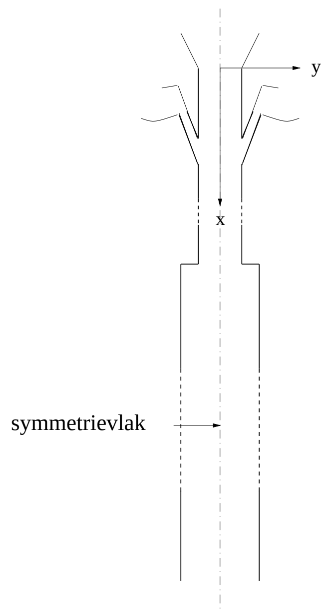
2.3.1 Geometrie beschrijving

We beschouwen een dwarsdoorsnede van de blazer in de lengterichting, zie figuur 2.5. De blazer delen we op in vier zones, namelijk de suskamer, de luchtinlaat, de draadinlaat en het trekkanaal, in vakjargon de spleet genoemd. Vanuit de suskamer wordt lucht door de luchtinlaat het trekkanaal in geperst. Deze aanblazing vindt plaats onder een hoek van 20°. Onder invloed van de hoge druk in de suskamer (± 5–6 bar) treedt in de luchtinlaat een hoge snelheid op. Op het einde van de luchtinlaat is de uitstroomsnelheid bijna of volledig sonisch. Het gebied rond de luchtinlaat vormt een interessegebied voor Akzo Nobel. Men speculeert over het optreden van schokken in dit gebied. In figuur 2.6 hebben we het gebied rond de luchtinlaat vergroot weergegeven. In de figuren 2.7 en 2.8 staan de maten in millimeters vermeld. Voor de figuren 2.5, 2.6, 2.7 en 2.8 geldt dat ze op schaal zijn getekend.

Naast het gebied rond de luchtinlaat gaat onze interesse uit naar de luchtstroming in de buurt van de verbreding in het trekkanaal. De verbreding heeft een trekkrachtverhogende werking, maar over het achterliggende principe is weinig bekend. Met de opname van de verbreding in onze geometrie hopen we d.m.v. beschouwing van de veranderingen in de luchtstroming rond deze regio en in de overige delen van het trekkanaal meer inzicht te krijgen in dit trekkrachtverhogende mechanisme. De verbreding staat aangegeven in figuur 2.5. De afstand tussen de luchtinlaat en verbreding bedraagt 51 mm. Ter hoogte van de verbreding neemt de breedte van het trekkanaal met 1 mm toe.

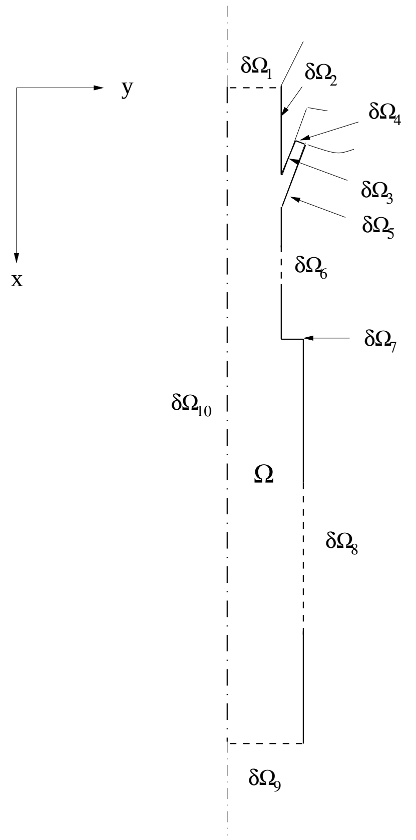
2.3.2 Het fysische domein

We nemen aan dat de aanwezigheid van de filamenten geen invloed heeft op de stroming van de perslucht door de blazer. De diameter van de filamenten is immers zeer klein in verhouding tot zowel de breedte van het trekkanaal, 2 of 3 mm, als de onderlinge afstand tussen de filamenten, 5 mm. De perslucht ondervindt nauwelijks hinder van hun aanwezigheid. Zonder de aanwezigheid van de filamenten is de stroming door de blazer op te vatten als een 2-dimensionale stroming in het vlak van een willekeurige dwarsdoorsnede in de lengterichting. De stroming vindt plaats in de lengterichting van de blazer en in de richting van de breedte van het trekkanaal. De breedte van het trekkanaal is gedefinieerd als de afstand tussen de twee platen, waaruit de blazer is opgebouwd.



Figuur 2.3: Definitie van de x- en y-richting.

We geven de variatie in de lengterichting van de blazer aan met de x-coördinaat. De y-coördinaat verloopt in de richting van de breedte van het trekkanaal. De coördinaatrichtingen staan geschetst in figuur 2.3. De oorsprong leggen we in het symmetrievlak van de blazer aan het begin van de draadinlaat. De luchtstroming in de blazer gaan we berekenen in twee dimensies. In figuur 2.4 staat het fysisch domein weergegeven, waarover we de stroming willen bepalen. Het betreft een willekeurige dwarsdoorsnede in de lengterichting van de blazer. We definiëren het fysische domein Ω als het oppervlak $\Omega(x, y)$ dat wordt begrensd door de randen $\partial\Omega_1$ t/m $\partial\Omega_{10}$. De rand van het domein, $\partial\Omega$, definiëren we als $\partial\Omega = \cup_{i=1}^{10} \partial\Omega_i$. De rand $\partial\Omega_1$ ligt aan het begin van de draadinlaat, (x=0). De randen $\partial\Omega_2$, $\partial\Omega_3$, $\partial\Omega_5$, $\partial\Omega_6$, $\partial\Omega_7$ en $\partial\Omega_8$ vallen samen met de vaste wanden van de blazer. Op de grens tussen de suskamer en de luchtinlaat leggen we de rand $\partial\Omega_4$. De rand $\partial\Omega_9$ bevindt zich op het einde van het trekkanaal en rand $\partial\Omega_{10}$ is de symmetrierand. We wijzen op het feit dat over het fysisch domein het halfprobleem wordt opgelost. Wegens de symmetrie in de blazergeometrie is het mogelijk met het oog op rekenefficiëntie dit halfprobleem op te lossen.



Figuur 2.4: Het fysische domein Ω met de rand $\partial\Omega$ opgebouwd uit de randen $\partial\Omega_1$ t/m $\partial\Omega_{10}$.

Over het aangegeven fysische domein Ω zullen we de stroming van de perslucht gaan berekenen. Het volgende hoofdstuk wijden we aan de vorming van een model voor de stroming. Bij de modelvorming zullen we kennis nodig hebben omtrent compressibele stromingen. We beginnen hoofdstuk 3 dan ook met een korte inleiding in deze theorie.

[2]De figuren 2.5, 2.6, 2.7 en 2.8 zijn afkomstig van H. Persoon

Figuur 2.5: Dwarsdoorsnede van de blazer in de lengterichting.[2]

Figuur 2.6: Uitvergroting van de dwarsdoorsnede van de blazer in de lengterichting rond de luchtinlaat.

Figuur 2.7: Dwarsdoorsnede van de blazer in de lengterichting waarin de maten zijn aangegeven.

Figuur 2.8: Uitvergroting van de dwarsdoorsnede van de blazer rond de luchtinlaat, waarin de maten zijn aangegeven.

Hoofdstuk 3

Het wiskundig model

3.1 Het begrip compressibele stroming

Onder compressibele stromingen verstaan we stromingen van fluïda met een variabele dichtheid. Onder deze noemer vallen in principe alle reële fluïda. Voor veel vloeistoffen en sommige gasstromingen onder geschikte condities zijn de dichtheidsveranderingen echter zo klein, dat de dichtheid met redelijke nauwkeurigheid constant kan worden genomen. De uitspraak omtrent compressibele stromingen moet daarom worden aangepast.
We definiëren daartoe de compressibiliteit, τ. De compressibiliteit van een fluïdum is de relatieve volumeverandering $\frac{\delta v}{v}$ van een vloeistofelement bij een drukverandering δp

$$\tau = -\frac{1}{v}\frac{\delta v}{\delta p}. \tag{3.1}$$

Dit quotiënt hangt af van de wijze, waarop de toestandsverandering plaatsvindt. Het minteken is toegevoegd, omdat bij een positieve drukverandering de volumeverandering negatief is.
Stel dat er sprake is van een adiabatische compressie, ofwel tijdens de compressie wordt er geen warmte aan- of afgevoerd naar het vloeistofelement. Stel bovendien dat de compressie reversibel is, ofwel dissipatieve transportmechanismen spelen geen rol, dan volgt uit (3.1) de isentropische compressibiliteit

$$\tau_s = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s, \tag{3.2}$$

waarbij subscript s betekent dat de partiële afgeleide genomen is bij constante entropie.
Compressibiliteit is een eigenschap van het fluïdum. Voor vloeistoffen is deze veelal erg laag. Voor water bij 1 atm geldt $\tau_s = 5 \cdot 10^{-10}$ m^2/N. Gassen hebben daarentegen veelal een hoge compressibiliteit. Voor lucht geldt $\tau_s = 1 \cdot 10^{-5}$ m^2/N bij 1 atm.
We nemen aan dat het vloeistofelement uit definitie (3.2) een massaeenheid vormt. In dat geval is v het specifieke volume en voor de dichtheid ρ geldt $\rho = \frac{1}{v}$. Uit de definitie van isentrope compressibiliteit volgt

$$\frac{d\rho}{\rho} = \tau_s \, dp. \tag{3.3}$$

Voor deze vergelijking hebben we gebruik gemaakt van theorie, die in paragraaf 3.2.2 aan de orde zal komen. We kunnen de partiële afgeleide in vergelijking 3.2 vervangen door gewone differentialen. Elke thermodynamisch variabele kunnen we immers uitdrukken in twee andere thermodynamische variabelen. Van deze twee thermodynamische variabelen houden we er in vergelijking 3.3 één, de entropie, constant.
In navolging van Anderson [1] zullen we n.a.v. vergelijking (3.3) spreken van een compressibele stroming indien een isentrope verandering van druk, dp, over een karakteristieke lengte van de stroming vermenigvuldigd met de isentrope compressibiliteit van het fluïdum een niet te verwaarlozen relatieve verandering in de dichtheid oplevert. In de praktijk hanteert men veelal dat de relatieve verandering meer dan 5% moet bedragen. Zonder bewijs vermelden we dat gasstromingen met snelheden groter dan 0.3 keer de geluidssnelheid als compressibel kunnen worden beschouwd.

3.2 De benodigde zaken uit de thermodynamica

In compressibele stromingen spelen energieconcepten een belangrijke rol. In hoofdstuk 4 zal dit aan de orde komen. In deze paragraaf geven we alvast een inleiding in de belangrijkste aspecten uit de thermodynamica, de theorie van energie en entropie.

3.2.1 Ideaal gas

Een gas bestaat uit een verzameling molekulen, die min of meer random door elkaar bewegen. Ieder deeltje veroorzaakt door zijn samenstelling een krachtveld in zijn omgeving. Deze velden noemen we intermolekulaire krachten. De sterkte van de kracht neemt kwadratisch af met de afstand tot het deeltje, dat deze kracht veroorzaakte. In de meeste gevallen is de gemiddelde afstand tussen de deeltjes groot genoeg om de intermolekulaire krachten te mogen verwaarlozen. We spreken dan van een ideaal gas.

Voor een ideaal gas is de toestandsvergelijking af te leiden. Deze luidt

$$pv = RT, \tag{3.4}$$

waarin T staat voor de temperatuur en R [J/(kg-K)] is gedefinieerd als de specifieke gas constante.
In termen van de dichtheid wordt de toestandsvergelijking

$$p = \rho RT. \tag{3.5}$$

Voor lucht onder standaardcondities (1 atm en 273 K) geldt $R = 287$ J/(kg K).

Voor een reëel gas, oftewel voor een gas waarbij we de intermolekulaire krachten niet mogen verwaarlozen, kunnen we vergelijking (3.4) vervangen door de Van der Waalsvergelijking. Deze luidt

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT, \tag{3.6}$$

waarbij de constantes a en b van het type gas afhankelijk zijn.

3.2.2 Interne energie en enthalpie

Voor de specifieke inwendige energie geldt

$$e = e(T, v).$$

De daarvan afgeleide grootheid enthalpie h is gedefinieerd als

$$h = e + pv, \tag{3.7}$$

$$h = h(T, p). \tag{3.8}$$

Via vergelijking (3.4) of vergelijking (3.6) zien we dat elke thermodynamische variabele is uit te drukken in twee andere thermodynamische variabelen, bv. $p(v, T)$ of $v(T, p)$.
Indien het gas thermisch ideaal is, dan geldt

$$e = e(T),$$

$$h = h(T),$$

$$de = c_v dT, \tag{3.9}$$

$$dh = c_p dT. \tag{3.10}$$

Hierin zijn c_p en c_v gedefinieerd als de specifieke warmtes bij constante druk en constant volume

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p,$$

$$c_v = \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_v.$$

Als bovendien de specifieke warmtes c_v en c_p constant zijn, dan spreekt men van een calorisch ideaal gas. Dan geldt

$$\begin{aligned} e &= c_v T, && (3.11)\\ h &= c_p T. && (3.12) \end{aligned}$$

Atmosferische lucht met een temperatuur tussen $273\,K$ en $1000\,K$ is te beschouwen als calorisch ideaal. Via vergelijking (3.4), (3.7) en (3.9), (3.10) kunnen we voor zowel thermisch als calorisch ideale gassen afleiden, dat geldt

$$c_p - c_v = R. \tag{3.13}$$

Definiëren we $\gamma \equiv \frac{c_p}{c_v}$, dan volgen voor c_p en c_v via vergelijking (3.13) onderstaande veelgebruikte formules

$$c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}, \tag{3.14}$$

$$c_v = \frac{R}{\gamma - 1}. \tag{3.15}$$

Voor lucht onder standaardcondities geldt $\gamma = \frac{7}{5}$.

3.2.3 Eerste en tweede hoofdwet van de thermodynamica

Beschouw een systeem met een vaste massa met variabele grenzen. Neem aan dat het systeem hydrostatisch is ofwel het heeft geen gerichte kinetische energie. Zij δq een hoeveelheid warmte die aan- of afgevoerd wordt aan de grenzen en zij δw de hoeveelheid arbeid verricht op het systeem aan de grenzen, dan geldt

$$\delta q + \delta w = \delta e.$$

Dit is de eerste hoofdwet van de thermodynamica.
Aan de hand van deze formule kunnen we drie soorten processen formuleren:

1. adiabatisch proces : een proces, waarbij geen warmte aan het systeem wordt toe- of afgevoerd. Er geldt $\delta q = 0$.

2. reversibel proces : een proces, waarbij dissipatie fenomenen, zoals viscositeit en warmtegeleiding geen rol spelen. In dat geval geldt $\delta w = -p\,dv$.

3. isentroop proces : een proces, dat zowel adiabatisch als reversibel is.

De tweede wet van de thermodynamica beschrijft in welke richting een proces moet plaatsvinden. Hiertoe definiëren we de entropie s als volgt

$$\delta s = \frac{\delta q}{T}. \tag{3.16}$$

Hierin is δq de hoeveelheid toe- of afgevoerde warmte aan het systeem. T is de temperatuur van het systeem.
De tweede hoofdwet van de thermodynamica zegt dat in een gesloten systeem, waarin toestandsveranderingen plaatsvinden, geldt

$$\delta s \geq 0.$$

Voor een isentroop proces van een calorisch ideaal gas kunnen we de zgn. isentrope relaties afleiden. Deze beschrijven een verband tussen de druk, dichtheid en temperatuur van een vloeistofelement op twee verschillende plaatsen in het fluïdum

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\gamma} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \tag{3.17}$$

Het bewijs staat beschreven in Anderson [1].

3.2.4 De geluidssnelheid

Een belangrijke definitie uit de thermodynamica is de fundamentele expressie voor de geluidssnelheid c. De geluidssnelheid is gedefinieerd als

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s . \tag{3.18}$$

Via deze vergelijking is direct in te zien dat de geluidssnelheid een maat is voor de compressibiliteit van het gas. Er geldt immers

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = -\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s v^2 = -\frac{v}{\left(\frac{1}{v}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s} = \frac{v}{\tau_s}.$$

De derde overgang is mogelijk als we ons realiseren dat onder constante entropie geldt $p(v)$ en $v(p)$. We hebben gebruik gemaakt van het feit, dat we elke thermodynamische variabele kunnen uitdrukken in twee andere thermodynamische variabelen. We houden de entropie constant. Voor een calorisch ideaal gas geldt voor de geluidssnelheid

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}, \tag{3.19}$$

of via de toestandsvergelijking (3.5) omgeschreven in een andere notatie

$$c = \sqrt{\gamma R T}. \tag{3.20}$$

Dit volgt via de isentrope relaties (3.17)

$$p\rho^{-\gamma} = \text{constant} = a \quad \Rightarrow \quad p = a\rho^{\gamma}.$$

Na differentiatie gaat deze vergelijking over in

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = a\gamma\rho^{\gamma-1} = \frac{\gamma}{\rho} a\rho^{\gamma} = \frac{\gamma p}{\rho},$$

ofwel

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \frac{\gamma p}{\rho}.$$

De relaties (3.19) en (3.20) voor de geluidssnelheid van een calorisch ideaal gas zullen we veelvuldig toepassen.

3.2.5 Totale of stagnatie condities

In de theorie van compressibele stromingen wordt veel gebruik gemaakt van de begrippen totale druk, totale temperatuur etc.. Deze begrippen zijn als volgt gedefinieerd.
Op een gegeven punt A in een willekeurig stromingsveld bevindt zich een vloeistofelement met een gegeven snelheid $\mathbf{v}$ en een statische druk en temperatuur, p en T. We brengen in gedachte de snelheid van dit vloeistofelement isentropisch terug naar nul. De druk en temperatuur veranderen tijdens dit proces. Uiteindelijk stagneert het vloeistofelement. De druk en temperatuur welke het element heeft bereikt bij een snelheid nul zijn gedefinieerd als totale of stagnatie druk p_0 en totale of stagnatie temperatuur T_0. Via de toestandsvergelijking voor een ideaal gas (3.5) en de relatie voor de geluidssnelheid (3.20) kunnen we eveneens de definities voor de totale geluidssnelheid en dichtheid afleiden,

$$c_0 = \sqrt{\gamma R T_0},$$
$$\rho_0 = \frac{p_0}{R T_0}.$$

We wijzen op het feit dat de totale grootheden eigenschappen zijn van het vloeistofelement. Vervolgens vermelden we dat voor isentropische stromingen geldt dat de totale condities door de hele stroming constant zijn. We verwijzen hiervoor naar Anderson [1, blz.56–59]. Hiermee sluiten we dit thermodynamische intermezzo af.

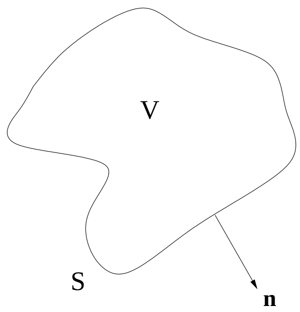
3.3 De behoudswetten in integraalvorm

Inleiding

Als we een stroming beschouwen, zijn we geïnteresseerd in bepaalde eigenschappen van deze stroming, zoals bijvoorbeeld de druk p, de dichtheid ρ, de temperatuur T en de snelheid $\mathbf{v}$ in alle punten in het stromingsveld. De vraag is op welke wijze we deze grootheden kunnen bepalen. We zullen daartoe gebruik maken van drie fundamentele natuurwetten. Deze drie behoudswetten zijn :

1. Wet van behoud van massa
2. Wet van behoud van impuls
3. Wet van behoud van energie

We kiezen een volume V met een gesloten oppervlak S in een deel van de stroming. Dit volume kan zowel vast zijn in de ruimte, als met het fluïdum meebewegen. In het laatste geval omvat het volume altijd dezelfde vloeistofelementen. Als we op het volume V de behoudswetten toepassen, leidt dit tot de formulering van deze wetten in integraalvorm.



Figuur 3.1: Het controle volume V.

In hoofdstuk 4 staan de behoudswetten in differentiaalvorm beschreven. In dat geval is het volume V vervangen door een infinitesimaal vloeistofelementje met volume dV. De afmetingen van het deeltje zijn daarbij wel zodanig gekozen, dat het deeltje een voldoende aantal molekulen bevat, opdat het fluïdum als een continu medium mag worden beschouwd. De differentiaalformulering heeft voordelen ten opzichte van de integraalvorm. Zo kunnen we via deze formulering de eigenschappen van de stroming in elk willekeurig punt bepalen.[1] Bovendien kunnen we aan de hand van de differentiaalvorm de karakteristiekentheorie afleiden. Op basis van deze theorie kunnen we o.a. een uitspraak doen over het aantal randvoorwaarden, dat nodig is voor ons probleem. We starten in deze paragraaf echter met de integraalvorm van de behoudswetten, omdat deze zeer geschikt is voor de interpretatie van de fysische betekenis van de verschillende termen uit de balansen.
We beschouwen een vast controle volume V met een gesloten oppervlak S. In ieder punt op het oppervlak definiëren we de eenheidsnormaal $\mathbf{n}$, die naar buiten georiënteerd is, zie figuur 3.1. De afleiding van de behoudswetten voor dit volume staat beschreven in Anderson [1, blz.32–44, niet-viskeus] en Batchelor [2, viskeus]. Hieronder staat hun formulering en fysische interpretatie beschreven.

De massabalans in integraalvorm

Massa kan niet worden gegenereerd of vernietigd. Toepassing van dit fysische principe op volume V leidt tot onderstaande massabalans. We spreken van de continuïteitsvergelijking

$$-\oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV, \tag{3.21}$$

[1] Hier is stilzwijgend aangenomen, dat de differentiaalvorm in ieder punt van de stroming bestaat. In paragraaf 6.1.1 bespreken we de uitzonderingen op deze regel.

met ρ de dichtheid en $\mathbf{v}$ de snelheid in een punt uit het volume V.
Deze vergelijking zegt dat de verandering van de hoeveelheid massa van het volume V per tijdseenheid (rechterlid) gelijk is aan de massaflux, die door het begrenzende oppervlak S het volume V instroomt (linkerlid).

De impulsvergelijking in integraalvorm

De tweede behoudswet stelt dat de tijdsverandering van de impuls van een volume gelijk is aan de nettokracht, die op het volume wordt uitgeoefend. Toepassing van deze wet op ons volume voor een niet-viskeuze stroming leidt tot de onderstaande impulsvergelijking

$$\oint_S \rho\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\;\mathbf{v}\,dS + \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{v})\;dV = \int_V \rho\mathbf{f}\,dV - \oint_S p\mathbf{n}\,dS, \tag{3.22}$$

waarin p de druk en $\mathbf{f}$ de volumekracht per massaeenheid voorstellen.
In woorden beschrijft de impulsvergelijking dat de netto impulsflux door het oppervlak S (1^e ll)[2] plus de verandering van de hoeveelheid impuls van het volume per tijdseenheid (2^ell) gelijk is aan de totale volumekracht op volume V (1^erl) plus de totale oppervlaktekracht, die wordt uitgeoefend door de druk op oppervlak S (2^erl).
De impulsvergelijking (3.22) is van toepassing voor een niet-viskeuze stroming. In het geval van grote snelheidsgradiënten gaan echter viskeuze effecten een rol spelen. Met deze effecten zullen we in de impulsvergelijking rekening moeten houden. De viskeuze effecten leiden, zie Batchelor [2], tot de uitbreiding van vergelijking (3.22) met een extra oppervlaktekracht ten gevolge van de viskeuze normaal- en schuifspanningen. Deze kracht luidt

$$F_{\text{viskeus}} = \oint_S \overline{\overline{\tau}}\cdot\mathbf{n}\,dS,$$

waarin $\overline{\overline{\tau}}$ gedefinieerd is als de spanningstensor

$$\overline{\overline{\tau}}_{ij} = \mu(\partial_i v_j + \partial_j v_i) - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\mathbf{v})\delta_{ij},$$

met δ_{ij} de Kroneckerdelta.
De afleiding van de spanningstensor staat eveneens in Batchelor [2] beschreven. Daarbij is aangenomen dat het fluïdum Newtons is, dat wil zeggen dat de deformatiesnelheden lineair gekoppeld zijn aan de spanningscomponenten.
De impulsvergelijking voor viskeuze stromingen van Newtonse fluïda luidt

$$\oint_S \rho\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{v}\,dS + \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{v})\;dV = \int_V \rho\mathbf{f}\,dV - \oint_S p\mathbf{n}\,dS + \oint_S \overline{\overline{\tau}}\cdot\mathbf{n}\,dS. \tag{3.23}$$

De energievergelijking in integraalvorm

In het geval van compressibele stromingen moet naast de continuïteitsvergelijking en de impulsvergelijking de wet van behoud van energie worden beschouwd. Deze wet stelt dat energie niet gegenereerd of vernietigd kan worden. Energie verandert hoogstens van vorm, bijvoorbeeld als kinetische energie wordt omgezet in inwendige energie. Deze wet toegepast op ons volume V voor een niet-viskeuze stroming resulteert in onderstaande energievergelijking

$$\begin{aligned} -\oint_S p\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS + \int_V \rho(\mathbf{f}\cdot\mathbf{v})\,dV &= \\ \int_V \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e + \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{2}\right)\right]dV &+ \oint_S \rho\left(e + \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{2}\right)\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS. \end{aligned} \tag{3.24}$$

De energievergelijking zegt dat de hoeveelheid arbeid verricht door de drukkracht op het oppervlak S (1^ell) plus de hoeveelheid arbeid verricht op het volume V door de volumekrachten (2^ell) gelijk is aan de

[2] 1^e ll betekent de eerste term uit het linkerlid

verandering in hoeveelheid inwendige en kinetische energie van het volume per tijdseenheid (1^erl) plus de netto inwendige en kinetische energieflux door het controle oppervlak S (2^erl).
Voor viskeuze stromingen voegt Batchelor [2] aan vergelijking (3.24) twee termen toe. De eerste term (3^ell) beschrijft de hoeveelheid arbeid welke door de viskeuze spanningen wordt verricht. De tweede term (4^ell) beschrijft de warmte, die aan het volume wordt toegevoerd door molekulaire geleiding. Hierbij is k de warmtegeleidingscoëfficiënt. Vergelijking (3.24) gaat over in

$$-\oint_S p\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS + \int_V \rho(\mathbf{f}\cdot\mathbf{v})\,dV + \oint_S \left(\overline{\overline{\tau}}\cdot\mathbf{v}\right)\cdot\mathbf{n}\,dS + \int_S k\nabla T\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_V \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e+\frac{\|\mathbf{v}\|^2}{2}\right)\right]dV + \oint_S \rho\left(e+\frac{\|\mathbf{v}\|^2}{2}\right)\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS. \tag{3.25}$$

3.4 Aannamen omtrent de stroming in de blazer

Voordat we de beschreven balansen zullen toepassen over ons fysische domein, maken we eerst nog enkele aannamen. We vermelden dat de eerste aanname omtrent het fluïdum reeds is gemaakt. We nemen aan dat de perslucht is te beschouwen als een Newtons fluïdum.

Op bladzijde 12 hebben we de volgende vuistregel beschreven. Gasstromingen met snelheden groter dan 0.3 keer de geluidssnelheid zijn veelal niet meer te beschouwen als incompressibele stromingen. Op basis van deze vuistregel nemen we aan dat onze luchtstroming door de blazer eveneens niet als incompressibel mag worden beschouwd. Behalve in de buurt van de draadinlaat en aan de wanden van de blazer ligt de snelheidsgrootte, $\|\mathbf{v}\|$, over het algemeen boven de 0.3 keer de geluidssnelheidsgrens.

Aan de wanden van de blazer speelt wrijving een belangrijke rol. Tevens is voor de beschrijving van een trekkrachtmodel het concept van viscositeit nodig. In viskeuze stromingen treden schuifspanningen op. Deze schuifspanningen zijn verantwoordelijk voor de uitgeoefende trekkracht op de filamenten. Voor compressibele stromingen van Newtonse fluïda zijn in paragraaf 3.3 de continuïteitsvergelijking, impulsvergelijkingen en energievergelijking beschreven. Zij vormen samen de Navier-Stokes (NS) vergelijkingen. Deze vergelijkingen zullen het uitgangspunt vormen voor onze modelvorming van het stromingsprobleem in de blazer.

3.4.1 Verdere aannamen

We nemen verder het volgende aan,

- Het effect van de volumekracht $\mathbf{f}$ op de stroming, in ons geval betreft het de zwaartekracht, kunnen we verwaarlozen.
- De luchtstroming is laminair.
- De perslucht is te beschouwen als een calorisch ideaal en ideaal gas.
- De luchtstroming is twee-dimensionaal. De filamenten hebben geen invloed op de luchtstroming.

Voor dit moment laten we het bij bovenstaande aannamen. In de loop van het werk zullen we meer aannamen maken. We zullen daar te zijner tijd op wijzen.

3.5 Voorlopige strategie

In hoofdstuk 9 zullen we beschrijven, hoe we de NS-vergelijkingen over ons fysische domein zullen oplossen met behulp van twee numerieke codes. De eerste code betreft een researchcode welke op het CWI is ontwikkeld door Koren. De tweede code betreft een commercieel CFD-pakket, CFX4 van AEA Technology uit Harwell. De komende hoofdstukken 4, 5 en 8 zijn gericht op verdere modelvorming, zoals deze in de CWI-code en deels in CFX4 is geïmplementeerd. Daarnaast besteden we aandacht aan de gebruikte numerieke methoden in de code van Koren. In de achterliggende numerieke methoden van CFX zullen we ons niet verder verdiepen.

We starten onze bespreking met de behandeling van een model voor onze stroming zonder viscositeit en warmtegeleiding. In plaats van de NS-vergelijkingen vormen de integraalbalansen (3.21), (3.22) en (3.24) onder de aannamen uit paragraaf 3.4 en 3.4.1 ons uitgangspunt. De beperkingen van deze stap zijn niet zo groot als in eerste instantie doet vermoeden.
In een stroming van een niet-viskeus medium spelen de diffusieve termen geen rol. De stroming wordt volledig bepaald door druk- en traagheidskrachten. In sommige gevallen vertonen stromingen van viskeuze media sterke overeenkomsten met hun niet-viskeuze variant. Het betreft stromingen die door traagheidskrachten worden gedomineerd. Dit is gerelateerd aan een hoog Reynoldsgetal, zie paragraaf 8.4. Onze stroming door de spleetblazer valt in deze categorie. De numerieke schema's, die zijn gekozen voor de 2D Euler vergelijkingen, kunnen in het geval van stromingen, waarin de traagheidskrachten domineren, direct worden toegepast om de NS-vergelijkingen op te lossen. De discretisatie van de extra diffusieve termen behandelt men dan onafhankelijk van de andere termen, zie paragraaf 8.5. Daarnaast vormen de 2D Euler vergelijkingen een geschikt uitgangspunt voor een nette randvoorwaardenafhandeling, zie paragraaf 8.3. Wegens het domineren van druk- en/of traagheidskrachten zullen de gekozen randvoorwaarden voor het NS-probleem een uitbreiding vormen op de besproken randvoorwaarden voor de Euler vergelijkingen.

Hoofdstuk 4

De Euler vergelijkingen

In dit hoofdstuk beschouwen we de differentiaalvorm van de behoudswetten voor een niet-viskeuze stroming, de zogenaamde Euler vergelijkingen. Deze vergelijkingen zijn gemakkelijk af te leiden uit de integraalbalansen (3.21), (3.22) en (3.24). We verwijzen hiervoor naar Hirsch [14, blz.11–19]. Het resulterende stelsel is een systeem van gekoppelde niet-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen. In ons 2-dimensionale probleem reduceren de Euler vergelijkingen tot

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} = 0, \tag{4.1}$$

met

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ \rho u H \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ \rho v H \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

De snelheid $\mathbf{v}$ bestaat uit een snelheidscomponent in de x-richting, u, en uit een snelheidscomponent in de y-richting, v. E representeert de totale energie, $E = e + \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{2}$, en H de totale enthalpie, $H = E + \frac{p}{\rho}$. De vectoren $\mathbf{f}$ en $\mathbf{g}$ zijn convectieve fluxen in respectievelijk x- en y-richting, welke zijn uitgebreid met de bijdrage van de druk. Een convectieve flux is te beschouwen als het transport van een bepaalde grootheid in een bepaalde richting. Zo beschrijft $f_1 = \rho u$ bijvoorbeeld de massaflux in de x-richting en $g_2 = (\rho u) v$ het transport van de x-component van de impuls in de y-richting. We zullen $\mathbf{f}$ en $\mathbf{g}$ aanduiden als niet-viskeuze fluxen.
Het stelsel (4.1) bevat 6 onbekenden, namelijk $\rho,\ u,\ v,\ E,\ p$ en H. De laatste grootheid, de stagnatie enthalpie H, is echter uit te drukken in de grootheden ρ, E en p, zodat het aantal onbekenden reduceert tot 5. Het stelsel Euler vergelijkingen (4.1) bevat dus 5 onbekenden in 4 vergelijkingen. Om dit stelsel op te kunnen lossen is een aanvullende vergelijking nodig. Deze vergelijking is af te leiden uit de toestandsvergelijking (3.5) gecombineerd met een thermodynamische relatie (3.11). Daarbij maken we gebruik van de aanname dat de perslucht calorisch ideaal en ideaal is.

Via $\left\{ \begin{array}{lcl} e & = & c_v T \\ p & = & \rho R T \end{array} \right.$ vinden we $p = (\gamma - 1)\,\rho e$.

Met deze aanvullende vergelijking zijn we in staat de fluxen $\mathbf{f}$ en $\mathbf{g}$ te schrijven als functies van de afhankelijke stromingsvariabelen $\mathbf{q}$. Deze omschrijving is gemakkelijk te verifiëren. We wijzen daarbij op het feit dat via de aanvullende vergelijking voor de druk p geldt

$$p = (\gamma - 1)\,\rho e = (\gamma - 1)\left(\rho E - \frac{\rho \|\mathbf{v}\|^2}{2}\right) = (\gamma - 1)\left(q_4 - \frac{q_2^2 + q_3^2}{2 q_1}\right).$$

Voor de stagnatie enthalpie H geldt

$$H = E + \frac{p}{\rho} = \frac{\rho E + p}{\rho} = \frac{\gamma q_4}{q_1} - (\gamma - 1)\frac{q_2^2 + q_3^2}{2 q_1^2}.$$

Voor de fluxen $\mathbf{f}$ en $\mathbf{g}$ volgt

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} q_2 \\ \frac{q_2^2}{q_1} + (\gamma - 1)\left(q_4 - \frac{q_2^2+q_3^2}{2q_1}\right) \\ \frac{q_2 q_3}{q_1} \\ \frac{\gamma q_2 q_4}{q_1} - (\gamma-1) q_2 \frac{q_2^2+q_3^2}{2q_1^2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} q_3 \\ \frac{q_2 q_3}{q_1} \\ \frac{q_3^2}{q_1} + (\gamma - 1)\left(q_4 - \frac{q_2^2+q_3^2}{2q_1}\right) \\ \frac{\gamma q_3 q_4}{q_1} - (\gamma-1) q_3 \frac{q_2^2+q_3^2}{2q_1^2} \end{pmatrix}.$$

Met bovenstaande formulering van de fluxen wordt het stelsel Euler vergelijkingen

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial y} = 0. \tag{4.3}$$

Dit stelsel is volledig. Het bevat 4 vergelijkingen voor 4 onbekenden, respectievelijk q_1, q_2, q_3 en q_4. De formulering van de Euler vergelijkingen uit (4.3) staat bekend als de conservatieve vorm. De afhankelijke stromingsvariabelen, $\mathbf{q} = (\rho,\ \rho u,\ \rho v,\ \rho E)$, de conservatieve variabelen, zijn directe aanleiding tot de behoudswetten, waaruit (4.3) is geresulteerd. Een andere veelgebruikte vorm is de primitieve formulering van de Euler vergelijkingen. In dat geval neemt men $\mathbf{q} = (\rho,\ u,\ v,\ p)$ als afhankelijke stromingsvariabelen. De Euler vergelijkingen voor deze vorm staan beschreven in Hirsch [15, blz. 145–153]. Zoals in hoofdstuk 6 zal blijken is de conservatieve integraalvorm essentieel om discontinuïteiten in de stroming correct weer te kunnen geven.

4.1 Belangrijke eigenschappen van de Euler vergelijkingen

In hoofdstuk 6 zullen we op zoek gaan naar numerieke methoden, waarmee we het conservatieve stelsel niet-lineaire pdv's (4.3) kunnen oplossen. Voor we daarmee van start gaan is het van belang om enkele eigenschappen van ons stelsel te belichten. We besteden in het kort aandacht aan hyperboliciteit van de Euler vergelijkingen, karakteristieken en Riemann-invarianten. In de numerieke oplosmethoden zullen we deze aspecten terugvinden. De karakteristieken en de hyperboliciteit spelen bovendien een essentiële rol in de bepaling van de randvoorwaarden voor ons Eulerprobleem.

4.1.1 De quasi-lineaire vorm van de 2-dimensionale Euler vergelijkingen

We kunnen vergelijking (4.3) herschrijven tot onderstaande quasi-lineaire vorm

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + A\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} + B\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial y} = 0. \tag{4.4}$$

De matrices A en B zijn de Jacobiaan matrices naar $\mathbf{q}$ van respectievelijk de fluxen $\mathbf{f}$ en $\mathbf{g}$. De Jacobiaan A is gedefinieerd als

$$A = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & & \frac{\partial f_2}{\partial q_4} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_4}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_4}{\partial q_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}\frac{q_2^2}{q_1^2} + \frac{\gamma-1}{2}\frac{q_3^2}{q_1^2} & \frac{(3-\gamma)q_2}{q_1} & \frac{(1-\gamma)q_3}{q_1} & \gamma - 1 \\ \frac{-q_2 q_3}{q_1^2} & \frac{q_2}{q_1} & \frac{q_2}{q_1} & 0 \\ \frac{-\gamma q_2 q_4}{q_1^2} + \frac{(\gamma-1)q_2\left(q_2^2+q_3^2\right)}{q_1^3} & \frac{\gamma q_4}{q_1} + \frac{(1-\gamma)\left(3q_2^2+q_3^2\right)}{2q_1^2} & \frac{(1-\gamma)q_2 q_3}{q_1^2} & \frac{\gamma q_2}{q_3} \end{pmatrix}.$$

We laten het bepalen van B aan de lezer over. Veelal komen we A en B tegen in onderstaande vormen. De conservatieve variabelen $\mathbf{q}$ uit vgl. (4.1) zijn hier ingevuld

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}u^2 + \frac{\gamma-1}{2}v^2 & (3-\gamma)u & (1-\gamma)v & \gamma - 1 \\ -uv & v & u & 0 \\ -\gamma u E + (\gamma-1)u\|\mathbf{v}\|^2 & \gamma E - \frac{\gamma-1}{2}\left(v^2+3u^2\right) & (1-\gamma)uv & \gamma u \end{pmatrix}$$

en

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uv & v & u & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}v^2 + \frac{\gamma-1}{2}u^2 & (1-\gamma)u & (3-\gamma)v & \gamma - 1 \\ -\gamma v E + (\gamma-1)v\|\mathbf{v}\|^2 & (1-\gamma)uv & \gamma E - \frac{\gamma-1}{2}\left(u^2+3v^2\right) & \gamma v \end{pmatrix}.$$

4.1.2 Hyperboliciteit van de Euler vergelijkingen

De eerste eigenschap van ons stelsel is gebaseerd op deze Jacobiaanmatrices. Ons stelsel is hyperbolisch.

Definitie 1 [Courant en Hilbert] Een stelsel vergelijkingen van de vorm (4.3) is hyperbolisch, indien voor een willekeurige richting $\mathbf{k} = (k_x, k_y) \in R^2$ genormaliseerd tot de eenheidslengte en alle toelaatbare toestanden $\mathbf{q} \in R^4$ de eigenwaarden $\lambda_j,\ j \in \{1,2,3,4\}$ van de matrix $K = Ak_x + Bk_y$ reëel zijn. De corresponderende rechtereigenvectoren moeten een basis vormen voor R^4.

In Hirsch [15, blz. 179–184] zijn voor ons stelsel (4.3) de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van de matrix K voor een willekeurige $\mathbf{k}$ met een lengte 1 afgeleid. Voor de matrix $K = Ak_x + Bk_y$ geldt in ons geval

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = u_k - c & \mathbf{r}_1 = \left(\rho/2c,\ \frac{\rho}{2c}(u - ck_x),\ \frac{\rho}{2c}(v - ck_y),\ \frac{\rho}{2c}(H - cu_k)\right), \\ \lambda_2 = u_k & \mathbf{r}_2 = \left(1,\ u,\ v,\ \|\mathbf{v}\|^2/2\right), \\ \lambda_3 = u_k & \mathbf{r}_3 = \left(0,\ \rho k_y,\ -\rho k_x,\ \rho(uk_y - vk_x)\right), \\ \lambda_4 = u_k + c & \mathbf{r}_4 = \left(\rho/2c,\ \frac{\rho}{2c}(u + ck_x),\ \frac{\rho}{2c}(v + ck_y),\ \frac{\rho}{2c}(H + cu_k)\right). \end{array} \tag{4.5}$$

Hierin is u_k de snelheidscomponent in de richting $\mathbf{k}$ en c de geluidssnelheid. De eigenwaarden van onze matrix K zijn reëel en de bijbehorende eigenvectoren zijn lineair onafhankelijk. Ons stelsel is inderdaad hyperbolisch. Voor we zullen laten zien, wat dit begrip impliceert, vermelden we tevens de eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix A. In het hoofdstuk over de numerieke methoden zullen we deze herhaaldelijk nodig hebben. Deze eigenwaarden en eigenvectoren verkrijgen we door vergelijking (4.5) in de richting $\mathbf{k} = (1,0)$ te beschouwen. Er geldt

$$\begin{array}{ll} \lambda_1^A = u - c & \mathbf{r}_1 = \left(\rho/2c,\ \frac{\rho}{2c}(u - c),\ \frac{\rho v}{2c},\ \frac{\rho}{2c}(H - cu)\right), \\ \lambda_2^A = u & \mathbf{r}_2 = \left(1,\ u,\ v,\ \|\mathbf{v}\|^2/2\right), \\ \lambda_3^A = u & \mathbf{r}_3 = \left(0,\ 0,\ -\rho,\ -\rho v\right), \\ \lambda_4^A = u + c & \mathbf{r}_4 = \left(\rho/2c,\ \frac{\rho}{2c}(u + c),\ \frac{\rho v}{2c},\ \frac{\rho}{2c}(H + cu)\right). \end{array} \tag{4.6}$$

Op soortgelijke wijze volgen uit vergelijking (4.5) via $\mathbf{k} = (0,1)$ de eigenwaarden en eigenvectoren voor de Jacobiaan B. Met de definitie van hyperboliciteit en onze eigenwaarden en eigenvectoren voor de matrix K kunnen we weinig beginnen zonder dat we enig inzicht hebben in de karakteristiekentheorie. We zullen laten zien dat een hyperbolisch stelsel van de vorm (4.3) golfvormige oplossingen toestaat. De stroming, welke door het stelsel Euler vergelijkingen wordt beschreven, blijkt golfachtige eigenschappen te hebben. Voor een uitgebreide behandeling van de karakteristiekentheorie verwijzen we naar Courant en Hilbert [4].

4.1.3 Karakteristieken en de verspreiding van informatie

We beschouwen een stelsel pdv's van de vorm

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + A\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} + B\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial y} = 0. \tag{4.7}$$

De matrices A en B zijn in dit geval constant. Aan de hand van dit stelsel introduceren we de ideeën achter karakteristieke oppervlakten. De beschreven theorie is te generaliseren naar niet-lineaire stelsels van de vorm (4.7). Ons stelsel Euler vergelijkingen valt in deze catergorie. Voor een beschrijving van deze generalisatie verwijzen we naar Hirsch [14, blz.137-140,148-152].

We zoeken een oplossing van de vorm

$$\mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}} \exp iS(\mathbf{x},t) = \hat{\mathbf{q}} \exp i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t) \text{ met } \hat{\mathbf{q}} \in C^4,\ \omega \in C. \tag{4.8}$$

De vector $\mathbf{k} \in R^2$ is een willekeurige vector met lengte 1. Als we deze oplossing in het stelsel (4.7) substitueren, verkrijgen we

$$(-\omega I + Ak_x + Bk_y)\,\hat{\mathbf{q}} = 0.$$

Dit stelsel leidt tot een niet-triviale oplossing voor ons probleem (4.7), indien de matrix $(Ak_x + Bk_y - \omega I)$ singulier is, ofwel indien geldt

$$\begin{array}{l} \det(Ak_x + Bk_y - \omega I) = 0 \quad \Rightarrow \\ \det(K - \omega I) = 0 \;\; \text{met} \;\; K = Ak_x + Bk_y. \end{array}$$

Aan deze voorwaarde is voldaan, indien ω een eigenwaarde is van de matrix K.

Indien het stelsel (4.7) hyperbolisch is, dan geldt via definitie 1, dat alle mogelijke eigenwaarden λ_j van de matrix K reëel zijn. Een niet-triviale oplossing van de vorm (4.8) is dan golfvormig. Er geldt immers $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \lambda_j t \in R \;\; \forall \lambda_j$. We noteren deze golfvormige oplossingen als

$$\mathbf{q}^{(j)} = \hat{\mathbf{q}}^{(j)} \exp iS_j(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{q}}^{(j)} \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \lambda_j t) \;\; \text{met} \;\; j \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad \lambda_j \in R. \tag{4.9}$$

Aan de hand van deze oplossingen laten we enkele veelgebruikte termen uit de karakteristiekentheorie de revue passeren. Voor een uitgebreide behandeling verwijzen we nogmaals naar Courant en Hilbert [4]. Een golf $\mathbf{q}^{(j)}$ is te associëren met een transportfenomeen. De golf $\mathbf{q}^{(j)}$ plant zich voort in de richting $\mathbf{k}$ met een fasesnelheid $\mathbf{a}^{(j)}$ gedefinieerd als

$$\mathbf{a}^{(j)} = \omega \mathbf{k} = \lambda_j \mathbf{k}. \tag{4.10}$$

De eigenwaarde λ_j geeft de frequentie van de golf weer. De functie $S(\mathbf{x}, t)$ noemt men de fase.
We beschouwen de transportverschijnselen aan de hand van de zogenaamde karakteristieke oppervlakken. Een karakteristiek oppervlak is op tijdstip t gedefinieerd als een oppervlak, waarvoor geldt

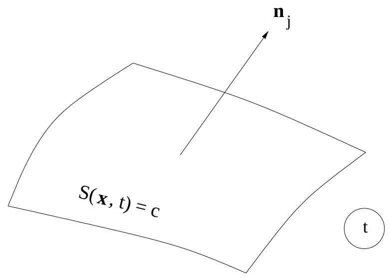
$$S(\mathbf{x}, t) = c = \text{constant}, \quad \forall (x, y) \in \Omega, \; c \in R.$$

Ω identificeert het fysische domein, waarin de stroming zich afspeelt. Uit deze definitie volgen onderstaande relaties

$$\partial_t S = -\lambda_j, \tag{4.11}$$

$$\nabla S = \mathbf{k}. \tag{4.12}$$

De laatste relatie beschrijft, dat de normaal op het oppervlak $S(\mathbf{x}, t) = c$ op tijdstip t gelijk is aan de voortplantingsrichting $\mathbf{k}$ van de golf[1]. In figuur 4.1 staat een karakteristiek oppervlak afgebeeld.



Figuur 4.1: Een karakteristiek oppervlak $S(\mathbf{x}, t)$ op een willekeurig gegeven tijdstip t.

Langs een karakteristiek oppervlak heeft de fase $S(\mathbf{x}, t)$ van de golf een constante waarde, ofwel de oplossing $\mathbf{q}^{(j)}$ is langs het oppervlak constant. Zo'n karakteristiek oppervlak plant zich voort met een snelheid $\mathbf{a}$. Dit is als volgt in te zien. Voor de totale tijdsafgeleide $\frac{dS}{dt}$ in de richting $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{a}$ moet in zo'n geval gelden $\frac{dS}{dt} = 0$. Aan deze voorwaarde is voldaan

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla S = -\lambda_j + \lambda_j \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = -\lambda_j + \lambda_j = 0.$$

Als het oppervlak zich voortplant, blijft de fase constant, dit zit immers in de definitie van het karakteristieke oppervlak opgesloten. Ofwel de constante oplossing $\mathbf{q}^{(j)}$ wordt met het karakteristieke oppervlak

[1] Voor een oppervlak $n_x x + n_y y =$ constant is $\mathbf{n} = (n_x, \; n_y)$ de normaal op dit oppervlak.

door de stroming meegenomen. Doordat het karakteristieke oppervlak zich verplaatst in de stroming wordt dus eveneens informatie over de oplossing $\mathbf{q}^{(j)}$ verspreid. Dit informatietransport gebeurt met een snelheidsgrootte a in de richting $\mathbf{k}$.

Zoals reeds eerder is gezegd, zijn de beschreven ideeën te generaliseren naar ons stelsel Euler vergelijkingen. Zonder bewijs, zie Hirsch [14, blz.153] vermelden we, dat elke oplossing van ons stelsel Euler vergelijkingen is te schrijven als een superpositie van een viertal golfvormige oplossingen

$$\mathbf{q} = \sum_{j=1}^{4} \hat{\mathbf{q}}^{(j)} \exp\left(iS^{(j)}(\mathbf{x}, t)\right). \tag{4.13}$$

De deeloplossingen $\hat{\mathbf{q}}^{(j)} \exp\left(i(S^{(j)}(\mathbf{x}, t))\right)$ zijn te allen tijde golfvormig wegens het hyperbolische karakter van ons stelsel Euler vergelijkingen. De constatering omtrent de oplossingen van ons stelsel Euler vergelijkingen blijkt van groot belang te zijn bij de constructie van de randvoorwaarden voor ons probleem.

4.1.4 Riemann-invarianten

Riemann-invarianten spelen een belangrijke rol in onze numerieke oplosmethode voor de 2-dimensionale Euler vergelijkingen. In deze paragraaf zullen we in het kort aandacht besteden aan deze invarianten.
We beschouwen een willekeurig domein Ω in twee dimensies. De stroming over het domein voldoet aan de Euler vergelijkingen in één dimensie

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} &= 0 \quad \Rightarrow & (4.14)\\ \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + A\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} &= 0, & (4.15) \end{aligned}$$

met

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ \rho u H \end{pmatrix}.$$

De matrix A staat gegeven in paragraaf 4.1.1. In paragraaf 7.5.1 zal blijken dat het voldoende is de Riemann-invarianten te beschouwen voor deze één-dimensionale versie van de Euler vergelijkingen.
We beschouwen een scalaire grootheid v welke voldoet aan de onderstaande één-dimensionale golfvergelijking

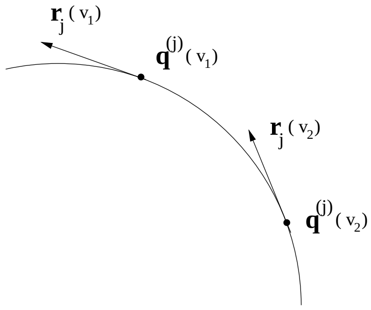
$$\frac{\partial v}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \tag{4.16}$$

waarin λ_j een eigenwaarde is van de matrix A, zie paragraaf 4.1.2. De scalaire grootheid v is constant langs een karakteristiek gedefinieerd door de richting $\frac{dx}{dt} = \lambda_j$. We gaan op zoek naar een oplossing $\mathbf{q}^{(j)}(v)$ van het stelsel Euler vergelijkingen (4.14) welke tangentieel loopt aan de rechtereigenvector $\mathbf{r}_j(v)$ behorende bij de eigenwaarde $\lambda_j(v)$. Zo'n oplossing $\mathbf{q}^{(j)}(v)$ definieert een golfpad in de toestandsruimte Q. Langs het golfpad $\mathbf{q}^{(j)}$ geldt

$$\frac{d\mathbf{q}^{(j)}}{dv} = \mathbf{r}_j.$$

In figuur 4.2 is een schets gemaakt van deze situatie. De zodanig geconstrueerde oplossing $\mathbf{q}^{(j)}$ voldoet aan het stelsel Euler vergelijkingen (4.14). Dit is via vergelijking (4.16)als volgt in te zien

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{q}^{(j)}}{\partial t} &= \frac{d\mathbf{q}^{(j)}}{dv}\frac{\partial v}{\partial t} = \mathbf{r}_j \frac{\partial v}{\partial t}, \\ A\frac{\partial \mathbf{q}^{(j)}}{\partial x} &= A\frac{d\mathbf{q}^{(j)}}{dv}\frac{\partial v}{\partial x} = A\mathbf{r}_j \frac{\partial v}{\partial x} = \lambda_j \mathbf{r}_j \frac{\partial v}{\partial x}, \end{aligned}$$



Figuur 4.2: Een golfpad in de toestandsruimte Q

ofwel

$$\frac{\partial \mathbf{q}^{(j)}}{\partial t} + A\frac{\partial \mathbf{q}^{(j)}}{\partial x} = \mathbf{r}_j\frac{\partial v}{\partial t} + \lambda_j \mathbf{r}_j\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Langs het golfpad $\mathbf{q}^{(j)}$ in de toestandsruimte blijven bepaalde grootheden constant. Deze grootheden construeren we als volgt :
Een functionaal $\psi^{(j)}(v)$ is invariant langs een golfpad $\mathbf{q}^{(j)}$ als geldt

$$\frac{d\psi^{(j)}}{dv} = 0,$$

ofwel

$$\frac{d\psi^{(j)}}{dv} = \frac{\partial \psi^{(j)}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{d\mathbf{q}^{(j)}}{dv} = \frac{\partial \psi^{(j)}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{r}^{(j)} = 0. \tag{4.17}$$

Deze vergelijking zegt dat de functionaal constant blijft langs het golfpad $\mathbf{q}_j$ indien de gradiënt naar de variabele $\mathbf{q}$ van de functionaal $\psi^{(j)}$ orthogonaal is ten opzichte van de corresponderende j-de eigenvector $\mathbf{r}_j$. Indien een functionaal aan voorwaarde (4.17) voldoet, noemen we hem een Riemann-invariant. Voor elke eigenwaarde λ_j en bijbehorende eigenvector $\mathbf{r}_j$ kunnen we via de voorwaarde (4.17) een aantal onafhankelijke Riemann-invarianten afleiden. Voor de eigenwaarde $\lambda_1 = u - c$ hebben we dit uitgeschreven. De bijbehorende eigenvector $\mathbf{r}_1$ luidt $\big(\rho/2c,\ \frac{\rho}{2c}(u-c),\ \frac{\rho v}{2c},\ \frac{\rho}{2c}(H-cu)\big)$.

$$\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \mathbf{q}} \cdot r_1 = \rho/2c\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial q_1} + \frac{\rho}{2c}(u-c)\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial q_2} + \frac{\rho v}{2c}\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial q_3} + \frac{\rho}{2c}(H-cu)\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial q_4} = 0.$$

Het oplossen van deze partiële differentiaalvergelijking is geen gemakkelijk zaak. We geven hier de drie onafhankelijke oplossingen, zoals zij zijn gegeven in het diktaat van Hemker [12]. De onafhankelijke Riemann-invarianten bij de eigenwaarde λ_1 luiden

$$\psi_1^{(1)} = u + \frac{2}{\gamma-1}c,\quad \psi_2^{(1)} = v,\quad \psi_3^{(1)} = \ln\big(p\rho^{-\gamma}\big). \tag{4.18}$$

Voor de eigenwaarden $\lambda_{2,3}$ luiden de Riemann-invarianten

$$\psi_1^{(2,3)} = u,\quad \psi_2^{(2,3)} = p. \tag{4.19}$$

Wegens de multipliciteit van deze eigenwaarde $\lambda_{2,3} = u$ zijn er slechts twee onafhankelijke Riemann-invarianten. Voor de eigenwaarde $\lambda_4 = u + c$ zijn de onafhankelijke Riemann-invarianten gegeven als

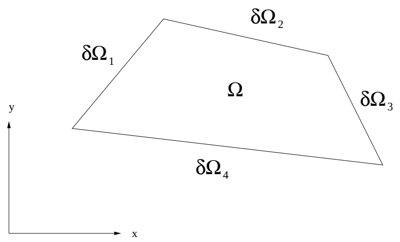
$$\psi_1^{(4)} = u - \frac{2}{\gamma-1}c,\quad \psi_2^{(4)} = v,\quad \psi_3^{(4)} = \ln\big(p\rho^{-\gamma}\big). \tag{4.20}$$

In paragraaf 7.5.1 zullen we een toepassing zien van deze Riemann-invarianten.

Hoofdstuk 5

Randvoorwaarden

We beschouwen een stromingsdomein Ω met een rand $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3 \cup \partial\Omega_4$, zie figuur 5.1.

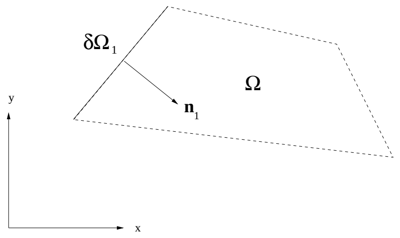


Figuur 5.1: Een willekeurig domein Ω met de randen $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$, $\partial\Omega_3$ en $\partial\Omega_4$

Ons stelsel Euler vergelijkingen beschrijft over dit stromingsdomein een begin-randwaarde probleem. Om het stelsel op te kunnen lossen hebben we een beginwaarde nodig op een gegeven tijdstip. Daarnaast moeten we aan de randen randvoorwaarden opleggen. De bepaling van de beginwaarde laten we hier achterwege. We zullen in de CWI-code het stelsel Euler vergelijkingen oplossen onder de aanname dat de oplossing stationair is. In dit hoofdstuk bespreken we welke randvoorwaarden we aan ons stelsel Euler vergelijkingen moeten opleggen. Het aantal randvoorwaarden per rand blijkt vast te liggen door het hyperbolische karakter van ons stelsel. Ons probleem is goedgesteld in de zin van Hadamard, indien we niet meer en niet minder voorwaarden vastleggen. De vraag is op grond waarvan dit aantal tot standkomt.

5.1 De benodigde theorie voor het aantal randvoorwaarden

We beschouwen de rand $\partial\Omega_1$ van ons willekeurige domein Ω. Op de rand $\partial\Omega_1$ definiëren we de eenheidsnormaal $\mathbf{n}$, die in de richting van het inwendige van het stromingsdomein wijst, zie figuur 5.2.



Figuur 5.2: De rand $\partial\Omega_1$ met de gedefinieerde eenheidsnormaal $\mathbf{n}$.

We grijpen terug naar de representatie van de oplossing $\mathbf{q}$ van ons stelsel Euler vergelijkingen in termen van de golven met een willekeurige voortplantingsrichting $\mathbf{k}$, zie vergelijking (4.13). We bouwen de oplossing $\mathbf{q}$ op de rand $\partial\Omega_1$ op uit de vier golven met voortplantingsrichting $\mathbf{k} = \mathbf{n}$. De oplossing $\mathbf{q}$ wordt dan geschreven in de vorm

$$\mathbf{q} = \sum_{j=1}^{4} \mathbf{q}^{(j)} = \sum_{j=1}^{4} \hat{\mathbf{q}}^{(j)} \exp\left(i(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} - \lambda_j t)\right),$$

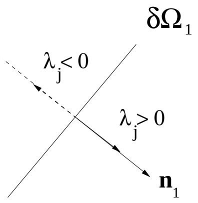
met

$$\lambda_1 = u_n - c, \tag{5.1}$$
$$\lambda_2 = u_n, \tag{5.2}$$
$$\lambda_3 = u_n, \tag{5.3}$$
$$\lambda_4 = u_n + c. \tag{5.4}$$

Hierbij hebben we de matrices A en B lokaal langs de rand bevroren. Voor de fasesnelheid van de deelgolven geldt

$$\mathbf{a}_1 = \lambda_1\mathbf{n} = (u_n - c)\mathbf{n}, \tag{5.5}$$
$$\mathbf{a}_2 = \lambda_2\mathbf{n} = u_n\mathbf{n}, \tag{5.6}$$
$$\mathbf{a}_3 = \lambda_3\mathbf{n} = u_n\mathbf{n}, \tag{5.7}$$
$$\mathbf{a}_4 = \lambda_4\mathbf{n} = (u_n + c)\mathbf{n}, \tag{5.8}$$

hierin is u_n de snelheidscomponent in de normaalrichting $\mathbf{n}$. De oplossing $\mathbf{q}$ op de rand bestaat uit vier golven $\mathbf{q}^{(j)}$, die zich voortplanten in de richting van de normaal $\mathbf{n}$ met een snelheidsgrootte λ_j. Elke golf verspreidt een stukje informatie over de oplossing $\mathbf{q}$ in de richting van de normaal. Het teken van de fasesnelheid $\mathbf{a}^{(j)}$, waarmee dit transport plaatsvindt, geeft aan of de golf de informatie naar het binnengebied verspreidt, $\lambda_j > 0$, of dat de informatie het stromingsgebied uitstroomt, $\lambda_j < 0$, zie figuur 5.3.



Figuur 5.3: Informatie verspreiding over de rand in de richting van de normaal $\mathbf{n}$ afhankelijk van het teken van de eigenwaarden van de matrix $K = An_x + Bn_y$.

Het aantal randvoorwaarden, dat we moeten opleggen, correspondeert met het aantal karakteristieken dat het domein instroomt, ofwel met het aantal positieve eigenwaarden van de matrix $K = An_x + Bn_y$. We spreken van fysische randvoorwaarden. De informatie, die zich via de overige karakteristieken voortplant, wordt volledig vastgelegd door de oplossing van de Euler vergelijkingen op het inwendige stromingsdomein. Indien we genoodzaakt zijn, omdat bijvoorbeeld de gebruikte numerieke discretisatiemethode dit vereist, om meer dan het vereiste aantal randvoorwaarden op te leggen, noemen we deze extra randvoorwaarden numerieke randvoorwaarden. We zullen de randvoorwaardenproblematiek voor verscheidene soorten randen beschouwen.

5.2 Aantal randvoorwaarden voor verschillende type randen

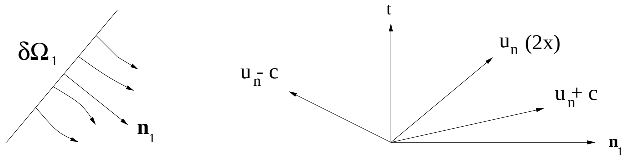
We bekijken de eigenwaarden $\lambda_1 = u_n - c,\ \lambda_2 = u_n,\ \lambda_3 = u_n,\ \lambda_4 = u_n + c$ op de rand $\partial\Omega_1$. Het teken van de eigenwaarden hangt af van het type rand waarmee we te maken hebben. Het type van de rand identificeren we als volgt. De rand kan een in- of uitstroomrand zijn, in dat geval geldt respectievelijk $u_n > 0$ of $u_n < 0$. Maar eveneens is het van belang of deze in- of uitstroom sub- of supersoon is.

5.2.1 Een aantal voorbeelden

Als voorbeeld beschouwen we de rand $\partial\Omega_1$ onder de aanname dat via de rand subsone instroom plaatsvindt. In dat geval geldt voor de eigenwaarden

$$\lambda_1 = u_n - c < 0, \quad \lambda_{2,3} = u_n > 0, \quad \lambda_4 = u_n + c > 0.$$

Ofwel er stromen drie golven via de rand $\partial\Omega_1$ het stromingsdomein Ω in. Dit staat geïllustreerd in figuur 5.4.

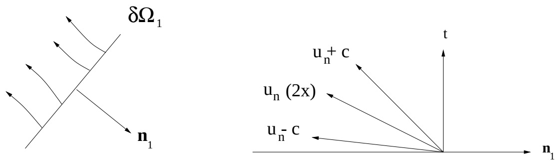


Figuur 5.4: Subsone instroomrand.

De figuur vereist enige uitleg. In de tijd t verplaatsen zich vier golven vanaf de rand $\partial\Omega_1$ in de richting van de normaal. Drie golven planten zich voort in de richting van de positieve normaal, de andere golf verplaatst zich in de negatieve richting. Bij de representatie van de golven staat de grootte van de voortplantingssnelheid gegeven. De lijn geassocieerd met de golven met voortplantingssnelheid $u_n\mathbf{n}$ lopen daarbij steiler dan de lijn, die is geassocieerd met de golf met snelheidsgrootte $u_n + c$. De laatste golf legt immers in een gelijke tijdstap een grotere afstand af langs de positieve normaal.
Een tweede voorbeeld illustreert het aantal randvoorwaarden dat moet worden opgelegd, indien de rand $\partial\Omega_1$ een supersone uitstroomrand is. In dat geval geldt voor de eigenwaarden

$$\lambda_1 = u_n - c < 0, \ \lambda_{2,3} = u_n < 0, \ \lambda_4 = u_n + c < 0.$$

Ofwel we hoeven in het geheel geen randvoorwaarden op te leggen. De situatie op de rand staat geschetst in figuur 5.5.



Figuur 5.5: Supersone uitstroomrand.

5.2.2 De fysische randvoorwaarden voor de verschillende type randen

In tabel 5.2.2 staan het aantal fysische randvoorwaarden genoemd afhankelijk van het type rand, dat wordt beschouwd.

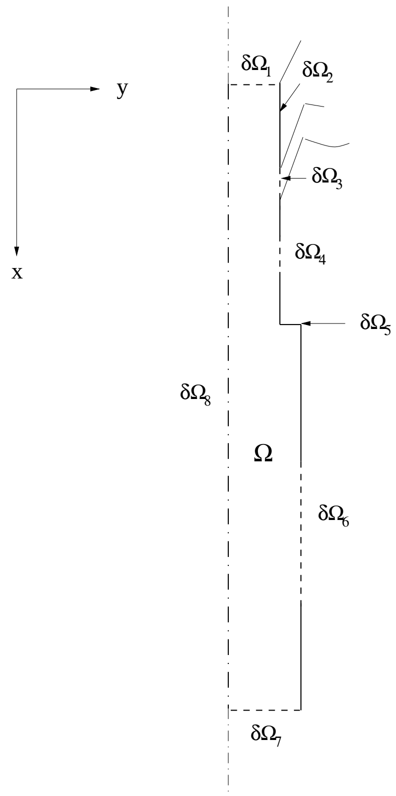
	Subsone stroming	Supersone stoming
Instroom	3	4
Uitstroom	1	0

Tabel 5.1: Aantal fysische randvoorwaarden afhankelijk van het type rand

Naast vrije randen, waarlangs de stroming het stromingsdomein in of uit kan stromen, hebben we veel te maken met vaste ondoordringbare wanden. In het geval van de blazer treffen we zo'n rand aan langs de wanden van het trekkanaal. Een vaste ondoordringbare wand is een bijzonder geval van een vrije wand met een subsone uitstroom. Er geldt $u_n = 0$ en er stroomt slechts één golf het stromingsdomein in. Het is de golf geassocieerd met de positieve eigenwaarde $\lambda_4 = u_n + c = c$. Op een vaste ondoordringbare wand hoeven we dus slechts één randvoorwaarde te definiëren. Over het algemeen kiest men als randvoorwaarde, de normaalsnelheid op de wand nul. Wij zullen hier niet van afwijken.

5.3 De randvoorwaarden voor ons probleem

De basis voor de bepaling van de randvoorwaarden in ons blazerprobleem is gelegd. In figuur 5.6 staat nogmaals de geometrie van ons stromingsdomein geschetst. Deze geometrie duiden we aan als de CWI-geometrie. In tegenstelling tot de geometrie uit paragraaf 2.3.2 laten we in onze berekeningen met de CWI-code de luchtinlaat nog buiten beschouwing. De huidige versie van de code voor de berekeningen aan de spleetblazer rekent single block. Een uitbreiding naar multiblock is mogelijk, maar is uit tijdsoverwegingen vooralsnog achterwege gelaten. De roostergeneratie over een single block, waarin de luchtinlaat is opgenomen, is niet eenvoudig. We nemen daarom de luchtinlaat niet langer mee in ons fysische domein. Het fysische domein uit figuur 2.4 reduceert tot het fysische domein geschetst in figuur 5.6. De verschillende randen van het fysische domein zijn in de figuur voorzien van een nummer. De rand $\partial\Omega_3$ ligt daarbij op het einde van de luchtinlaat in het verlengde van de vaste wanden $\partial\Omega_2$ en $\partial\Omega_4$ van de blazer. De luchtinstroom via de rand $\partial\Omega_3$ zullen we d.m.v. geschikte randvoorwaarden vorm geven.



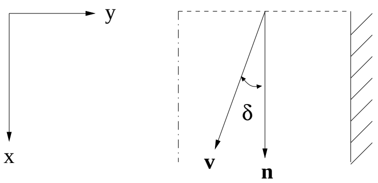
Figuur 5.6: Het fysische domein Ω met de rand $\partial\Omega$ opgebouwd uit de randen $\partial\Omega_1$ t/m $\partial\Omega_8$.

5.3.1 Is ons probleem goedgesteld in de zin van Hadamard?

Voor we van start gaan met de beschouwing van de verschillende randen en hun randvoorwaarden willen we eerst de nadruk leggen op het volgende. Met de theorie uit paragraaf 5.1 is het *aantal* randvoorwaarden vastgelegd. Er is geen uitspraak gedaan omtrent *welke* randvoorwaarden we moeten opleggen. Het blijkt niet altijd mogelijk te zijn om iedere willekeurige combinatie van randvoorwaarden te nemen, zolang het aantal maar correspondeert met het type van de rand en de stroming. Niet iedere combinatie leidt tot een goed gesteld probleem in de zin van Hadamard. We zullen ons in dit werk niet wijden aan deze problematiek. Op de verschillende randen zullen we gangbare randvoorwaardencombinaties kiezen. Alleen de combinatie van randvoorwaarden op de randen $\partial\Omega_1$ en $\partial\Omega_3$ is niet standaard. Mochten in de toekomst uit deze keuze problemen voortvloeien dan zullen we ons alsnog aan deze problematiek wijden. We verwijzen voor een verdere bespreking naar werk van Koren [17, 21–33] en Hirsch [15, blz. 347–355].

5.3.2 Randvoorwaarden op de rand aan het begin van de draadinlaat $\partial\Omega_1$

De randen $\partial\Omega_1$ en $\partial\Omega_3$ zijn de lastige randen van ons domein. Rand $\partial\Omega_1$ bevindt zich aan het begin van de draadinlaat. Uit de praktijk is bekend, dat voor deze rand twee verschillende typen mogelijk zijn. Zo kan er sprake zijn van subsone instroom of subsone uitstroom. Daarnaast kan de rand uit een combinatie van beide typen bestaan. Voor viskeuze stromingen komt het eerste geval overeen met de gewenste situatie. De lucht, welke via de draadinlaat de blazer instroomt, veroorzaakt wegens het aanwezige snelheidsverschil met de filamenten een schuifspanning op deze filamenten. De schuifspanning is zodanig gericht dat lokaal aan de filamenten wordt getrokken. Bij uitstroom aan de rand $\partial\Omega_1$ daarentegen treden de schuifspanningen op het filament in de verkeerde richting op. De filamenten ondervinden lokaal een negatieve trekkracht. Over de gehele blazer genomen kan de resulterende trekkracht in zo'n geval echter nog positief zijn. In situaties van sterke terugstroming hebben daarentegen de schuifspanningen in de negatieve x-richting de overhand. De totale trekkracht is negatief en de filamenten slaan terug. In zo'n geval draait het volledige spinproces vast.
Voor subsone instroom moeten we op de rand drie fysische randvoorwaarden opleggen. We zetten in ieder geval de druk en de temperatuur vast. Met deze randvoorwaarden is ter plaatse de volledige thermodynamica bepaald, zie paragraaf 3.2.2. De druk en temperatuur kunnen we verkrijgen uit meetgegevens. Beide grootheden komen overeen met standaardcondities. Voor de druk geldt $p = p_{\text{omg}} = \pm 1$ atm. De temperatuur op rand $\partial\Omega_1$ ligt rond kamertemperatuur ± 293 K. De derde randvoorwaarde levert meer problemen. We hebben besloten de hoek van instroom voor te schrijven, zie figuur 5.7. We nemen aan dat er aan de rand $\partial\Omega_1$ sprake is van één-dimensionale instroom. Met onze keuze $\delta = 0$ resulteert dit in de aanname dat de instroom plaatsvindt in de x-richting, tevens de normaalrichting op de wand, ofwel $u_{\tan} = 0$.



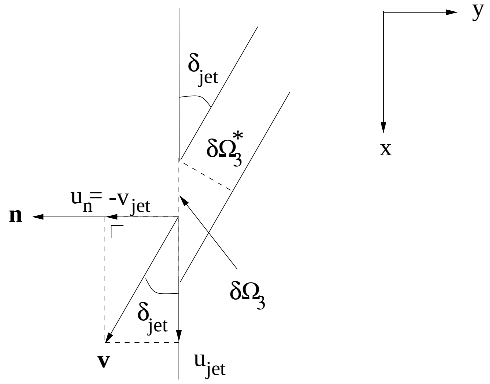
Figuur 5.7: Definitie van de instroomhoek voor rand $\partial\Omega_1$.

De keuze $u_{\tan} = 0$ is een zwakke randvoorwaarde. De vraag is of met deze combinatie van randvoorwaarden ons probleem goed gesteld is in de zin van Hadamard. Onze randvoorwaardenafhandeling heeft in de afstudeerfase dan ook tot de nodige discussie geleid. Wesseling heeft een suggestie gedaan over het gebruik van de chimney-conditie op de rand. In appendix C staat het idee achter deze randvoorwaarde geschetst. In onze code is deze randvoorwaarde echter moeilijk te implementeren. Een andere suggestie was de snelheidscomponent u geheel vast te leggen en daaraan gekoppeld via de wet van Bernouilli, vergelijking (C.2), de druk voor te schrijven. Bij beide suggesties wordt aangenomen dat de luchtstroming boven de blazer een potentiaalstroming is.
We hebben echter onze randvoorwaardencombinatie gehandhaafd. Op onze wijze schrijven we niet hard de snelheid voor. Zodoende staan we over de rand $\partial\Omega_1$ zowel in- als uitstroom of een combinatie van beide toe. Dit blijkt van cruciaal belang voor de verklaring van het effect van de verbreding op de trekkracht, zie paragraaf 10.3. Verstopping in het trekkanaal kan zonder problemen leiden tot overstroming aan de

rand. Met het voorschrijven van de u-component en direct daaraan gekoppeld het debiet zouden we een essentieel deel van de stroming hebben vastgelegd. Met onze randvoorwaardencombinatie stelt de snelheid zich ongedwongen in afhankelijk van de overige randvoorwaarden, de instroom via de luchtinlaat en de geometrie van de blazer.
Rest ons de randvoorwaarde te bespreken, welke we in het geval van subsone uitstroom opleggen. We hoeven slechts één fysische randvoorwaarde voor te schrijven. Afhankelijk van de beschikbare meetgegevens zullen we of de druk of de temperatuur vastleggen. Beide grootheden liggen aan de rand rond standaardcondities. Uit de meetgegevens van Persoon volgt $p = p_{\text{atm}} = \pm 1$ atm.

5.3.3 Randvoorwaarden op het einde van de luchtinlaat $\partial\Omega_3$

De rand $\partial\Omega_3$ ligt aan het einde van de luchtinlaat in het verlengde van de vaste wanden $\partial\Omega_2$ en $\partial\Omega_4$. Onder invloed van de hoge druk in de suskamer wordt de perslucht via de luchtinlaat met hoge snelheid het trekkanaal ingeblazen. Bij Akzo Nobel neemt men aan dat de stroming in de luchtinlaat choked is. In de nauwste doorsnede van de luchtinlaat is de stroming sonisch, ofwel op de rand $\partial\Omega_3^*$, zie figuur 5.8, geldt $M = 1$.



Figuur 5.8: Definitie van grootheden rondom de luchtinlaat

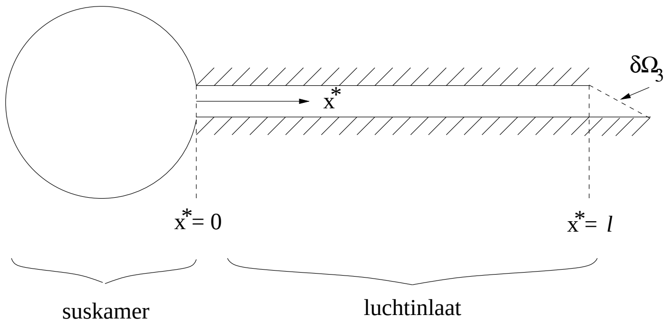
Ten gevolge van de toename van het doorstroomoppervlakte na rand $\partial\Omega_3^*$ is de kans groot, dat de perslucht expandeert. We nemen echter aan dat ter plaatse van de rand $\partial\Omega_3$ geen noemenswaardige expansie plaatsvindt. Dit wordt tevens bevestigd door de meetgegevens van Persoon. Zodoende kunnen we aannemen dat op de rand $\partial\Omega_3$ geldt $M_{\text{jet}} = 1$. De index jet geeft de grootheden op de rand $\partial\Omega_3$ aan. Naast het Machgetal leggen we op rand $\partial\Omega_3$ de instroomhoek, δ_{jet}, vast, zie figuur 5.8. In overeenstemming met de blazergeometrie nemen we $\delta_{\text{jet}} = 20°$. Het type van de rand ligt met deze aannamen vast. Er is sprake van een subsone instroomrand. Ter illustratie verwijzen we naar figuur 5.8. Het randtype is gerelateerd aan de normaalsnelheid u_n op de rand. Voor deze normaalsnelheid geldt, $u_n = M_{\text{jet}} c_{\text{jet}} \sin\delta_{\text{jet}}$. Hieruit volgt dat indien wordt voldaan aan de voorwaarde $M_{\text{jet}} < 1/\sin\delta_{\text{jet}}$, de rand $\partial\Omega_1$ is te beschouwen als een subsone instroomrand. Met de randvoorwaarden $M_{\text{jet}} = 1$ en $\delta_{\text{jet}} = 20°$ is ruim aan de gestelde voorwaarde voldaan.

Een subsone instroomrand vraagt om drie randvoorwaarden. We schrijven de snelheidscomponenten u_{jet} en v_{jet} en de geluidssnelheid c_{jet}, voor. Onder de aanname dat op de rand $\partial\Omega_3$ het Machgetal M_{jet} en de instroomhoek δ_{jet} bekend zijn, volgen de snelheidscomponenten eenvoudig uit figuur 5.8

$$u_{\text{jet}} = M_{\text{jet}} c_{\text{jet}} \cos\delta_{\text{jet}}, \tag{5.9}$$

$$v_{\text{jet}} = -M_{\text{jet}} c_{\text{jet}} \sin\delta_{\text{jet}}. \tag{5.10}$$

De geluidssnelheid c_{jet} bepalen we door op de luchtinlaat 1D-gasdynamica toe te passen. We vatten de luchtinlaat op als een kanaal, waardoor bij benadering een één-dimensionale stroming plaatsvindt, zie figuur 5.9.
We nemen aan dat de toestanden op $x^* = \ell$ en $\partial\Omega_3$ bij benadering gelijk zijn. Op $x^* = \ell$ is zodoende het Machgetal bekend, $M|_{x*=\ell} = M_{\text{jet}}$. In appendix A hebben we voor een één-dimensionale stroming



Figuur 5.9: De luchtinlaat opgevat als een kanaal, waardoor een één-dimensionale stroming plaatsvindt.

in een kanaal afgeleid

$$\frac{c_0}{c} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{5.11}$$

ofwel de verhouding tussen de totale geluidssnelheid en de daadwerkelijke geluidssnelheid in een punt is een functie van het Machgetal in dat punt. Hoewel onze stroming in het nauwe kanaal zeker niet vrij is van viskeuze effecten, passen we toch bovenstaande vergelijking toe. Op deze manier zijn we m.b.v. ons bekende Machgetal in staat een uitspraak te doen over de geluidssnelheid $c_{\text{jet}} \approx c|_{x^*=\ell}$.
We moeten daartoe nog één laatste aanname doen omtrent de stroming in de luchtinlaat. Naast reversibiliteit stellen we dat de stroming in de luchtinlaat adiabatisch is, ofwel de stroming door de inlaat is isentroop. Voor isentrope stromingen is in paragraaf 3.2.5 gesteld dat de totale condities constant zijn. Ofwel de totale geluidssnelheid aan het einde van de luchtinlaat $c_0|_{x^*=\ell}$ is gelijk aan de totale geluidssnelheid op $x^* = 0$. Over deze totale geluidssnelheid weten we meer. Bij benadering is de stroming in de suskamer isentroop. De invloed van effecten van wrijving etc. aan de suskamerwanden zijn te verwaarlozen t.o.v. het relatief grote vrije stromingsgebied in de suskamer. De lucht in de suskamer staat bij benadering stil. Zodoende is de totale geluidssnelheid op $x^* = 0$ gelijk aan de geluidssnelheid in de suskamer,

$$c_0|_{x^*=\ell} \approx c_0|_{x^*=0} \approx c_{\text{sus}}.$$

De geluidssnelheid in de suskamer volgt via vergelijking (3.20) uit de bekende meetgegevens over de temperatuur in de suskamer. Er geldt $T_{\text{sus}} \approx T_{\text{omg}} = 293$ K. Met dit gegeven volgt uit vergelijking (5.11),

$$c_{\text{jet}} = c_{\text{sus}} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Met het voorschrijven van M_{jet}, δ_{jet} en c_{sus} liggen de toestanden u_{jet}, v_{jet} en c_{jet} vast.

We zijn ons bewust van het feit dat de randvoorwaarden behandeling op de rand $\partial\Omega_3$ niet overtuigend is. We moeten midden in een interesse gebied randvoorwaarden vastleggen en daarmee doen we uitspraken over een stroming, welke we juist willen bepalen.

5.3.4 De vaste ondoordringbare wanden $\partial\Omega_2$, $\partial\Omega_4$, $\partial\Omega_5$ en $\partial\Omega_6$

Naar aanleiding van paragraaf 5.2.2 moeten we op deze randen één fysische randvoorwaarde vastleggen. We hebben aangenomen, dat de wanden ondoordringbaar zijn, zodat een logische keuze voor deze randvoorwaarde luidt $u_n = 0$.

5.3.5 Randvoorwaarden op de rand aan het einde van het trekkanaal $\partial\Omega_7$

Op het einde van het kanaal stroomt de perslucht de blazer uit. Voor de huidige blazergeometrie in de proefmachine 550 vindt deze uitstroom plaats met een snelheid van ±180 m/s. Voor een trekkanaal zonder verbreding is een uitstroomsnelheid van ±250 m/s gemeten. We mogen aannemen dat op de rand

$\partial\Omega_7$ een subsone uitstroom plaatsvindt. Ofwel op deze rand moeten we één fysische randvoorwaarde opleggen. We kiezen de druk op de rand gelijk aan de omgevingsdruk $p = p_{\text{omgeving}}$. Naar aanleiding van inmiddels bekende meetgegevens van de druk op deze rand blijkt deze randvoorwaarde goed met de praktijksituatie overeen te komen.

5.3.6 Een samenvatting van de randvoorwaarden voor ons Euler model

In hoofdstuk 4 zijn de vergelijkingen opgesteld waaraan de stroming in onze blazer moet voldoen. In dit hoofdstuk hebben we aandacht besteed aan de randvoorwaarden op ons domein Ω. Hieronder hebben we de randvoorwaarden voor het Euler model op een rijtje gezet.

Op de randen leggen we de volgende randvoorwaarden op:

- $p = p_{\text{omgeving}}$, $T = T_{\text{omgeving}}$ en $\delta_{\text{instroom}} = 0$ op rand $\partial\Omega_1$ in het geval van subsone instroom,
- $p = p_{\text{omgeving}}$ of $T = T_{\text{omgeving}}$ op rand $\partial\Omega_1$ in het geval van subsone uitstroom,
- $u_n = 0$ op de randen $\partial\Omega_2$, $\partial\Omega_4$, $\partial\Omega_5$ en $\partial\Omega_6$,
- $M_{\text{jet}} = 1$, $\delta_{\text{jet}} = 20^\circ$ en $c_{\text{jet}} = c_{\text{sus}}\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M_{\text{jet}}^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ met $c_{\text{sus}} = \sqrt{\gamma R T_{\text{sus}}}$ op rand $\partial\Omega_3$,
- $p = p_{\text{omgeving}}$ op rand $\partial\Omega_7$.
- Voor de verwerking van de symmetrierand $\partial\Omega_8$ verwijzen we naar paragraaf 7.9.2.

We merken op dat we voor iedere rand een uitspraak hebben gedaan omtrent zijn type. De uitspraken zijn gebaseerd op ervaringen in de praktijk. In de programmatuur checken we nogmaals met welk type rand we te maken hebben. Op basis van de berekende normaalsnelheid op de randen passen we de benodigde randvoorwaarden in ons probleem toe. Indien bovenstaande aannames omtrent het type van de randen niet overeenkomen, kan dit gecorrigeerd worden. Zo'n correctie zou b.v. kunnen plaatsvinden tijdens het iteratieproces naar de numerieke oplossing van de stroming.

Hoofdstuk 6

Numerieke methoden voor de Euler vergelijkingen

6.1 Inleiding

In een beperkt aantal gevallen zijn we in staat bij geschikte begin- en randvoorwaarden een expliciete oplossing van de 2D Euler vergelijkingen te vinden. In de meeste gevallen blijven we echter in gebreke voor zover het een exacte uitdrukking voor de oplossing betreft. Hetzelfde principe gaat in nog sterkere mate op voor de NS-vergelijkingen. Om voor ons stelsel Euler vergelijkingen met bijbehorende randvoorwaarden een oplossing te vinden, zullen we ons moeten wenden tot numerieke oplosmethoden. We gaan op zoek naar een geschikte benadering van de oplossing. In dit hoofdstuk zullen we uitgebreid aandacht besteden aan enkele numerieke discretisatiemethoden welke speciaal zijn ontworpen voor hyperbolische stelsels.

6.1.1 Uitgangspunten voor een goede numerieke methode

Over de exacte oplossing $\mathbf{q}$ zijn de nodige gegevens bekend. We zijn bekend met de fysica, welke heeft geleid tot het stelsel Euler vergelijkingen. We kennen de achterliggende behoudswetten en we hebben kennis genomen van het hyperbolische karakter van het stelsel. Een numerieke oplossing is pas een goede benadering van de exacte oplossing als het eveneens deze fysica respecteert.

Met welke fysische aspecten moet ons numerieke schema rekening houden?

1) Behoud van massa, impuls en energie

De exacte oplossing $\mathbf{q}$ representeert aan de behoudswetten voor massa, impuls en energie. Na discretisatie van de Euler vergelijkingen moet de numerieke oplossing eveneens aan de behoudswetten voldoen. De discretisatie mag geen aanleiding geven tot generatie of vernietiging van massa, impuls of energie.

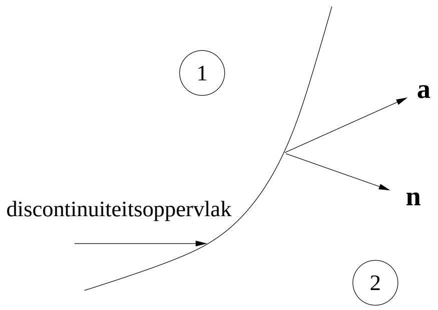
2) Goede representatie van fysisch correcte schokken.

Een oplossing $\mathbf{q}$ van de Euler vergelijkingen kan discontinu zijn. Zo'n discontinue oplossing voldoet aan de integraalvorm van de Euler vergelijkingen. In het stromingsdomein, 2D, kunnen met deze discontinuïteiten lijnen geassocieerd worden waarover de oplossing $\mathbf{q}$ discontinu is. Voor het gemak spreken we van discontinue oppervlakken. Tussen de toestanden aan beide zijden van zo'n vlak kunnen we een relatie afleiden. Deze relatie staat bekend als de Rankine-Hugoniot relatie. Deze luidt

$$(\mathbf{f}(\mathbf{q}_2) - \mathbf{f}(\mathbf{q}_1))\, n_x + (\mathbf{g}(\mathbf{q}_2) - \mathbf{g}(\mathbf{q}_1))\, n_y - \mathbf{a}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) \cdot \mathbf{n} = 0.$$

De indices 1 en 2 geven aan dat de toestand links respectievelijk rechts van het discontinuïteitsoppervlak heerst. De normaal $\mathbf{n}$ is gedefinieerd als de eenheidsnormaal $\mathbf{n}$ in de richting van gebied 1 naar gebied

2. De vector **a** beschrijft de snelheid, waarmee het discontinuïteitsoppervlak zich door de stroming verplaatst. In de tijd verandert de stroming en zo ook de ligging van een eventueel discontinuïteitsoppervlak. De vectoren **f** en **g** beschrijven de fluxen uit de Euler vergelijkingen, zie (4.1). Voor de afleiding van de relatie verwijzen we naar Hirsch [14, blz.88–92]. In figuur 6.1 staat de situatie over een discontinuïteitsoppervlak geschetst.



Figuur 6.1: Een discontinuïteitsoppervlak

De reden dat we de Rankine-Hugoniot relatie hier hebben opgenomen is de volgende. Als de oplossing van het stelsel Euler vergelijkingen een discontinuïteit bevat, dan moet over het bijbehorende discontinuïteitsoppervlak in de stroming aan de Rankine-Hugoniot relatie zijn voldaan. Op basis van de Rankine-Hugoniot relatie kan worden afgeleid, dat in de oplossing **q** van de 2D Euler vergelijkingen 3 soorten discontinuïteiten kunnen optreden, zie Hirsch [14, blz.88–92]. We geven voor deze typen discontinuïteiten in het kort de eigenschappen van de toestanden $\mathbf{q}_1$ en $\mathbf{q}_2$ weer.

Vortex sheets of sliplijnen en contactdiscontinuïteiten

Sliplijnen vormen een categorie oplossingen van de Rankine Hugoniot relatie. Over het discontinuïteitsoppervlak vindt in dit geval geen transport van massa plaats, ofwel

$$v_{n_1} = v_{n_2} = 0.$$

v_{n_1} en v_{n_2} geven de snelheidscomponent in de normaalrichting in gebied 1 en 2. De druk over een sliplijn is continu

$$p_1 = p_2.$$

Voor de tangentiële snelheid en de dichtheid ρ staan we een sprong toe over de contactdiscontinuïteit

$$\begin{aligned} v_{t_1} &\neq v_{t_2}, \\ \rho_1 &\neq \rho_2. \end{aligned}$$

Een bijzonder soort sliplijn is een contactdiscontinuïteit. Voor een contactdiscontinuïteit moet eveneens de tangentiële snelheid over het discontinuïteitsoppervlak continu zijn

$$v_{t_1} = v_{t_2}.$$

Slechts de dichtheid is discontinu over een contactdiscontinuïteit.

Schokken

Schokken zijn eveneens oplossingen van de Rankine-Hugoniot relatie. Bij een schok vindt over het discontinuïteitsoppervlak transport van massa plaats. In het geval van een schok zijn zowel de dichtheid ρ, de druk p, als de snelheid in de richting van de normaal op het vlak u_n, discontinu

$$\begin{aligned} \rho_1 &\neq \rho_2, \\ p_1 &\neq p_2, \\ u_{n_1} &\neq u_{n_2}. \end{aligned}$$

De tangentiële snelheid blijft continu over het discontinuiteitsoppervlak,

$$u_{t_1} \quad = \quad u_{t_2}.$$

Over de schok treedt een entropieverandering δs op, zie Hirsch [14, blz. 91]. Volgens de tweede hoofdwet van de thermodynamica moet deze entropieverandering in de stroomrichting positief zijn. Over de schok moet de entropie toenemen. Als we spreken over toe- of afname van een grootheid over een schok, dan bedoelen we toe- of afname van zo'n grootheid bij verplaatsing over een schok in de richting van de stroming. In Hirsch [15, blz.137–138] staat beschreven dat de entropie variatie positief is als er sprake is van een compressieschok. De druk en dichtheid nemen toe en de normaalsnelheid over de schok neemt af. Helaas blijken expansieschokken, waarbij een negatieve entropiesprong optreedt over de schok, eveneens een oplossing te zijn van de Euler vergelijkingen. Bij een expansieschok neemt de druk en de dichtheid over een schok af en neemt de normaalsnelheid over de schok toe. De Euler vergelijkingen leveren geen unieke oplossing. Als we een numerieke oplossing hebben gevonden, willen we met zekerheid kunnen zeggen dat de oplossing fysisch correct is. Een oplossing met expansieschokken willen we buiten beschouwing laten.

Onze numerieke methode zal een nette representatie moeten geven van discontinuïteiten in de stroming. Deze eis is van groot belang, omdat in de blazer rond de luchtinlaat eventueel schokken zouden kunnen optreden. Bovendien zullen we moeten toezien op het feit dat de numerieke methode geen oplossing met fysisch incorrecte schokken, zoals expansieschokken, toestaat.

3) Numerieke diffusie

De diffusietermen uit de NS-vergelijkingen spelen in de Euler vergelijkingen geen rol. We willen dan ook in de oplossing van de Euler vergelijkingen geen diffusieverschijnselen terugzien. Ten gevolge van de gebruikte numerieke methode treden echter in sommige gevallen in de numerieke oplossing toch diffusieverschijnselen op. Zulke numerieke modellen hebben een soort diffusieterm in hun discretisatie ingebouwd om bijvoorbeeld een nettere representatie van schokken te bewerkstelligen. Discontinuïteiten in de oplossing worden dankzij deze numerieke diffusie in de stroming uitgesmeerd en glad gestreken. Dit is niet gewenst. De discontinuïteiten vormen een essentieel onderdeel van de oplossing van de 2D Euler vergelijkingen. We verwachten in ons stromingsprobleem schokken in de uitkomst. Daarnaast treden problemen op als we zulke numerieke methoden toepassen voor de plaatsdiscretisatie van de NS-vergelijkingen. De waargenomen diffusie in de oplossing bestaat uit een numerieke diffusie component en uit een fysische diffusie component. Een juiste weergave van de diffusie is gewenst, omdat de diffusie verschijnselen een belangrijke rol spelen in een eventueel trekkrachtmodel.

4) Nette behandeling van de randvoorwaarden

We hebben in hoofdstuk 5 over de randvoorwaarden beschreven dat op basis van het hyperbolische karakter van de Euler vergelijkingen een gegeven aantal randvoorwaarden afhankelijk van het type van de rand en de stroming moeten worden vastgelegd. Het numerieke schema moet dit eveneens respecteren. In sommige numerieke methoden moeten op een rand meer randvoorwaarden worden vastgelegd, dan het aantal dat tot een correct gesteld probleem in de zin van Hadamard zal leiden. We spreken in zo'n geval van numerieke randvoorwaarden. Dit moeten we zien te voorkomen.

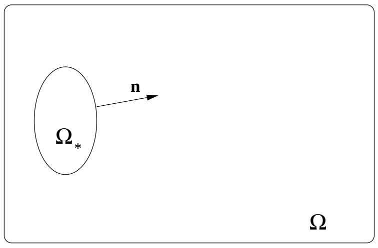
We hebben de fysische aspecten beschouwd waaraan de numerieke methoden moeten voldoen. Uiteraard spelen naast deze aspecten numerieke eigenschappen van de methoden een rol. Zo moet de numerieke methode bijvoorbeeld niet te veel rekentijd kosten. We gaan van start met de bespreking van standaard numerieke methoden voor hyperbolische vergelijkingen. Op basis van bovenstaande eisen zullen we uiteindelijk een keuze maken voor één van de methoden.

6.1.2 De conservatieve integraalvorm

Als uitgangspunt voor onze numerieke oplosmethoden nemen we de integraalvorm van ons systeem Euler vergelijkingen (4.1)

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_*} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} dV + \int_{\Omega_*} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} \right) dV &= 0, \\ \int_{\Omega_*} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} dV + \oint_{\partial\Omega_*} (\mathbf{f}(\mathbf{q}) n_x + \mathbf{g}(\mathbf{q}) n_y) \, dS &= 0,\end{aligned} \tag{6.1}$$

hierbij is Ω_* een willekeurig subdomein van het fysische domein Ω met de rand $\partial\Omega_*$, n_x en n_y zijn respectievelijk de x- en y-component van de naarbuitengerichte eenheidsnormaal $\mathbf{n}$. De keuze voor



Figuur 6.2: Subdomein Ω_* met naar buiten gerichte normaal $\mathbf{n}$.

de conservatieve integraalvorm van de Euler vergelijking is gebaseerd op het werk van Lax [21]. Hij stelt dat deze vorm geldig blijft in de aanwezigheid van discontinuïteiten in de stroming en dat het numerieke schema van deze vorm aan de sprongrelatie van Rankine-Hugoniot zal voldoen. Voor ons is deze geldigheid van groot belang, omdat eventueel in het trekkanaal in de buurt van de luchtinlaat schokken zouden kunnen optreden. We zullen ons gaan richten op de plaatsdiscretisatie.

6.2 Plaatsdiscretisatie van de conservatieve integraalvorm

Ons fysische domein Ω splitsen we op in elkaar niet overlappende subdomeintjes, eindige volumes, $\Omega_{i,j}$ met rand $\partial\Omega_{i,j}$. In het centrum van elk subdomein ligt een roosterpunt (x_i, y_j) met een toestand $\mathbf{q}_{i,j}$. De overdekking van het fysische domein is zodanig gestructureerd, dat deze topologisch equivalent is met een regelmatig rechthoekig rooster. Op deze wijze kunnen we met elk subdomein $\Omega_{i,j}$ maximaal vier buursubdomeinen indentificeren, $\Omega_{i\pm1,j}$, $\Omega_{i,j\pm1}$. De celwand tussen twee subdomeinen, bijvoorbeeld voor $\Omega_{i,j}$ en $\Omega_{i+1,j}$, duiden we aan als $\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$. Voor de rand $\partial\Omega_{i,j}$ volgt op deze wijze

$$\partial\Omega_{i,j} = \partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j} \cup \partial\Omega_{i-\frac{1}{2},j} \cup \partial\Omega_{i,j+\frac{1}{2}} \cup \partial\Omega_{i,j-\frac{1}{2}}.$$

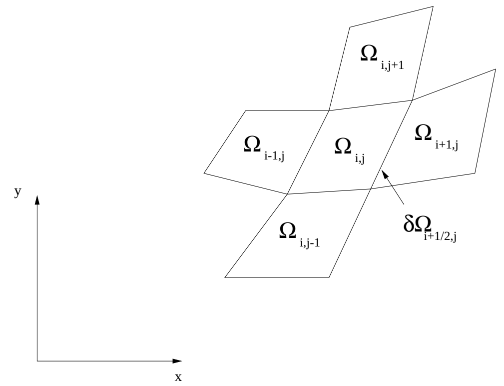
In figuur 6.3 staat de situatie geschetst.
Op ieder subdomein $\Omega_{i,j}$ passen we de behoudswetten uit vergelijking (6.1) toe. Dit leidt tot

$$\int_{\Omega_{i,j}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} dV + \oint_{\partial\Omega_{i,j}} \mathbf{f}(\mathbf{q}) n_x + \mathbf{g}(\mathbf{q}) n_y \, dS = 0. \tag{6.2}$$

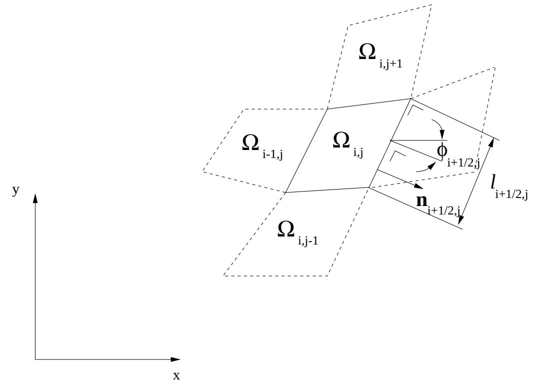
De tweede term representeert de integratie van de fluxcomponent langs de celrand $\partial\Omega_{i,j}$. Over een cel wordt aan de behoudswetten voldaan. De berekening van deze integraal kunnen we aanzienlijk vereenvoudigen.

6.2.1 Evaluatie van de integraal over de fluxcomponent langs celwand $\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$

We beschouwen een deel van de integraal over de fluxcomponent en wel de integraal langs de celwand $\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$. Op de celwand introduceren we een nieuw lokaal assenstelsel. We maken daarbij gebruik van de naar buiten gerichte eenheidsnormaal $\mathbf{n}_{i+\frac{1}{2},j} = (n_{x_{i+\frac{1}{2},j}}, n_{y_{i+\frac{1}{2},j}})$ en de hoek $\phi_{i+\frac{1}{2},j}$ welke is gedefinieerd als de hoek tussen de normaal op de celwand en de positieve x-as. $l_{i+\frac{1}{2},j}$ geeft de lengte van de celwand. Via de definitie van de hoek $\phi_{i+\frac{1}{2},j}$ volgt voor de normaal $\mathbf{n}_{i+\frac{1}{2},j} = (\cos\phi_{i+\frac{1}{2},j}, \sin\phi_{i+\frac{1}{2},j})$. De geïntroduceerde variabelen op de celwand $\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$ staan geïllustreerd in figuur 6.4.



Figuur 6.3: Het eindige volume $\Omega_{i,j}$ met zijn vier buren.



Figuur 6.4: De gedefinieerde variabelen op de celwand $\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$.

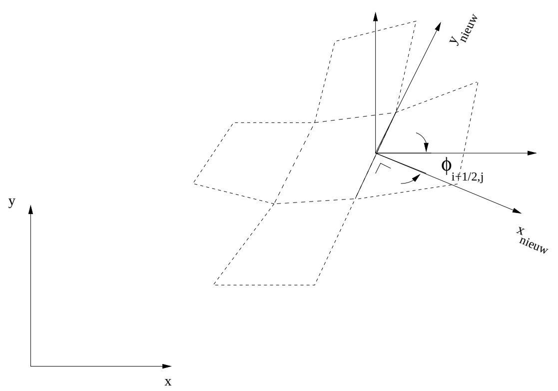
We roteren het oorspronkelijke assenstelsel (x, y) over de hoek $\phi_{i+\frac{1}{2},j}$, waarbij de positieve x-as van het nieuwe assenstelsel in de richting van de naar buiten gerichte normaal op de celwand loopt. De y-as ligt tangentieel aan de wand. In figuur 6.5 staat het lokale assenstelsel op de celwand $\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$ getekend.
We bepalen nu de integraal over de fluxcomponent van de wand in dit nieuwe lokale assenstelsel. We maken daarbij gebruik van het feit dat de Euler vergelijkingen rotatie-invariant zijn. In dat geval geldt

$$\mathbf{f}(\mathbf{q})\cos\phi + \mathbf{g}(\mathbf{q})\sin\phi = T(\phi)^{-1}\,\mathbf{f}(T(\phi)\,\mathbf{q}) \quad \forall\phi \in R \text{ en alle toelaatbare toestanden } \mathbf{q} \in R^4, \qquad (6.3)$$

waarbij de matrix $T(\phi)$ is gegeven als

$$T(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vergelijking (6.3) is gemakkelijk te verifiëren. We verwijzen naar het diktaat van Hemker [12, blz.65–66]. Het rechterlid beschrijft de fluxterm door de wand in het oude assenstelsel in termen van de flux $\mathbf{f}$ en de toestand $\mathbf{q}$ in het nieuwe lokale assenstelsel, welke uit het oude is ontstaan door een rotatie om een hoek van ϕ graden. Misschien ten overvloede vermelden we dat de flux $\mathbf{f}$ in het rechterlid wijst in de richting van de positieve x-as in het nieuwe lokale assenstelsel en de fluxen $\mathbf{f}$ en $\mathbf{g}$ in het linkerlid



Figuur 6.5: Het lokale assenstelsel op de celwand $\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$

respectievelijk de fluxen beschrijven in het oorspronkelijke assenstelsel in de richting van de positieve x- en y-as. De toestand $\mathbf{q}_{\text{nieuw}}$ in het lokale assenstelsel ontstaat uit de oorspronkelijke toestand $\mathbf{q}$ via vermenigvuldiging met de rotatiematrix $T(\phi)$

$$\mathbf{q}_{\text{nieuw}} = \begin{pmatrix} \rho_{\text{nieuw}} \\ (\rho u)_{\text{nieuw}} \\ (\rho v)_{\text{nieuw}} \\ (\rho E)_{\text{nieuw}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_{\text{nieuw}} \\ \rho v_{\text{nieuw}} \\ \rho E \end{pmatrix} = T(\phi)\mathbf{q}.$$

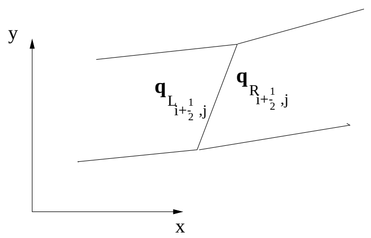
Via de definitie van het lokale assenstelsel en de rotatie-invariantie wordt de integraal over de fluxterm langs de celwand $\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$ in het lokale assenstelsel geschreven als

$$\int_{\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j}} \mathbf{f}(\mathbf{q})n_{x_{i+\frac{1}{2},j}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})n_{y_{i+\frac{1}{2},j}}\, dS \;=\; \int_{\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j}} T^{-1}(\phi_{i+\frac{1}{2},j})\, \mathbf{f}\left(T(\phi_{i+\frac{1}{2},j})\,\mathbf{q}\right)\, dS \tag{6.4}$$

We gaan op zoek naar een geschikte discretisatie van deze integraal.

De numerieke flux

We nemen aan dat links en rechts van de celwand twee constante toestanden heersen, $\mathbf{q}_{L_{i+\frac{1}{2},j}}$ en $\mathbf{q}_{R_{i+\frac{1}{2},j}}$, zie figuur 6.6. De constructie van deze toestanden staat beschreven in paragraaf 7.10.2. Voor onderstaande evaluatie is het van geen belang de exacte uitdrukking voor $\mathbf{q}_{L_{i+\frac{1}{2},j}}$ en $\mathbf{q}_{R_{i+\frac{1}{2},j}}$ te kennen.



Figuur 6.6: De gedefinieerde variabelen op de celwand $\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$.

We beschouwen het stromingsprobleem dat onstaat op de celwand $\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$ ten gevolge van de geconstrueerde constante toestanden $\mathbf{q}_{L_{i+\frac{1}{2},j}}$ en $\mathbf{q}_{R_{i+\frac{1}{2},j}}$. Met de toestanden $\mathbf{q}_{L_{i+\frac{1}{2},j}}$ en $\mathbf{q}_{R_{i+\frac{1}{2},j}}$ corresponderen in het lokale assenstelsel twee constante toestanden $\mathbf{q}^{\text{nieuw}}_{L_{i+\frac{1}{2},j}}$ en $\mathbf{q}^{\text{nieuw}}_{R_{i+\frac{1}{2},j}}$. Voor het gemak noteren we hen als $\mathbf{q}_L$ en $\mathbf{q}_R$. Lokaal gezien ontstaat langs de celwand een één-dimensionaal stromingsprobleem. De flux in de y-richting van het lokale assenstelsel draagt niet bij aan de flux over de celwand. De fluxvector $\mathbf{f}$ in het lokale assenstelsel, welke optreedt onder aanwezigheid van de twee constante toestanden $\mathbf{q}_L$ en $\mathbf{q}_R$ benaderen we door de functie

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R). \tag{6.5}$$

Deze functie heet de numerieke flux. We merken op dat de numerieke flux constant is langs de celwand, omdat de toestanden $\mathbf{q}_L$ en $\mathbf{q}_R$ constant zijn. Op welke wijze deze benadering tot stand komt beschrijven we in hoofdstuk 7.

6.2.2 De conservatieve integraalvorm in termen van de numerieke flux

We stappen terug naar ons uitgangspunt. Op welke wijze kunnen we de integraal (6.4) discretiseren? De numerieke flux $\mathbf{F}(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R)$ fungeert als een benadering van de flux $\mathbf{f}$ in het lokale assenstelsel ten gevolge van de constante toestanden $\mathbf{q}_L$ en $\mathbf{q}_R$. Deze flux is op zijn beurt weer een benadering van de daadwerkelijke flux $\mathbf{f}$ uit de integraalvergelijking (6.4) in het lokale assenstelsel. Links en rechts van de wand treden immers niet exact de door ons geconstrueerde constante toestanden op. In paragraaf 7.10.2 komen we te spreken over de orde van nauwkeurigheid welke met deze constructie samenhangt. Als we $\mathbf{f}$ toepassen in de integraal (6.4) als daadwerkelijke flux $\mathbf{f}$ in het lokale assenstelsel langs de celwand $\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$ dan volgt

$$\int_{\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j}} T^{-1}(\phi_{i+\frac{1}{2},j})\, \mathbf{f}\left(T(\phi_{i+\frac{1}{2},j})\,\mathbf{q}\right)\, ds \approx T^{-1}\left(\phi_{i+\frac{1}{2},j}\right) \mathbf{F}\left(T(\phi_{i+\frac{1}{2},j})\mathbf{q}_{L_{i+\frac{1}{2},j}}, T(\phi_{i+\frac{1}{2},j})\mathbf{q}_{R_{i+\frac{1}{2},j}}\right) \ell_{i+\frac{1}{2},j}, \tag{6.6}$$

hierin is $\ell_{i+\frac{1}{2},j}$ de lengte van de celwand $\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$, zie figuur 6.4.
Op de overige celwanden $\partial\Omega_{i-\frac{1}{2},j}$ en $\partial\Omega_{i,j\pm\frac{1}{2}}$ kunnen we hetzelfde principe toepassen. De integraalbalans uit vergelijking (6.2) is dan om te schrijven tot onderstaande gediscretiseerde vorm

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_{i,j}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}\, dxdy \quad &+ \quad T^{-1}\left(\phi_{i+\frac{1}{2},j}\right) \mathbf{F}\left(T(\phi_{i+\frac{1}{2},j})\mathbf{q}_{L_{i+\frac{1}{2},j}}, T(\phi_{i+\frac{1}{2},j})\mathbf{q}_{R_{i+\frac{1}{2},j}}\right) \ell_{i+\frac{1}{2},j} + \\
&+ \quad T^{-1}\left(\phi_{i,j+\frac{1}{2}}\right) \mathbf{F}\left(T(\phi_{i,j+\frac{1}{2}})\mathbf{q}_{L_{i,j+\frac{1}{2}}}, T(\phi_{i,j+\frac{1}{2}})\mathbf{q}_{R_{i,j+\frac{1}{2}}}\right) \ell_{i,j+\frac{1}{2}} + \\
&+ \quad T^{-1}\left(\phi_{i-\frac{1}{2},j}\right) \mathbf{F}\left(T(\phi_{i-\frac{1}{2},j})\mathbf{q}_{L_{i-\frac{1}{2},j}}, T(\phi_{i-\frac{1}{2},j})\mathbf{q}_{R_{i-\frac{1}{2},j}}\right) \ell_{i-\frac{1}{2},j} + \\
&+ \quad T^{-1}\left(\phi_{i,j-\frac{1}{2}}\right) \mathbf{F}\left(T(\phi_{i,j-\frac{1}{2}})\mathbf{q}_{L_{i,j-\frac{1}{2}}}, T(\phi_{i,j-\frac{1}{2}})\mathbf{q}_{R_{i,j-\frac{1}{2}}}\right) \ell_{i,j-\frac{1}{2}} = 0.
\end{aligned} \tag{6.7}$$

We wijzen op het feit dat de numerieke flux $\mathbf{F}$ in de vier termen uit het rechterlid alle vier in een andere richting wijzen. Deze richting hangt samen met het lokale assenstelsel op de bijbehorende celwand. Het richtingsaspect laten we voortaan buiten beschouwing. Indien we spreken over een numerieke flux $\mathbf{F}(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R)$ dan bedoelen we simpelweg de numerieke flux $\mathbf{F}$ welke in het lokale assenstelsel de flux $\mathbf{f}$ benadert en waar de constante toestanden $\mathbf{q}_L$ en $\mathbf{q}_R$ bij benadering langs de celwand heersen. Elke beschouwing van welke flux of toestand dan ook vindt plaats in het lokale assenstelsel, tenzij anders vermeld.
In het volgende hoofdstuk beschouwen we verschillende uitdrukkingen voor de numerieke flux $\mathbf{F}(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R)$. De verscheidene numerieke methoden voor de 2D Euler vergelijkingen kennen allemaal hun eigen uitdrukking voor de numerieke flux $\mathbf{F}(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R)$. Daarnaast verschilt per methode de wijze waarop de constante toestanden $\mathbf{q}_L$ en $\mathbf{q}_R$ worden bepaald. Wij zullen onze aandacht richten op zogenaamde upwindschema's. In de schema's uit deze groep houdt men bij de totstandkoming van de numerieke flux en de toestanden $\mathbf{q}_L$ en $\mathbf{q}_R$ rekening met de fysische eigenschappen van de stromingsvergelijkingen.

Hoofdstuk 7

Upwind methoden

7.1 Inleiding

Upwindschema's voor de 2D Euler vergelijkingen verwerken in het discretisatieproces informatie over de fysische eigenschappen van het stelsel vergelijkingen. We maken gebruik van het hyperbolische karakter van ons stelsel. In de komende paragrafen zullen we laten zien wat dit precies inhoudt. Bij onze bespreking maken we onderscheid in twee categorieën upwindschema's.
Onder de eerste categorie vallen de Flux Vector Splitting (FVS) methoden. In deze methoden verwerkt men informatie omtrent de fysische eigenschappen van de vergelijkingen op basis van de tekens van de eigenwaarden van verscheidene Jacobiaanmatrices naar de toestand $\mathbf{q}$. De numerieke flux splitst men op in twee delen, waarvan het eerste deel een Jacobiaan heeft met alleen positieve eigenwaarden en de Jacobiaan van het andere deel alleen negatieve eigenwaarden. Deze delen worden afzonderlijk gediscretiseerd, waarbij rekening wordt gehouden met de richting van de voortplantingssnelheid. Voorbeelden van FVS-methoden zijn Steger & Warming FVS en Van Leer's FVS-schema. We beschrijven Steger & Warming in paragraaf 7.2. Het Van Leer schema komt aan de orde in paragraaf 7.2.
De tweede categorie upwindschema's staat bekend onder de naam Flux Difference Splitting (FDS) methoden. De schema's zijn gebaseerd op het schema van Godunov, zie paragraaf 7.3. In dit schema verwerkt men de exacte lokale oplossing van de Euler vergelijkingen in het discretisatieproces. Onder de FDS-methoden bestaat een groep methoden, die een benaderde vorm van deze exacte locale oplossing in het discretisatieproces verwerkt. In paragraaf 7.4 beschouwen we deze approximate Riemann solvers. In paragraaf 7.8.1 zullen we een vergelijking maken tussen FVS en FDS.

7.2 Flux Vector Splitting methoden

Voor we de numerieke fluxen van verschillende FVS-methoden gaan bekijken, besteden we eerst aandacht aan de gemeenschappelijke grondgedachte achter deze methoden. We stappen terug naar paragraaf 4.1.3, waar we hebben gesproken over golfvormige oplossingen van de Euler vergelijkingen en de daarmee samenhangende verspreiding van informatie door het stromingsdomein. Afhankelijk van de eigenwaarden van de matrix $K = Ak_x + Bk_y$, λ_j, bleek elke oplossing van de Euler vergelijkingen opgebouwd te kunnen worden uit golven met een willekeurige voortplantingsrichting $\mathbf{k}$ en een voortplantingssnelheid $\lambda_j\mathbf{k}$. Met de Jacobiaan A, gedefinieerd als de afgeleide van de fluxvector $\mathbf{f}$ naar de toestand $\mathbf{q}$, $d\mathbf{f}/d\mathbf{q}$, associeerden we informatieverspreiding in de richting van de positieve x-as, $\mathbf{k} = (1, 0)$. Afhankelijk van de tekens van de eigenwaarden van de Jacobiaan A vond het transport plaats in de richting van de positieve ($\lambda_j^A > 0$) of negatieve x-as ($\lambda_j^A < 0$). De FVS-methoden maken gebruik van dit principe. Ze splitsen de fluxvector $\mathbf{f}$ op in twee delen. Het eerste deel, $\mathbf{f}^+$, heeft bij differentiatie naar $\mathbf{q}$, een Jacobiaanmatrix, $d\mathbf{f}^+/d\mathbf{q}$, met alleen positieve eigenwaarden, waardoor de vector $\mathbf{f}^+$ volledig is te associëren met informatie verspreiding in de richting van de positieve x-as. Het andere deel, $\mathbf{f}^-$, heeft bij differentiatie naar $\mathbf{q}$, een Jacobiaanmatrix, $d\mathbf{f}^-/d\mathbf{q}$, met alleen negatieve eigenwaarden. Ten gevolge van de flux $\mathbf{f}^-$ treedt alleen informatieverspreiding op in de richting van de negatieve x-as. Elke FVS-methode heeft omtrent de opsplitsing van $\mathbf{f}$ in een voorwaartse flux, $\mathbf{f}^+$ en een achterwaartse flux, $\mathbf{f}^-$, zijn eigen keuze gemaakt.

De splitting van de vector $\mathbf{f}$ blijkt niet uniek te zijn, zie paragraaf 7.2. De eisen aan de splitting staan hieronder samengevat

1. $\mathbf{f} = \mathbf{f}^+ + \mathbf{f}^-$,
2. $\dfrac{d\mathbf{f}^+}{d\mathbf{q}}$ heeft alleen eigenwaarden ≥ 0,
3. $\dfrac{d\mathbf{f}^-}{d\mathbf{q}}$ heeft alleen eigenwaarden ≤ 0.

We zullen verschillende flux vector splittings gaan bekijken. We starten de bespreking met de meest voor de handliggende flux vector splitting, die van Steger & Warming.

De Steger & Warming fluxvector splitting

Voor de constructie van de Steger & Warming flux vector splitting hebben we enkele notaties nodig. We definiëren

$$\lambda_j^+ = \begin{cases} \lambda_j & \text{als } \lambda_j > 0, \\ 0 & \text{als } \lambda_j \leq 0 \end{cases} \quad \text{en} \quad \lambda_j^- = \begin{cases} 0 & \text{als } \lambda_j \geq 0 \\ \lambda_j & \text{als } \lambda_j < 0 \end{cases}, \tag{7.1}$$

met λ_j de eigenwaarden van de Jacobiaan A, zie paragraaf 4.1.2. Voor het gemak staan ze hieronder nogmaals opgeschreven

$$\lambda_1^A = u - c, \quad \lambda_{2,3}^A = u \quad \text{en} \quad \lambda_4^A = u + c.$$

Een andere notatiewijze van vergelijking 7.1 luidt

$$\lambda_j^+ = \frac{\lambda_j + \mid \lambda_j \mid}{2} \quad \text{en} \quad \lambda_j^- = \frac{\lambda_j - \mid \lambda_j \mid}{2}. \tag{7.2}$$

Via deze notatie is gemakkelijk in te zien dat geldt

$$\lambda_j = \lambda_j^+ + \lambda_j^-, \tag{7.3}$$

$$\mid \lambda_j \mid = \lambda_j^+ - \lambda_j^-. \tag{7.4}$$

De eigenwaarden λ_j^+ en λ_j^- plaatsen we in twee diagonaal matrices $\Lambda^\pm$

$$\Lambda^\pm = \begin{pmatrix} \lambda_1^\pm & & & 0 \\ & \lambda_2^\pm & & \\ & & \lambda_3^\pm & \\ 0 & & & \lambda_4^\pm \end{pmatrix} \quad \text{met} \quad \begin{aligned} \Lambda &= \Lambda^+ + \Lambda^-, \\ |\Lambda| &= \Lambda^+ - \Lambda^-. \end{aligned}$$

Wegens het hyperbolische karakter van ons stelsel Euler vergelijkingen heeft de Jacobiaan A een volledig stelsel eigenvectoren. We plaatsen de eigenvectoren behorende bij de eigenwaarden λ_j, zie paragraaf (4.1.2), in de matrix P

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_3 & \mathbf{r}_4 \end{pmatrix}.$$

Met deze matrix kunnen we de Jacobiaan A diagonaliseren. Er geldt

$$A = P\Lambda P^{-1}.$$

Tevens introduceren we de matrices A^+ en A^- als

$$A^\pm = P\Lambda^\pm P^{-1} \quad \text{met} \quad \begin{aligned} A &= A^+ + A^-, \\ |A| &= A^+ - A^-. \end{aligned}$$

We definiëren met bovenstaande notaties de voorwaartse flux $\mathbf{f}^+$ en de achterwaartse flux $\mathbf{f}^-$ als

$$\mathbf{f}^+ = A^+\mathbf{q} \quad \text{en} \quad \mathbf{f}^- = A^-\mathbf{q}. \tag{7.5}$$

Als we bovenstaande notaties uitschrijven dan volgt voor de voor- en achterwaartse flux,

$$
\mathbf{f}^{\pm} = \frac{\rho}{2\gamma} \begin{pmatrix} \alpha^{\pm} \\ \alpha^{\pm} u + c(\lambda_4^{\pm} - \lambda_1^{\pm}) \\ \alpha^{\pm} v \\ \alpha \frac{u^2+v^2}{2} + uc(\lambda_4^{\pm} - \lambda_1^{\pm}) + c^2 \frac{\lambda_4^{\pm}+\lambda_1^{\pm}}{\gamma - 1} \end{pmatrix},
$$

met $\alpha^{\pm} = 2(\gamma - 1)\lambda_{2,3}^{\pm} + \lambda_4^{\pm} + \lambda_1^{\pm}$.

De splitting is gebaseerd op het feit dat de fluxvector $\mathbf{f}$, idem voor $\mathbf{g}$, een homogene functie is van de graad 1 in de conservatieve variabele $\mathbf{q}$.

Definitie 2 Een functie $\mathbf{f}$ is homogeen van de graad 1 in de conservatieve variabele $\mathbf{q}$ indien geldt

$$
\mathbf{f}(\lambda \mathbf{q}) = \lambda \mathbf{f}(\mathbf{q}), \qquad \forall \lambda \tag{7.6}
$$

In Hirsch wordt de homogeniteit van de graad 1 voor de fluxvector $\mathbf{f}$ uit de 2D Euler vergelijkingen bewezen, [15, blz.138–143]. Daarbij is aangenomen dat het beschouwde fluïdum een ideaal gas is of voldoet aan de relatie

$$
p = \rho f(e),
$$

waarin f een willekeurige functie van de inwendige energie e kan zijn. In ons geval is aan deze eis voldaan. We nemen immers aan dat de perslucht in de blazer ideaal is.
Onze interesse gaat uit naar de consequenties van deze eigenschap voor de fluxvector $\mathbf{f}$. We differentiëren vergelijking (7.6) naar λ, waaruit volgt

$$
\frac{d}{d\mathbf{q}} \mathbf{f}(\lambda \mathbf{q})\, \mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{q}), \qquad \forall\ \lambda.
$$

Vullen we vervolgens in, $\lambda = 1$, dan volgt

$$
\mathbf{f}(\mathbf{q}) = A\mathbf{q}. \tag{7.7}
$$

We wijzen op de overeenkomst met de uitdrukkingen voor de voorwaartse $\mathbf{f}^+$ en achterwaartse flux $\mathbf{f}^-$ uit vergelijking (7.5). Via de vergelijking (7.5) en (7.7) kunnen we aantonen dat is voldaan aan de eerste eis voor een geschikte fluxvectorsplitting

$$
\mathbf{f} = A\mathbf{q} = \mathbf{f}^+ + \mathbf{f}^- = A^+\mathbf{q} + A^-\mathbf{q}.
$$

Steger en Warming hebben in [27] bovendien bewezen dat de eigenwaarden van de Jacobianen $d\mathbf{f}^+/d\mathbf{q}$ en $d\mathbf{f}^-/d\mathbf{q}$ voldoen aan de gestelde tekeneisen van pagina 42. Voor de uitvoerige berekening verwijzen we naar dit werk. We wijzen op het feit dat de eigenwaarden van de Jacobianen $d\mathbf{f}^+/d\mathbf{q}$ en $d\mathbf{f}^-/d\mathbf{q}$ niet gelijk zijn aan de eigenwaarden van de matrices $A^{\pm}$. Er geldt $A^+ \neq d\mathbf{f}^+/d\mathbf{q}$ en $A^- \neq d\mathbf{f}^-/d\mathbf{q}$. Voor verdere achtergronden verwijzen we naar Hirsch [15, blz.415–420].

Uniciteit van de flux vector splitting

We hebben al eerder opgemerkt dat de flux vector splitting, welke voldoet aan de eisen op pagina 42, niet uniek is. We tonen dit aan via het volgende voorbeeld.
We definiëren de diagonaalmatrices $\Lambda_*^{\pm}$ als

$$
\Lambda_*^{\pm} = \begin{pmatrix} \lambda_{2,3}^{\pm} - c & & & 0 \\ & \lambda_{2,3}^{\pm} & & \\ & & \lambda_{2,3}^{\pm} & \\ 0 & & & \lambda_{2,3} + c \end{pmatrix},
$$

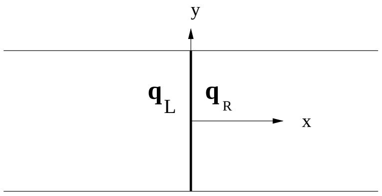
waarvoor geldt $\Lambda_* = \Lambda_*^+ + \Lambda_*^-$ en $|\Lambda_*| = \Lambda_*^+ - \Lambda_*^-$. Introduceren we de voorwaartse en achterwaartse flux vectoren, $\mathbf{f}^+$ en $\mathbf{f}^-$, als

$$
\mathbf{f}^{\pm} = P\Lambda_*^{\pm}P^{-1},
$$

dan kunnen we aantonen dat deze splitting eveneens aan de eisen van pagina 42 voldoet, zie Steger [26].

De numerieke flux voor flux vector splitting methoden

Onze interesse gaat uit naar de definitie van de numerieke flux in de FVS-methoden. Ter herinnering herhalen we het volgende. De numerieke flux $\mathbf{F}(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R)$ is gedefinieerd als een benadering van de flux $\mathbf{f}$ door de wand ten gevolge van twee constante toestanden links en rechts van de wand. De flux $\mathbf{f}$ geeft het transport weer van massa, impuls en energie in de x-richting. In paragraaf 7.2 hebben we deze flux opgesplitst in een voorwaartse $\mathbf{f}^+$ en achterwaartse flux $\mathbf{f}^-$, waarvan de eerste te associëren was met transport in de richting van de positieve x-as en de tweede met transport in de richting van de negatieve x-as. We bekijken de situatie op de celwand, zie figuur 7.1.



Figuur 7.1: De situatie op een celwand in het lokale assenstelsel.

De numerieke flux op de celwand is gegeven als

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R) = \mathbf{f}^+ (\mathbf{q}_L) + \mathbf{f}^- (\mathbf{q}_R) \,. \tag{7.8}$$

De benadering van de flux $\mathbf{f}$ door de celwand in de x-richting is opgesplitst in twee delen. De fluxvector $\mathbf{f}^+ (\mathbf{q}_L)$ zorgt voor de verwerking van de informatie, die van de cel of cellen links van de celwand komt. Deze flux heeft immers een Jacobiaan met positieve eigenwaarden, dat correspondeert met transport van informatie over de toestand $\mathbf{q}$ in de richting van de positieve x-as op de celwand. Via de fluxvector $\mathbf{f}^- (\mathbf{q}_R)$ wordt de informatie uit de cel of cellen rechts van de celwand verwerkt. Deze fluxvector heeft negatieve eigenwaarden en verwerkt de informatie verspreiding door de celwand in de richting van de negatieve x-as.

Van Leers flux vector splitting

Een populaire FVS-methode is de Flux Vector Splitting van Van Leer. In tegenstelling tot bijvoorbeeld de numerieke flux van Steger en Warming levert dit schema een continu differentieerbare numerieke flux op. Dit is gunstig met het oog op het gebruik van het schema in impliciete methoden. Het schema is bovendien ontworpen om een goede representatie van stationaire schokken te geven, zie Van Leer [29]. Van Leer introduceert de volgende fluxen $\mathbf{f}^+$ en $\mathbf{f}^-$

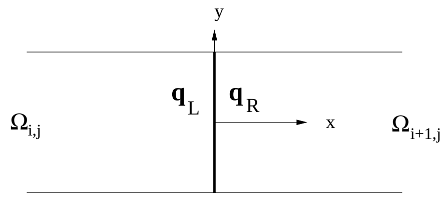
$$\mathbf{f}_{vl}^+ = \frac{\rho}{4c}(u+c)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{(\gamma-1)u+2c}{\gamma} \\ v \\ \frac{v^2}{2} + \frac{[(\gamma-1)u+2c]^2}{2(\gamma^2-1)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_{vl}^- = -\frac{\rho}{4c}(u-c)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{(\gamma-1)u-2c}{\gamma} \\ v \\ \frac{v^2}{2} + \frac{[2c-(\gamma-1)u]^2}{2(\gamma^2-1)} \end{pmatrix}.$$

De fluxen voldoen aan de eisen op pagina 42. Voor de bewijsvoering verwijzen we naar Van Leer [29]. Helaas blijkt het Van Leer schema contactdiscontinuïteiten niet exact weer te geven. Zoals in paragraaf 7.8.1 aan de hand van een voorbeeld zal blijken worden deze discontinuïteiten door het schema in de stroming gediffundeerd. Er is sprake van numerieke diffusie. Voor verdere achtergronden bij het Van Leer schema verwijzen we naar twee artikelen van Van Leer [29] en [30].

7.3 Flux Difference Splitting methoden

FDS-methoden verwerken in het discretisatieproces een exacte of benaderde vorm van de lokale oplossing van de Euler vergelijkingen. De grondlegger van de FDS-methoden is Godunov geweest. We zullen de denkwijze achter zijn schema beschrijven. We hopen daarmee inzicht te verschaffen in de betekenis van bovenstaande uitspraak.

We beschouwen de celwand $\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$. We bevinden ons in het lokale assenstelsel op de wand met links en rechts van de wand de constante toestanden $\mathbf{q}_L$ en $\mathbf{q}_R$, zie figuur 7.2. Over het algemeen zijn



Figuur 7.2: De situatie op de celwand $\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$ in het lokale assenstelsel.

beide toestanden ongelijk aan elkaar. De celwand is te beschouwen als een vlak, waarlangs de stroming discontinu is. Tengevolge van deze discontinuïteit kan tussen beide cellen een stroming op gang komen. Dit stromingsprobleem over de celwand is te beschouwen als een lokale versie van het één-dimensionale Riemann probleem. Het één-dimensionale Riemann probleem is als volgt geformuleerd.

Het één-dimensionale Riemann probleem

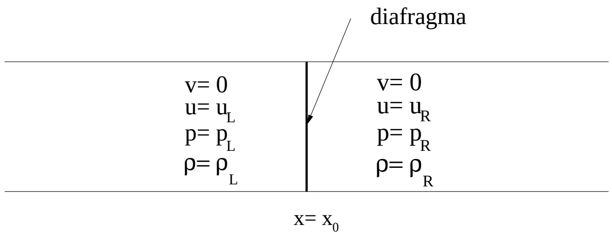
Op het tijdstip $t = 0$ bevindt zich in een kanaal een diafragma op plaats $x = x_0$. Links van het diafragma bevindt zich een gas met een gegeven begintoestand

$$v = 0, \quad u = u_L, \quad p = p_L, \quad \rho = \rho_L \qquad x < x_0, \ t = 0.$$

Rechts van het diafragma bevindt zich hetzelfde gas met een gegeven begintoestand

$$v = 0, \quad u = u_R, \quad p = p_R, \quad \rho = \rho_R \qquad x > x_0, \ t = 0.$$

In figuur 7.3 staat de beginsituatie geschetst. Op het begintijdstip $t = 0$ wordt instantaan het diafragma



Figuur 7.3: Het één-dimensionale Riemann probleem geschetst in de beginsituatie op tijdstip $t = 0$

verwijderd, waarop het gas begint te stromen. De stroming voldoet aan de 2D Euler vergelijkingen. Voor het één-dimensionale Riemann probleem is een exacte oplossing te vinden. Zowel in het boek van Hirsch [15, blz. 204–211] als in het diktaat van Hemker [12, blz. 53–57] wordt ruim aandacht besteed aan dit probleem. Voor de details en eigenschappen van de stroming verwijzen we naar hun werk. Voor ons is het van belang te weten, dat we in staat zijn een exacte oplossing te vinden. In het diktaat van Hemker is afgeleid dat deze exacte oplossing een unieke functie is van de begintoestanden $\mathbf{q}_L$ en $\mathbf{q}_R$ en de verhouding tussen het verschil in afstand tot de oorspronkelijke plaats van het diafragma, $x - x_0$ en de verlopen tijd t vanaf het begintijdstip

$$\mathbf{q}^{(R)} = \mathbf{q}^{(R)}\left(\frac{x - x_0}{t}, \ \mathbf{q}_L, \ \mathbf{q}_R\right).$$

De oplossing $\mathbf{q}^R$ is te construeren uit een niet-lineaire vergelijking. In Hirsch [15, blz.206–207] wordt deze niet-lineaire vergelijking afgeleid en worden de stappen in de constructie van de oplossing beschreven.

Het Godunov schema

Godunov benutte de overeenkomst tussen het lokale stromingsprobleem op de celwand en het één-dimensionale Riemann probleem. Op de celwand was hij in staat op basis van deze overeenkomst de toestand $\mathbf{q}_{i+\frac{1}{2},j}$ op de celwand te bepalen. Hij stelde

$$\mathbf{q}_{i+\frac{1}{2},j} = \mathbf{q}^{(R)}_{i+\frac{1}{2},j} = \mathbf{q}^{(R)}\left(0,\ \mathbf{q}_{L_{i+\frac{1}{2},j}},\ \mathbf{q}_{R_{i+\frac{1}{2},j}}\right).$$

De numerieke flux op de celwand $\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$ nam hij vervolgens gelijk aan de fysische flux $\mathbf{f}$ van de lokale oplossing van het Riemann probleem

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{q}_{L_{i+\frac{1}{2},j}},\ \mathbf{q}_{R_{i+\frac{1}{2},j}}\right) = \mathbf{f}\left(\mathbf{q}^{(R)}_{i+\frac{1}{2},j}\right).$$

Voor-en nadelen van het Godunov schema, de essentie van de FDS-methoden

Met de algemene definitie van de numerieke flux volgens Godunov, als

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R) = \mathbf{f}\left(\mathbf{q}^{(R)}(0, \mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R)\right),$$

zijn we doorgedrongen tot de essentie van het Godunov schema. Op ieder celwandje lost Godunov lokaal het één-dimensionale Riemann probleem op. In het discretisatieproces neemt hij via de numerieke flux de exacte lokale oplossing van de Euler vergelijkingen mee.

De verschillende methoden uit de groep FDS-methoden verwerken ieder op hun eigen manier de oplossing van het één-dimensionale Riemann probleem op de celwandjes in het discretisatieproces. De andere naam voor de groep, Riemann solvers, is op dit basisprincipe gebaseerd. Door de introductie van de exacte oplossing van het lokale Riemann probleem in het schema is Godunov in staat een goede representatie van schokken en contactdiscontinuïteiten te geven. Bovendien accepteert het schema geen expansiegolven als oplossing. Het oplossen van het exacte Riemann probleem op iedere celwand kost echter veel rekentijd. Voor het oplossen van de niet-lineaire vergelijking zijn iteratieve methoden nodig. Mede uit het oogpunt van tijdbesparing is daarom een groep approximate Riemann solvers ontstaan. In deze groep lost men bij benadering op de celwand het lokale één-dimensionale Riemann probleem op.
Het is echter niet alleen uit het oogpunt van tijdsbesparing dat men is overgestapt op approximate Riemann solvers. Het Godunovschema is simpelweg overdone. De constante toestanden $\mathbf{q}_L$ en $\mathbf{q}_R$ op de celwand zijn benaderingen van de daadwerkelijke toestanden, die op de celwand heersen. De vraag is wat voor nut het heeft om een exacte oplossing te vinden van een probleem dat bij benadering plaatsvindt op de celwand. Dit is zeker de vraag als het niet-triviaal is om deze exacte oplossing te bepalen. Zolang de approximate Riemann solvers geen afbraak doen aan de nauwkeurigheid van het gehele upwindschema, zie paragraaf 7.10.2, dan is het zeker geoorloofd deze handige Riemann solvers te gebruiken. De approximate Riemann solvers vormen het onderwerp van de volgende paragraaf.

7.4 Approximate Riemann solvers

De twee bekendste approximate Riemann solvers zijn de solvers van Osher en Roe. In de praktijk maakt men veelal gebruik van de approximate Riemann solver van Roe. De solver van Osher wordt vaak als complex en bewerkelijk beschouwd. Met de P-variant van Hemker en Spekreijse op het Osher schema, welke we later zullen bespreken, is het laatste punt voor een groot deel verholpen. Wat de complexiteit betreft, leveren de goede kanten van het schema voldoende tegengewicht. Wij zullen ons richten op de solver van Osher. In tegenstelling tot de numerieke flux van Roe is de numerieke flux van het Osher schema continu differentieerbaar. Dit blijkt van pas te komen, indien men de flux in impliciete oplosmethoden toepast. Daarnaast pleit de nette behandeling van de randen van het domein in het voordeel van Osher, zie paragraaf 7.9. In paragraaf 7.8 besteden we uitgebreid aandacht aan verdere voor- en nadelen van het Osher schema.

7.5 Het Osher schema op het inwendige domein

Naar aanleiding van het Switching proces van Murman-Cole, zie Hirsch [15, blz.453,454], en de upwind methode, die Engquist en Osher ontwierpen voor een scalaire behoudswet van de vorm

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

verscheen in 1982 een artikel door Osher en Solomon [24]. In dat artikel beschreven Osher en Solomon een generalisatie van deze theorieën naar een willekeurig stelsel van hyperbolische vergelijkingen. Hun generalisatie resulteerde in de volgende definitie van de numerieke flux

$$\mathbf{F}^{(O)}(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R) = \frac{1}{2}(\mathbf{f}(\mathbf{q}_L) + \mathbf{f}(\mathbf{q}_R)) - \frac{1}{2}\int_{\mathbf{q}_L}^{\mathbf{q}_R} \mid A(\mathbf{q}) \mid \, d\mathbf{q}. \tag{7.9}$$

Voor de uitdrukkingen van de Jacobiaan A, de fluxvector $\mathbf{f}$ en de toestand $\mathbf{q}$ verwijzen we terug naar het hoofdstuk over de 2D Euler vergelijkingen, hoofdstuk 4. De absolute waarde van de Jacobiaan A is gedefinieerd als

$$\mid A \mid = P \mid \Lambda \mid P^{-1}, \tag{7.10}$$

met

$$\mid \Lambda \mid = \begin{pmatrix} \mid \lambda_1 \mid & & & 0 \\ & \mid \lambda_2 \mid & & \\ & & \mid \lambda_3 \mid & \\ 0 & & & \mid \lambda_4 \mid \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad P = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_3 & \mathbf{r}_4 \end{pmatrix}. \tag{7.11}$$

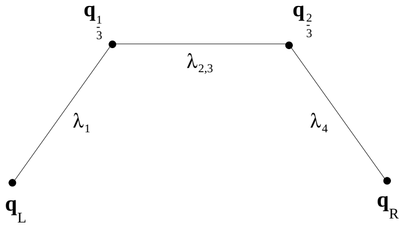
De eigenwaarden en eigenvectoren staan in paragraaf 4.1.2 gegeven.
Osher wilde met deze generalisatie bewerkstelligen dat de numerieke flux continu differentieerbaar was naar $\mathbf{q}_L$ en $\mathbf{q}_R$. In zijn werk Osher en Solomon [24] leverde hij hiervoor het bewijs. Om de totstandkoming van de numerieke flux van Osher te begrijpen is kennis nodig omtrent de upwindmethode van Engquist en Osher. We laten dit hier achterwege. We verwijzen naar Engquist en Osher [7, 1980] en [8, 1981]. Onze interesse gaat uit naar de numerieke flux.

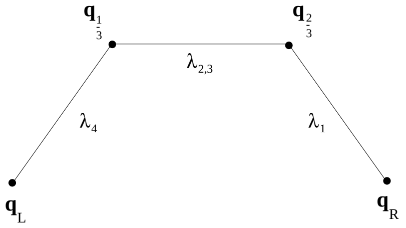
Met de definitie van de numerieke flux volgens Osher zijn we aangeland op het essentiële deel van het Osher schema. In de numerieke flux bevindt zich een integraal over de absolute waarde van de Jacobiaan A langs een integratiepad door de toestandsruimte Q van $\mathbf{q}_L$ naar $\mathbf{q}_R$. Met de introductie van de integraal in de numerieke flux stelde Osher continue differentieerbaarheid van de numerieke flux veilig, maar op welke wijze kunnen we deze integraal gemakkelijk bepalen? Osher loste dit probleem op door een geschikte keuze te maken voor het integratiepad. We zullen zijn pad, het Osherpad, nader beschouwen. In paragraaf 7.6 zullen we zien waarom zijn keuze zo geschikt was.

7.5.1 De constructie van het Osherpad

Osher maakt bij de constructie van het integratiepad gebruik van het feit dat de Euler vergelijkingen hyperbolisch zijn. Osher past toe dat de Jacobiaan A uit de integraal een volledig stelsel reële eigenwaarden $\lambda_1 = u - c$, $\lambda_2 = \lambda_3 = u$ en $\lambda_4 = u + c$ heeft en dat met iedere eigenwaarde een volledige rechtereigenruimte correspondeert, respectievelijk $R_1 = \{\mathbf{r}_1\}$, $R_{2,3} = \{\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3\}$ en $R_4 = \mathbf{r}_4$.We verwijzen opnieuw naar de paragraaf 4.1.2 over hyperboliciteit van de 2D Euler vergelijkingen.
Osher deelt het integratiepad op in drie deelpaden $\Gamma_k,\ k = 1, 2, 3$. Elk deelpad Γ_k kiest hij tangentieel aan één van de rechtereigenruimten $R_{m(k)}$ met $m(k) \in \{1, (2, 3), 4\}$. Op deze manier kunnen we elk deelpad beschouwen als een golfpad in de toestandsruimte. In paragraaf 4.1.4 hebben we deze golfpaden besproken. Naast de richting van de deelpaden maakt Osher een keuze omtrent de volgorde, waarin de verschillende deelpaden worden doorlopen. Vanaf $\mathbf{q}_L$ lopen we tangentieel aan de eigenvector $\mathbf{r}_4$, behorende bij de grootste eigenwaarde λ_4, naar toestand $\mathbf{q}_{\frac{1}{3}}$. Vanuit dit punt begeven we ons naar $\mathbf{q}_{\frac{2}{3}}$. Daarbij bewegen we ons tangentieel voort aan de eigenruimte $R_{2,3}$ opgespannen door de eigenvectoren $\mathbf{r}_2$ en $\mathbf{r}_3$. Via het laatste deelpad, dat tangentieel loopt aan de rechtereigenvector $\mathbf{r}_1$, welke hoort bij de kleinste eigenwaarde λ_1, belanden we in $\mathbf{q}_R$. Ter illustratie is het pad schematisch weergegeven in figuur 7.4. In het artikel van Hemker & Spekreijse is een andere suggestie gedaan voor het Osherpad. Zij

splitsen net als Osher het integratiepad op in drie deelpaden, waarbij ieder deelpad tangentieel loopt aan één van de drie eigenruimtes. Dit is, zoals later zal blijken, de stap die het Osherpad zo geschikt maakt. De volgorde waarin zij de deelpaden doorlopen, is echter niet hetzelfde. Zij starten met de eigenvector behorende bij de kleinste eigenwaarde λ_1 en zij vervolgen hun weg in de richting van de eigenvectoren behorende bij opklimmende eigenwaarden . Schematisch staat dit pad weergegeven in figuur 7.4.





Figuur 7.4: Het Osherpad in de toestandsruimte volgens de O-variant en de P-variant.

We spreken van de O(sher)-variant en de P(hysical)-variant. Het pad van Osher blijkt gunstig te zijn om bepaalde eigenschappen van het schema te bewijzen. Uit fysisch oogpunt is de P-variant van Hemker & Spekreijse echter een logische keuze. We doorlopen in het laatste geval de golfpaden in de richting van oplopende voortplantingssnelheid. Bovendien blijkt de P-variant in geval van bijvoorbeeld overwegend subsone stromingen te resulteren in een kleinere hoeveelheid rekenwerk, zie Hemker & Spekreijse [13]. Dit is de belangrijkste reden geweest achter de constructie van de P-variant.

Bepaling van de tussenliggende punten $\mathbf{q}_{\frac{1}{3}}$ en $\mathbf{q}_{\frac{2}{3}}$

Tot nu toe hebben we niet gesproken over de ligging van de punten $\mathbf{q}_{\frac{1}{3}}$ en $\mathbf{q}_{\frac{2}{3}}$ in de toestandsruimte Q. Met de keuze voor de O-variant of P-variant liggen deze punten echter volledig vast. Het Osherpad is uniek. Voor het bewijs verwijzen we naar het artikel van Osher & Solomon [24]. Vanaf dit moment zullen we ons wijden aan de P-variant. Wegens de reductie van rekentijd t.o.v. de O-variant is dit schema in de CWI-programmatuur opgenomen.

De unieke posities van de tussenliggende punten $\mathbf{q}_{\frac{1}{3}}$ en $\mathbf{q}_{\frac{2}{3}}$ tussen de bekende punten, $\mathbf{q}_L$ en $\mathbf{q}_R$, worden verkregen door de beschouwing van de Riemann-invarianten langs de deelpaden. Langs een golfpad zijn enkele onafhankelijke grootheden te definiëren, welke constant blijven indien men zich langs het golfpad voortbeweegt. De theorie omtrent deze Riemann-invarianten staat beschreven in 4.1.4.

Voor het eerste golfpad Γ_1, dat correspondeert met de eigenwaarde $\lambda_1 = u - c$, zijn de Riemann-invarianten gegeven als

$$\psi_1^{(1)} = u + \frac{2c}{\gamma - 1}, \tag{7.12}$$

$$\psi_2^{(1)} = v, \tag{7.13}$$

$$\psi_3^{(1)} = z = \ln\left(p\rho^{-\gamma}\right). \tag{7.14}$$

De afhankelijke stromingsvariabele z is de specifieke entropie. Op basis van bovenstaande Riemann-invarianten volgt

$$u_L + \frac{2c_L}{\gamma - 1} = u_{\frac{1}{3}} + \frac{2c_{\frac{1}{3}}}{\gamma - 1}, \tag{7.15}$$

$$v_L = v_{\frac{1}{3}}, \tag{7.16}$$

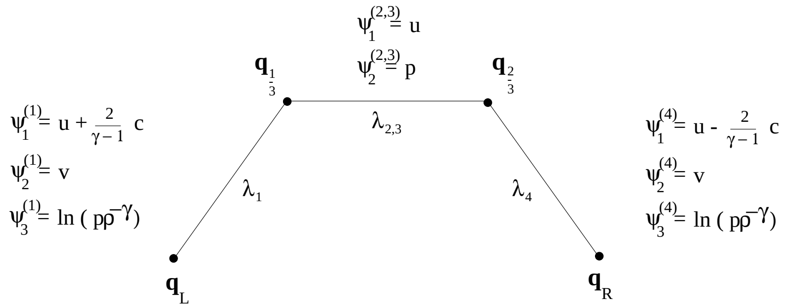
$$\ln\left(p_L\rho_L^{-\gamma}\right) = \ln\left(p_{\frac{1}{3}}\rho_{\frac{1}{3}}^{-\gamma}\right). \tag{7.17}$$

Langs het golfpad blijven de bij dit pad behorende Riemann-invarianten immers per definitie constant.

Op dezelfde wijze kunnen we voor de overige twee paden afleiden

$$\begin{aligned} u_{\frac{1}{3}} &= u_{\frac{2}{3}}, & (7.18)\\ p_{\frac{1}{3}} &= p_{\frac{2}{3}}, & (7.19)\\ u_{\frac{2}{3}} - \frac{2c_{\frac{2}{3}}}{\gamma-1} &= u_R - \frac{2c_R}{\gamma-1}, & (7.20)\\ v_{\frac{2}{3}} &= v_R, & (7.21)\\ \ln\left(p_{\frac{2}{3}}\rho_{\frac{2}{3}}^{-\gamma}\right) &= \ln\left(p_R\rho_R^{-\gamma}\right). & (7.22) \end{aligned}$$

In figuur 7.5 staat het integratie pad van de P-variant nogmaals weergegeven met de bijbehorende Riemann-invarianten per deelpad.



Figuur 7.5: Het Osherpad (P-variant) met bijbehorende Riemann-invarianten langs de deelpaden.

Uit de vergelijking (7.15) tot en met (7.22) volgt een stelsel van 8 vergelijkingen voor de 8 onbekenden uit de toestanden $\mathbf{q}_{\frac{1}{3}}$ en $\mathbf{q}_{\frac{2}{3}}$. In het artikel van Hemker en Spekreijse [13] is de oplossing van dit stelsel gegeven. De toestand $\mathbf{q}$ wordt in dit geval uitgedrukt in de afhankelijke variabelen u, v, c en z. Met deze keuze blijven de formules voor de tussenliggende punten eenvoudig. Tevens introduceren we uit hetzelfde oogpunt de notaties

$$\begin{aligned} \alpha &= \exp\left((z_R - z_L)/2\gamma\right), \\ \psi_L &= u_L + \frac{2c_L}{\gamma-1}, \\ \psi_R &= u_R - \frac{2c_R}{\gamma-1}. \end{aligned}$$

Voor de tussenliggende punten $\mathbf{q}_{\frac{1}{3}}$ en $\mathbf{q}_{\frac{2}{3}}$ volgt dan

$$\mathbf{q}_{\frac{1}{3}} = \begin{pmatrix} u_{\frac{1}{3}} \\ v_{\frac{1}{3}} \\ c_{\frac{1}{3}} \\ z_{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\psi_R + \alpha\psi_L)/(1+\alpha) \\ v_L \\ \frac{1}{2}(\gamma-1)(\psi_L - \psi_R)(1-\alpha) \\ z_L \end{pmatrix} \text{ en } \mathbf{q}_{\frac{2}{3}} = \begin{pmatrix} u_{\frac{2}{3}} \\ v_{\frac{2}{3}} \\ c_{\frac{2}{3}} \\ z_{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\frac{1}{3}} \\ v_R \\ \alpha c_{\frac{1}{3}} \\ z_R \end{pmatrix}. \qquad (7.23)$$

7.6 De keuze voor het Osherpad nader beschouwd.

Waarom is de keuze voor het integratiepad gebaseerd op de golfpaden zo geschikt? Om antwoord op deze vraag te krijgen moeten we de integraal uit de numerieke flux per deelpad beschouwen. De integraal blijkt langs een golfpad te reduceren tot een eenvoudige vorm. Er geldt

$$\int_{\Gamma_j} |\ A\ |\ d\mathbf{q} = \int_{\Gamma_j} |\ A\ |\ \mathbf{r}^j\, dv = \int_{\Gamma_j} |\ \lambda_{m(j)}\ |\ \mathbf{r}^j\, dv. \qquad (7.24)$$

hierin is $m(j)$ gedefinieerd als

$$m(j) = \begin{cases} 1 & \text{als} \quad j = 1 \\ 2,3 & \text{als} \quad j = 2 \\ 4 & \text{als} \quad j = 3 \end{cases}$$

en voor de vector $\mathbf{r}^j$ geldt $\mathbf{r}^j \in R_{m(j)}$. In de eerste overgang is gebruik gemaakt van het feit, dat langs het golfpad Γ_j behorend bij de eigenwaarde $\lambda_{m(j)}$ geldt

$$\frac{d\mathbf{q}}{dv} = \mathbf{r}^j.$$

We verwijzen nogmaals naar de paragraaf 4.1.4, waar de golfpaden worden besproken. In de tweede overgang passen we de diagonalisatie van de Jacobiaan A, (7.10), toe. Er geldt

$$\mid A \mid \mathbf{r}^j = P \mid \Lambda \mid P^{-1}\mathbf{r}^j = \mid \lambda_{m(j)} \mid \mathbf{r}^j.$$

De numerieke flux uit vergelijking (7.9) wordt met vergelijking (7.24)

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{f}(\mathbf{q}_L) + \mathbf{f}(\mathbf{q}_R)\right) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\int_{\Gamma_j} \mid \lambda_{m(j)} \mid \mathbf{r}^j \, dv. \tag{7.25}$$

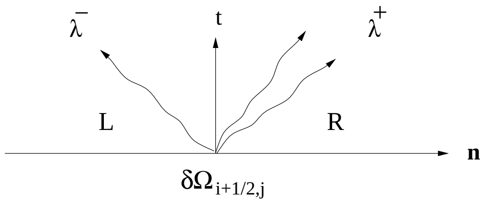
Uit deze fluxvergelijking kunnen we twee alternatieve expressies afleiden. Voor het bewijs verwijzen we naar Hirsch [15, blz.455–458].

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R) &= \mathbf{f}(\mathbf{q}_L) + \sum_{j=1}^{3}\int_{\Gamma_j} \lambda^-_{m(j)}\mathbf{r}^j \, dv & (7.26) \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{q}_R) - \sum_{j=1}^{3}\int_{\Gamma_j} \lambda^+_{m(j)}\mathbf{r}^j \, dv, & (7.27) \end{aligned}$$

hierin zijn $\lambda^{\pm}$ respectievelijk de positieve en negatieve eigenwaarden van de Jacobiaan A gegeven als

$$\lambda^+ = \begin{cases} \lambda & \text{als} \;\; \lambda > 0 \\ 0 & \text{als} \;\; \lambda \leq 0 \end{cases} \quad \text{en} \quad \lambda^- = \begin{cases} 0 & \text{als} \;\; \lambda \geq 0 \\ \lambda & \text{als} \;\; \lambda < 0 \end{cases}. \tag{7.28}$$

De alternatieve expressie voor de numerieke flux geven een duidelijk beeld van het upwind-karakter van het Osher schema. De flux op celwand $\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$ bestaat uit de flux van het aangrenzende gedeelte links of rechts van de wand met een correctie voor alle golven, die via deze wand dit gedeelte instromen, zie figuur 7.6. Dat betekent dat indien we ons links van de celwand bevinden we de numerieke flux bepalen uit de flux $\mathbf{f}(\mathbf{q}_L)$ met daarop een correctie voor de golven welke vanaf de celwand gezien het linkergedeelte instromen, ofwel een correctie voor de golven behorende bij de negatieve eigenwaarden $\lambda^-_{m(j)} \neq 0$.



Figuur 7.6: Illustratie van het upwind karakter van de numerieke flux van Osher.

7.7 Bepaling van de numerieke flux via de alternatieve expressies

Via de eerste alternatieve expressie

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R) = \mathbf{f}(\mathbf{q}_L) + \sum_{j=1}^{3} \int_{\Gamma_j} \lambda_{m(j)}^{-} \mathbf{r}^j \, dv, \tag{7.29}$$

zullen we in deze paragraaf de numerieke flux bepalen. We moeten op zoek naar die deelpaden of delen van deelpaden, waar de eigenwaarden van de Jacobiaan A, $\lambda_{m(j)}$, negatief zijn.

7.7.1 Sonische punten

We introduceren daartoe de begrippen genuinely non-linear eigenwaarde, linearly degenerating eigenwaarde en sonische punten. Voor een linearly degenerating eigenwaarde λ_k geldt dat deze eigenwaarde constant blijft, indien men zich langs de bij deze eigenwaarde behorende rechtereigenvectoren beweegt. Een genuinely non-linear eigenwaarde λ_k varieert daarentegen, indien men zich beweegt in de richting van de bijbehorende rechtereigenvectoren. Zo'n eigenwaarde is monotoon stijgend of dalend langs zijn golfpad. Voor de Euler vergelijkingen kan men bewijzen dat de eigenwaarden of genuinely non-linear of linearly degenerating zijn. De eigenwaarden $\lambda_1 = u - c$ en $\lambda_4 = u + c$ zijn genuinely non-linear en de eigenwaarde $\lambda_{2,3} = u$ is linearly degenerating. Voor de exacte definitie van deze begrippen en bijbehorende bewijsvoering verwijzen we naar het diktaat van Hemker [12, blz. 54,68].
Met dit gereedschap beschouwen we het eerste golfpad Γ_1. De eigenwaarde λ_1 is genuinely non-linear. Ofwel de eigenwaarde λ_1 is monotoon stijgend of dalend langs het golfpad Γ_1, zodat langs het pad Γ_1 de eigenwaarde λ_1 hoogstens éénmaal van teken verandert. Dit gebeurt dan in een zogenaamd sonisch punt. Een sonisch punt langs pad Γ_1 bestaat indien geldt $\lambda_L \cdot \lambda_{\frac{1}{3}} = (u_L - c_l)(u_{\frac{1}{3}} - c_{\frac{1}{3}}) \leq 0$. De afhankelijke variabelen uit de toestand $\mathbf{q}$ in dit punt, $\mathbf{q}_{s1}$, zijn dan te berekenen via het onderstaande stelsel

$$\begin{array}{lcl} v_s & = & v_L, \\ z_s & = & z_L, \\ u_s + 2c_s/(\gamma - 1) & = & \psi_L, \\ u_s - c_s, & = & 0. \end{array} \tag{7.30}$$

De eerste drie vergelijkingen volgen uit de onafhankelijke Riemann-invarianten langs het golfpad.De laatste voorwaarde past toe dat de eigenwaarde $u - c$ nul bedraagt in het sonische punt.Op dezelfde wijze vinden we een sonisch punt langs golfpad Γ_3 indien $\lambda_R \cdot \lambda_{\frac{2}{3}} = (u_R + c_R)(u_{\frac{2}{3}} + c_{\frac{2}{3}}) \leq 0$ Voor dit sonische punt, $\mathbf{q}_{s2}$, geldt in dat geval

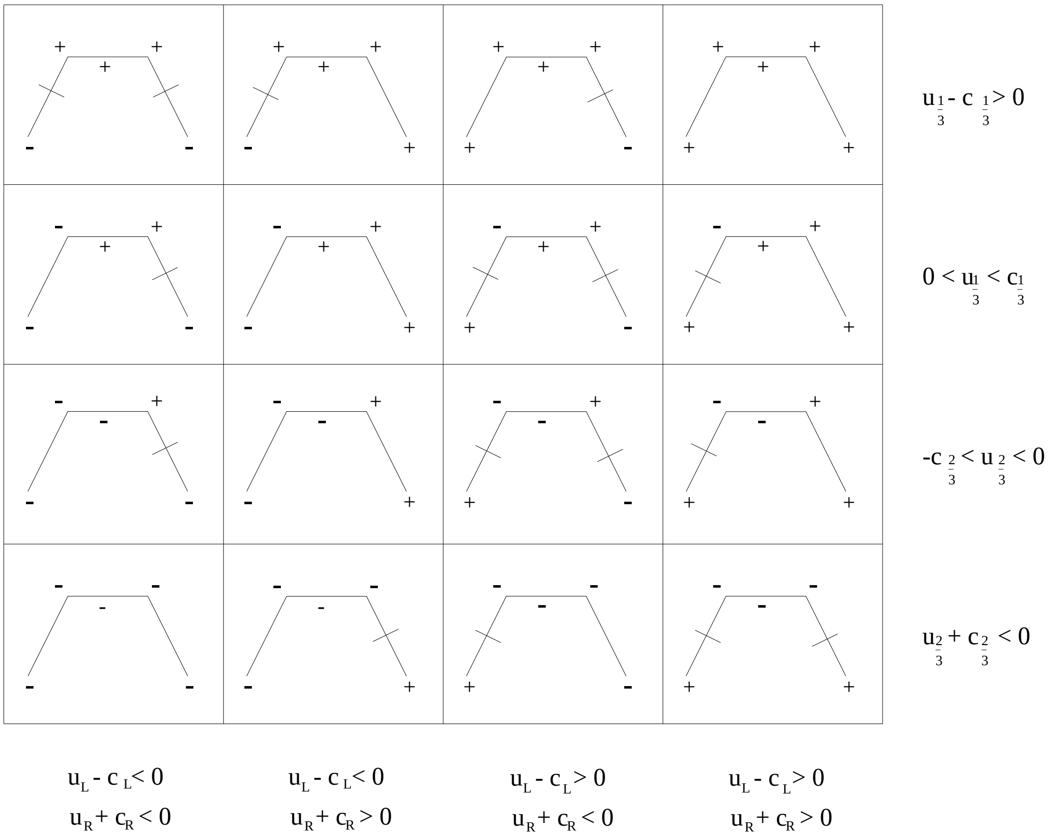
$$\begin{array}{lcl} v_s & = & v_R, \\ z_s & = & z_R, \\ u_s - 2c_s/(\gamma - 1) & = & \psi_R, \\ u_s + c_s & = & 0. \end{array} \tag{7.31}$$

7.7.2 Deelpaden of delen van deelpaden met negatieve eigenwaarden

We zijn nu in staat die deelpaden of delen van deelpaden te vinden, waarlangs de bijbehorende eigenwaarden negatief zijn. We introduceren vijf relevante eigenwaarden

$$\lambda_L = u_L - c_L, \quad \lambda_{\frac{1}{3}} = u_{\frac{1}{3}} - c_{\frac{1}{3}}, \quad \lambda_{\frac{1}{2}} = u_{\frac{1}{3}} = u_{\frac{2}{3}}, \quad \lambda_{\frac{2}{3}} = u_{\frac{2}{3}} + c_{\frac{2}{3}}, \quad \lambda_R = u_R + c_R.$$

Afhankelijk van de tekens van deze eigenwaarden kunnen we aangeven op welk deel van de golfpaden de bijbehorende eigenwaarden negatief zijn De mogelijkheden staan beschreven in tabel 7.7. Een streepje door een golfpad geeft de aanwezigheid van een sonisch punt aan.
Bij de totstandkoming van de tabel is verwerkt dat de eigenwaarden $\lambda_{\frac{1}{3}}$, $\lambda_{\frac{1}{2}}$ en $\lambda_{\frac{2}{3}}$ onderling geordend zijn. Er geldt $\lambda_{\frac{1}{3}} < \lambda_{\frac{1}{2}} < \lambda_{\frac{2}{3}}$. Dit legt een beperking op aan de tekenmogelijkheden van de eigenwaarden



Figuur 7.7: Het Osherpad in de toestandsruimte volgens de O-variant en de P-variant.

$\lambda_{\frac{1}{2}}$ en $\lambda_{\frac{2}{3}}$. Per rij is één mogelijke combinatie voor deze drie eigenwaarden verwerkt. Per kolom zijn de tekens van de eigenwaarden λ_L en/of λ_R gevarieerd.
Lang niet alle tekencombinaties uit de tabel komen even vaak voor. Sommige combinaties corresponderen met fysisch moeilijk te realiseren stromingssituaties. Een in ons geval veel voorkomende tekencombinatie is combinatie $(2, 2)$ uit de tabel. Het betreft de combinatie uit de tweede rij en tweede kolom. Deze combinatie komt tot stand in de subsone delen van een stroming.

7.7.3 De laatste stap naar de bepaling van de numerieke flux

Als laatste stap in de bepaling van de numerieke flux uit vergelijking (7.29) moeten we bedenken, dat de integraal $\int_{\Gamma_k} \lambda_k^- r^k \, dw$ voor een willekeurig golfpad Γ_k met begin- en eindpunt $\mathbf{q}_0$ en $\mathbf{q}_1$, waarlangs de bijbehorende eigenwaarde λ_k negatief is, wordt gegeven als

$$\int_{\Gamma_k} \lambda_k^- \mathbf{r}^k \, dv = \mathbf{f}(\mathbf{q}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{q}_0),$$

ofwel de integraal is gelijk aan het verschil in de fluxen van het begin- en eindpunt. Langs zo'n golfpad geldt namelijk

$$\int_{\Gamma_k} \lambda_k^- \mathbf{r}^k \, dv = \int_{\Gamma_k} \lambda_k \mathbf{r}^k \, dv = \int_{\Gamma_k} A\mathbf{r}^k \, dv = \int_{\Gamma_k} \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{q}} \, d\mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{q}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{q}_0).$$

Voor een golfpad, waarlangs de eigenwaarde λ_k positief is, geldt $\int_{\Gamma_k} \lambda_k^- r^k \, dw = 0$. Met dit in ons achterhoofd blijkt de berekening van de integraal uit vergelijking (7.29) neer te komen op de evaluatie van de flux $\mathbf{f}$ in de eind- en/of de sonische punten van de golfpaden. We werken de constructie uit voor de situatie $(2,2)$, waar geldt $\lambda_L < 0,\ \lambda_{\frac{1}{3}} < 0,\ \lambda_{\frac{1}{2}} > 0,\ \lambda_{\frac{2}{3}} > 0$ en $\lambda_R > 0$.

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R) = \mathbf{f}(\mathbf{q}_L) + \sum_{j=1}^{3} \int_{\Gamma_j} \lambda_j^- \mathbf{r}^j \, dv = \mathbf{f}(\mathbf{q}_L) + \int_{\Gamma_1} \lambda_1 \mathbf{r}^1 \, dv = \mathbf{f}(\mathbf{q}_L) + \mathbf{f}(\mathbf{q}_{\frac{1}{3}}) - \mathbf{f}(\mathbf{q}_L) = \mathbf{f}(\mathbf{q}_{\frac{1}{3}}). \quad (7.32)$$

Verifieer dat voor situatie (1,1) geldt

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R) = \mathbf{f}(\mathbf{q}_L) + \int_{\Gamma_{1_{\mathbf{q}_L \to \mathbf{q}_{s1}}}} \lambda_1 \mathbf{r}^1 \, dv + \int_{\Gamma_{3_{\mathbf{q}_R \to \mathbf{q}_{s2}}}} \lambda_4 \mathbf{r}^4 \, dv = \mathbf{f}(\mathbf{q}_R) + \mathbf{f}(\mathbf{q}_{s1}) - \mathbf{f}(\mathbf{q}_{s2}).$$

In mijn literatuurstudie Lanser [20] staan de numerieke fluxen voor de overige tekenvariaties langs de paden gegeven.

7.8 Voor- en nadelen van het Osher schema, een vergelijk tussen FVS en FDS.

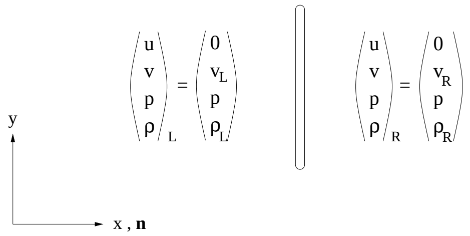
In deze paragraaf zullen we een keuze maken welke numerieke methode voor hyperbolische vergelijkingen we zullen toepassen op ons blazerprobleem. We starten de bespreking met een vergelijking tussen de meest toegepaste FVS-methode, de methode van Van Leer, en de FDS-methode van Osher.

7.8.1 Een vergelijking tussen FVS en FDS

We beschouwen een celwand waarover een contactdiscontinuïteit optreedt. We zullen het probleem bekijken in het lokale assenstelsel. De contactdiscontinuïteit over de celwand is dan gedefinieerd als

$$\begin{aligned} u_R &= u_L = 0, \\ v_R &\neq v_L, \\ p_R &= p_L, \\ \rho_R &\neq \rho_L. \end{aligned}$$

In figuur 7.8 staat de situatie langs de celwand geschetst.



Figuur 7.8: De situatie langs een celwand, waarover een contactdiscontinuïteit plaatsvindt.

Op welke wijze springen Osher en Van Leer om met zo'n contactdiscontinuïteit? De discontinuïteit is een oplossing van de Rankine-Hugoniot relatie, welke uit de Euler vergelijkingen is voortgevloeid. Het is prettig als de discontinuïteit bij de discretisatie in de numerieke oplossing gehandhaafd blijft. Het vormt immers een essentieel onderdeel van de exacte oplossing. In woorden hebben we een contactdiscontinuïteit beschreven als een discontinuïteit waarbij over het discontinuïteitsoppervlak geen transport van massa, impuls of energie plaatsvindt. In ons lokale assenstelsel correspondeert dit met een snelheidscomponent u is nul. We eisen nu dat de numerieke flux, welke is gedefinieerd als een benadering van de daadwerkelijke flux $\mathbf{f}$ over de celwand ten gevolge van de toestanden $\mathbf{q}_L$ en $\mathbf{q}_R$, eveneens geen uitdrukking geeft aan transport van massa, impuls of energie over de celwand. We beschouwen de massafluxterm uit de numerieke fluxen volgens Osher en Van Leer om een idee te krijgen in hoeverre hun numerieke flux voldoet aan deze eis.

Van Leer

Van Leers flux vector splitting methode geeft voor de massaflux, $f_1 = \rho u$

$$f_1 = f_1^+ + f_1^- \qquad \text{met} \qquad \begin{array}{rcl} f_1^+ &=& \frac{\rho}{4c}(u+c)^2 \\ f_1^- &=& -\frac{\rho}{4c}(u-c)^2. \end{array}$$

De numerieke massaflux voor FVS-methoden is gegeven als

$$F_1(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R) = f_1^+(\mathbf{q}_L) + f_1^-(\mathbf{q}_R).$$

Vullen we de gegevens over de toestanden $\mathbf{q}_L$ en $\mathbf{q}_R$ in dan volgt

$$\begin{array}{rcccl} f_1^+(\mathbf{q}_L) &=& \frac{\rho_L}{4c_L}(u_L + c_L)^2 &=& \frac{1}{4}\rho_L c_L, \\ f_1^-(\mathbf{q}_R) &=& -\frac{\rho_R}{4c_R}(u_R - c_R)^2 &=& -\frac{1}{4}\rho_R c_R, \end{array}$$

ofwel

$$F_1(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R) = \frac{1}{4}\rho_L c_L - \frac{1}{4}\rho_R c_R \neq 0.$$

De massaflux uit de numerieke flux volgens van Leer is ongelijk aan nul. Hoewel de normaalsnelheden van de toestanden duiden op de afwezigheid van massatransport over de celwand, geeft de numerieke flux van Van Leer wel degelijk massatransport over de celwand weer. Er is sprake van numerieke diffusie. De uitsmering van de contactdiscontinuïteit, die op deze manier optreedt, is ongewenst.

Osher

De vraag is of Osher het beter doet onder de aanwezigheid van een contactdiscontinuïteit over de celwand. We beschouwen de numerieke flux volgens Osher

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R) = \mathbf{f}(\mathbf{q}_L) + \sum_{j=1}^{3} \int_{\Gamma_j} \lambda_{m(j)} \mathbf{r}^{(j)}\, dv.$$

Om de numerieke flux te bepalen moeten we op zoek naar de deelpaden of delen van deelpaden waar de bijbehorende eigenwaarde negatief is. In paragraaf 7.7.2 hebben we laten zien dat dit neerkomt op de evaluatie van de tekens van de eigenwaarden λ_L, $\lambda_{\frac{1}{3}}$, $\lambda_{\frac{1}{2}}$, $\lambda_{\frac{2}{3}}$ en λ_R.
Voor de bepaling van de eigenwaarden $\lambda_{\frac{1}{3}}$ en $\lambda_{\frac{2}{3}}$ zijn de snelheden $u_{\frac{1}{3}}$ en $u_{\frac{2}{3}}$ nodig. Via de notaties

$$\begin{array}{rcl} \alpha &=& \exp\left((z_R - z_L)/2\gamma\right) \\ &=& \exp\left(\frac{\ln(p_R\rho_R^{-\gamma}) - \ln(p_L\rho_L^{-\gamma})}{2\gamma}\right) \\ &=& \exp\left(\ln\left(\left(\frac{p_R\rho_R^{-\gamma}}{p_L\rho_L^{-\gamma}}\right)^{\frac{1}{2\gamma}}\right)\right) = \left(\frac{\rho_R}{\rho_L}\right)^{\frac{-\gamma}{2\gamma}} = \left(\frac{\rho_L}{\rho_R}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{c_R}{c_L}, \\ \psi_L &=& u_L + \frac{2c_L}{\gamma-1} = \frac{2c_L}{\gamma-1}, \\ \psi_R &=& u_R - \frac{2c_R}{\gamma-1} = -\frac{2c_R}{\gamma-1} \end{array}$$

volgt voor deze snelheden

$$\begin{array}{rcl} u_{\frac{1}{3}} &=& (\psi_R + \alpha\psi_L)\,/\,(1+\alpha) = -\frac{2c}{\gamma-1} + \frac{c_R}{c_L}\frac{2c_L}{\gamma-1} = 0, \\ u_{\frac{2}{3}} &=& u_{\frac{1}{3}} = 0. \end{array}$$

In bovenstaande vergelijkingen hebben we de vergelijkingen (7.23) voor de toestanden $\mathbf{q}_{\frac{1}{3}}$ en $\mathbf{q}_{\frac{2}{3}}$ toegepast. Voor de eigenwaarden λ_L, $\lambda_{\frac{1}{3}}$, $\lambda_{\frac{1}{2}}$, $\lambda_{\frac{2}{3}}$ en λ_R volgt

$$\begin{array}{lclclcl} \lambda_L = u_L - c_L = -c_L & < & 0, & \lambda_{\frac{1}{3}} = u_{\frac{1}{3}} - c_{\frac{1}{3}} - c_{\frac{1}{3}} & < & 0, & \lambda_{\frac{1}{2}} = u_{\frac{1}{3}} = 0, \\ \lambda_R = u_R + c_R = c_R & > & 0, & \lambda_{\frac{2}{3}} = u_{\frac{2}{3}} + c_{\frac{2}{3}} = c_{\frac{2}{3}} & > & 0. & \end{array}$$

Via de tekens van de eigenwaarden en vergelijking (7.32) geldt vervolgens voor de numerieke flux

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R) = \mathbf{f}(\mathbf{q}_{\frac{1}{3}}).$$

Ofwel de numerieke massaflux is

$$F_1(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R) = f_1(\mathbf{q}_{\frac{1}{3}}) = \rho_{\frac{1}{3}} u_{\frac{1}{3}} = 0.$$

Als over een celwand geen massatransport plaatsvindt op basis van de toestanden $\mathbf{q}_L$ en $\mathbf{q}_R$ uit een contactdiscontinuïteit dan wordt dit door de numerieke flux van Osher gerespecteerd.

7.8.2 De voor- en nadelen van het Osher schema

Goed beschouwd treedt over elke celwand een discontinuïteit op, want in de meeste gevallen zijn de geconstrueerde toestanden $\mathbf{q}_L$ en $\mathbf{q}_R$ ongelijk aan elkaar. Het is daarom van groot belang dat een numerieke upwindmethode voor de 2D Euler vergelijkingen een nette verwerking van discontinuïteiten heeft. FVS-methoden hebben problemen met discontinuïteiten. De methoden vertonen numerieke diffusie. Contactdiscontinuïteiten, sliplijnen en schokken worden niet exact weergegeven in de numerieke oplossing, maar worden uitgesmeerd over een groot aantal cellen als continue overgangen in de toestand $\mathbf{q}$. In de vorige paragraaf hebben we een illustratie van dit probleem gezien. De numerieke flux van Van Leer introduceerde massatransport over een celwand, waar als het probleem exact zou worden opgelost, geen transport van massa over de celwand zou plaatsvinden. Met het oog op bovenstaande problemen zullen we geen FVS-methode toepassen. Als extra motivatie komt hierbij, dat men bij Akzo Nobel speculeert over optredende schokken in de blazer. We moeten met zekerheid kunnen zeggen, dat als zich schokken voordoen onze numerieke methode ze kan weergeven. Voor de volledigheid moeten we wel melden dat het Van Leer schema op het terrein van de representatie van schokken wel goed scoort, zie Van Leer [29]. Het was de eerste FVS-methode welke een goede representatie van schokken mogelijk maakte.

We zullen een methode kiezen uit de groep van de FDS-methoden. Daarbij is onze keuze gevallen op de methode van Osher. Aan het begin van hoofdstuk 7.4 en in paragraaf 7.3 hebben we reeds aandacht besteed aan het feit dat de methode hogere ogen gooit dan de andere twee veel toegepaste Riemann solvers, Godunov en Roe. We zetten de voordelen van de methode van Osher op een rijtje. Voor eventuele bewijsvoering verwijzen we naar Osher en Solomon [24].

- De FDS-methode van Osher geeft een goede representatie van schokken. De verwerking van schokken en ander stationaire discontinuïteiten vindt plaats over maximaal twee cellen, indien de discontinuïteit samenvalt met een celrand.

- De gerepresenteerde schokken via het Osher schema zijn fysisch correct. We voldoen aan de eis dat over een schok in de stroomrichting de entropie toeneemt. We wijzen op het feit dat fysisch incorrecte expansie schokken een oplossing vormen van de Euler vergelijkingen. Het stelsel Euler vergelijkingen heeft geen unieke oplossing. Het is de bedoeling dat de gevonden numerieke oplossing naar één van de fysisch correcte oplossingen convergeert.

- Het Osher schema heeft een zeer nette verwerking van de randvoorwaarden. We zijn in staat met het voorgeschreven aantal fysische randvoorwaarden te werken. Het is niet nodig aanvullende numerieke randvoorwaarden op te leggen. We verwijzen naar het artikel van Osher [23] en paragraaf 7.9.

- Als laatste noemen we dat de numerieke flux volgens Osher continu differentieerbaar is naar zowel $\mathbf{q}_L$ en $\mathbf{q}_R$. Dit maakt de methode van Osher geschikt voor impliciete oplosmethoden, zoals de methode van Newton.

Uiteraard moeten we naast de voordelen aandacht besteden aan de nadelen van de methode. De nadelen van het Osher schema zijn echter beperkt. De upwindmethode van Osher wordt vaak, deels ten onrechte, beschouwd als complex en rekenintensief. De constructie van het Osherpad op iedere celwand is rekenintensief, maar met de P-variant van Hemker en Spekreijse is deze hoeveelheid rekenwerk al teruggebracht tot acceptabele proporties. In het vervolg zullen we op de rekenintensiteit terugkomen. Voor willekeurige hyperbolische stelsels kan de constructie van de Riemann-invarianten problemen opleveren. Voor de 2D Euler vergelijkingen zijn de benodigde Riemann-invarianten echter bekend. Ofwel we kunnen eigenlijk maar één conclusie trekken. De voordelen van de FDS-methode van Osher wegen volledig op tegen eventuele nadelen. We zullen op ons probleem de numerieke flux van Osher toepassen.

7.9 Osher aan de randen

Over een celwand welke samenvalt met de rand van het fysische domein kunnen we niet zonder meer de numerieke flux $\mathbf{F}(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R)$ bepalen. Afhankelijk van het feit of we met een linker ($\partial\Omega_{i-\frac{1}{2},j}$ of $\partial\Omega_{i,j-\frac{1}{2}}$) of rechter celwand ($\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$ of $\partial\Omega_{i,j+\frac{1}{2}}$) te maken hebben, bestaat de toestand $\mathbf{q}_L$ of $\mathbf{q}_R$ niet. Naast de celwand bevindt zich immers geen cel die in het fysische domein ligt. Op welke wijze kunnen we dan een benadering van de flux $\mathbf{f}$ vinden? We vermelden misschien ten overvloede dat deze $\mathbf{f}$ de fluxcomponent in de x-richting over de celwand in het lokale assenstelsel beschrijft. Osher heeft een nette afhandeling van dit probleem bedacht. Aan deze afhandeling zullen we ons in deze paragraaf wijden.

De toestand *op* de celwand noemen we toestand $\mathbf{q}_B$. In paragraaf 5.1 hebben we op de rand de normaal $\mathbf{n}$ gedefinieerd, welke naar het inwendige domein was gericht. Vervolgens beschreven we hoe de toestand op de rand van het domein kon worden uitgedrukt in golven die informatie verspreidde in de positieve normaalrichting, ofwel van buiten het domein naar binnen, en in golven, welke informatie verspreidden in de negatieve normaalrichting, ofwel vanuit het binnengebied over de rand naar de omgeving. Aan deze golven met hun voortplantingssnelheid $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{n}$ met λ een eigenwaarde van de matrix $An_x + Bn_y$, hebben we het aantal op te leggen randvoorwaarden gekoppeld. Het aantal fysische randvoorwaarden stelden we gelijk aan het aantal golven met een positieve voortplantingssnelheid. De fysische randvoorwaarden moesten zorgdragen voor de benodigde informatie over de toestand $\mathbf{q}_B$ uit de omgeving van het fysische domein. Samen met de informatie uit het inwendige domein moesten we zo de toestand $\mathbf{q}_B$ kunnen bepalen.

Osher heeft een upwindmethode bedacht om de toestand $\mathbf{q}_B$ te benaderen. Hij houdt rekening met de fysische eigenschappen van het stelsel ter plaatse van de rand. Hij neemt het type van de rand (in- of uitstroom) en het type van de stroming (sub- of supersoon) mee in de berekening. Veel numerieke methoden moeten op de rand van het domein de toestand $\mathbf{q}_B$ volledig vastleggen. Osher heeft dankzij het gebruik van zijn upwindmethode voldoende aan de fysische randvoorwaarden en de informatie over de numerieke oplossing uit het inwendige domein. Op welke wijze Osher te werk gaat, zullen we in deze paragraaf illustreren. Voor een theoretische achtergrond verwijzen we naar Osher [23]. In deze paragraaf passen we zijn theorie toe op een beperkt aantal type randen en stromingen. We bespreken de theorie in termen van het Osherpad (P-variant). De uitbreiding naar andere type randen en combinaties van fysische randvoorwaarden laten we aan de lezer over. In de programmatuur van het CWI zijn alle mogelijkheden verwerkt.

Rest ons te noemen dat de flux $\mathbf{f}$ op de celwand langs de rand benaderd zal worden door de flux $\mathbf{f}$ van de benaderde toestand $\mathbf{q}_B$. De integraal

$$\int_{\partial\Omega_{\text{rand}}} T^{-1}(\phi_{\text{rand}})\, \mathbf{f}\left(T(\phi_{\text{rand}})\,\mathbf{q}\right)\, dS$$

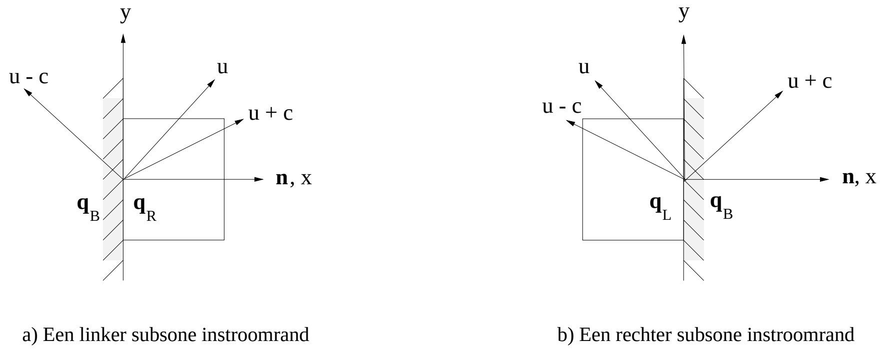
gaat via deze benadering over in

$$\int_{\partial\Omega_{\text{rand}}} T^{-1}(\phi_{\text{rand}})\, \mathbf{f}\left(T(\phi_{\text{rand}})\,\mathbf{q}\right)\, dS = \mathbf{f}(\mathbf{q}_B)\, l_{\text{rand}},$$

waarin het subscript rand staat voor een celwand welke samenvalt met de rand van het domein. l_{rand} is de lengte van de celwand. We illustreren Oshers afhandeling aan de randen voor onze subsone instroomranden.

7.9.1 Osher toegepast aan onze subsone instroomranden

Op de randen $\partial\Omega_1$ en $\partial\Omega_3$ vindt subsone instroom plaats. Deze randen blijken in de programmatuur op het CWI linkerranden te vormen in de aangrenzende randcellen. Dit hangt samen met de keuze van het grid. De situatie voor een randcel staat geschetst in figuur 7.9. We beschouwen zowel de mogelijkheid van een linker- als een rechterinstroomrand.



Figuur 7.9: De situatie op een celwand welke samenvalt met een subsone instroomrand

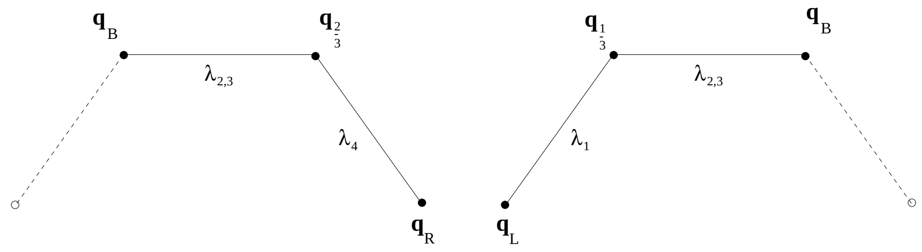
Voor de constructie van een benadering van de toestand $\mathbf{q}_B$ past Osher op de celwand een gereduceerde versie van het Osherpad toe. Het gereduceerde Osherpad verbindt in de toestandsruimte $\mathbf{q}_B$ met $\mathbf{q}_R$ (linkerrand) of $\mathbf{q}_L$ met $\mathbf{q}_B$ (rechterrand). Het principe werkt als volgt.

Het gereduceerde Osherpad

Op de celwand is een lokaal assenstelsel gedefinieerd. De positieve x-as van het lokale assenstelsel valt samen met de positieve normaal op de celwand. In het geval van de linkercelwand is de normaal positief genomen van het buitengebied naar het inwendige van de cel. Voor de rechtercelwand is de normaal positief genomen in omgekeerde richting, ofwel van het binnengebied de wand over naar het buitengebied.
De toestand $\mathbf{q}_B$ op de celwand bouwen we op uit golven met een voortplantingssnelheid, $\mathbf{a} = \lambda_j \mathbf{n}$ met λ_j een eigenwaarde van de matrix $K = An_x + Bn_y$. We wijzen nogmaals op het feit dat in paragraaf 4.1.2 is gesteld, dat de oplossing $\mathbf{q}_B$ kan worden opgebouwd uit golven met een willekeurige voortplantingsrichting $\mathbf{k}$. Afhankelijk van het teken van deze eigenwaarden plant zo'n bouwsteengolf van de toestand $\mathbf{q}_B$ zich voort in de positieve ($\lambda_j > 0$) of negatieve ($\lambda_j < 0$) normaalrichting op de celwand. We wijzen op het feit dat voor een linker randcelwand de positieve eigenwaarden corresponderen met een golf, welke informatie verspreidt over de celwand naar het inwendige domein, ofwel in de positieve normaalrichting. Op de rechtercelwand handelen de golven behorende bij een negatieve eigenwaarde het transport van informatie van het buitengebied naar het inwendige domein af. De positieve normaalrichting staat hier naar het uitwendige domein gericht. Het gereduceerde Osherpad bestaat nu uit die golfpaden, welke corresponderen met de instromende golven over de randcelwand. Voor een linker randcelwand houdt dit in dat we het gereduceerde Osherpad opbouwen uit die golfpaden, welke corresponderen met de positieve eigenwaarden van de Jacobiaan A. Voor een rechter randcelwand nemen we die golfpaden, welke corresponderen met de negatieve eigenwaarden van de Jacobiaan A.

Voor een linker subsone instroomcelwand bestaat het gereduceerde Osherpad dus uit de golfpaden die behoren bij de eigenwaarden $\lambda_{2,3}$ en λ_4. Voor deze eigenwaarden geldt immers dat zij positief zijn, $0 < u < c$. Het gereduceerde Osherpad op de rechter randcelwand is opgebouwd uit de golfpaden welke behoren bij de eigenwaarden λ_1 en $\lambda_{2,3}$. Voor de rechter subsone instroomcelwand geldt immers $u < 0$ en $-u < c$ ofwel er geldt $\lambda_1 < 0$ en $\lambda_{2,3} < 0$. De gereduceerde Osherpaden staan geschetst in figuur 7.10. Wij maken nog steeds gebruik van de P-variant.

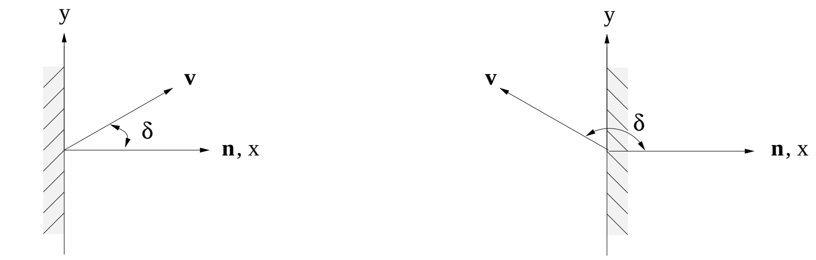
De toestand $\mathbf{q}_B$ ligt via de fysische randvoorwaarden en het gereduceerde Osherpad volledig vast. Dit laten we zien voor de linker subsone instroomcelwand. In ons probleem zijn op de instroomranden twee



a) Een linker subsone instroomrand b) Een rechter subsone instroomrand

Figuur 7.10: Het gereduceerde Osherpad voor een subsone instroomrand.

verschillende randvoorwaarden combinaties gegeven. Voor de randvoorwaarden behandeling verwijzen we naar hoofdstuk 5. We beschouwen eerst het geval indien de fysische randvoorwaarden zijn gegeven als de druk p, de temperatuur T en een willekeurige instroomhoek δ, gedefinieerd in figuur 7.11.



a) Een linker subsone instroomrand b) Een rechter subsone instroomrand

Figuur 7.11: Definitie van de instroomhoek

We introduceren de volgende notaties

$$\begin{aligned} p_B &= p_{\text{in}}, \\ T_B &= T_{\text{in}}, \\ \delta_B &= \delta_{\text{in}}. \end{aligned} \tag{7.33}$$

Uit de fysische randvoorwaarden, vergelijking (7.33), volgen de toestandvariabelen c_B en z_B

$$\begin{aligned} c_B &= \sqrt{\gamma R T_{\text{in}}}, \\ z_B &= \ln\left(p_{\text{in}}\rho_{\text{in}}^{-\gamma}\right) \quad \text{met } \rho_{\text{in}} = \frac{p_{\text{in}}}{R T_{\text{in}}}. \end{aligned}$$

Voor de snelheidscomponenten u_B en v_B geldt

$$u_B = V\cos\delta, \tag{7.34}$$

$$v_B = V\sin\delta. \tag{7.35}$$

De toestandsvariabelen u_B en v_B kunnen we bepalen via de bekende Riemann-invarianten langs de golfpaden, zie paragraaf 4.1.4. Langs de golfpaden geldt via deze invarianten

$$\begin{aligned} u_B &= u_{\frac{2}{3}}, \\ p_{\text{in}} &= p_{\frac{2}{3}}, \\ u_{\frac{2}{3}} - \frac{2c_{\frac{2}{3}}}{\gamma-1} &= u_R - \frac{2c_R}{\gamma-1}, \\ v_{\frac{2}{3}} &= v_R, \\ \ln\left(p_{\frac{2}{3}}\rho_{\frac{2}{3}}^{-\gamma}\right) &= \ln\left(p_R\rho_R^{-\gamma}\right). \end{aligned}$$

Dit levert ons een stelsel op van 5 vergelijkingen met 5 onbekenden, respectievelijk u_B, $u_{\frac{2}{3}}$, $\rho_{\frac{2}{3}}$, $p_{\frac{2}{3}}$ en $v_{\frac{2}{3}}$. Onder deze 5 onbekenden bevindt zich de gezochte snelheidscomponent u_B. Als we het stelsel oplossen, dan volgt

$$u_B = u_R - \frac{2c_R}{\gamma-1} + \frac{2c_{\frac{2}{3}}}{\gamma-1} \quad \text{met} \quad c_{\frac{2}{3}} = \sqrt{\gamma\frac{p_{\frac{2}{3}}}{\rho_{\frac{2}{3}}}} = \sqrt{\gamma p_{\text{in}}\left(\frac{p_R}{p_{\text{in}}}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\frac{1}{\rho_R}}.$$

Uit vergelijkingen (7.34) en (7.35) volgt voor de snelheidscomponent v_B

$$v_B \quad = \quad u_B \tan\delta_{\text{in}}.$$

De toestand $\mathbf{q}_B = (u_B,\ v_B,\ c_B,\ z_B)$ is vervolgens volledig bekend.
Op soortgelijke wijze volgt voor de rechter randcelwand

$$q_B = \begin{pmatrix} u_B \\ v_B \\ c_B \\ z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_L + \frac{2c_L}{\gamma-1} - \frac{2c_{\frac{1}{3}}}{\gamma-1} \\ u_B \tan\delta_{\text{in}} \\ \sqrt{\gamma R T_{\text{in}}} \\ \ln\left(p_{\text{in}}\rho_{\text{in}}^{-\gamma}\right) \end{pmatrix} \quad \text{met} \quad \begin{array}{rcl} c_{\frac{1}{3}} & = & \sqrt{\gamma\frac{p_{\frac{1}{3}}}{\rho_{\frac{1}{3}}}} \\ & = & \sqrt{\gamma p_{\text{in}}\left(\frac{p_L}{p_{\text{in}}}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\frac{1}{\rho_L}} \end{array}.$$

De tweede randvoorwaarden combinatie, die in ons geval voor een subsone instroomrand wordt gebruikt, schrijft de snelheidscomponent in x- en y-richting, u en v, voor en legt de geluidssnelheid c vast. We introduceren de notaties

$$\begin{aligned} u_B &= u_{\text{in}}, \\ v_B &= v_{\text{in}}, \\ c_B &= c_{\text{in}}. \end{aligned}$$

De vierde toestandsvariabele z_B bepalen we opnieuw via de bekende Riemann-invarianten langs de golfpaden uit het gereduceerde Osherpad, zie figuur 7.10. Langs het gereduceerde Osherpad geldt via deze invarianten

$$\begin{aligned} u_{\text{in}} &= u_{\frac{2}{3}}, \\ p_B &= p_{\frac{2}{3}}, \\ u_{\frac{2}{3}} - \frac{2c_{\frac{2}{3}}}{\gamma-1} &= u_R - \frac{2c_R}{\gamma-1}, \\ v_{\frac{2}{3}} &= v_R, \\ \ln\left(p_{\frac{2}{3}}\rho_{\frac{2}{3}}^{-\gamma}\right) &= \ln\left(p_R\rho_R^{-\gamma}\right). \end{aligned}$$

Hieruit kunnen we de druk p_B oplossen

$$p_B = \left(e^{z_R}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}\left(\frac{\gamma}{c_{\frac{2}{3}}^2}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \quad \text{met} \quad c_{\frac{2}{3}} = \frac{\gamma-1}{2}\left(u_{\text{in}} - u_R\right) + c_R. \tag{7.36}$$

De dichtheid volgt vervolgens uit de gegeven geluidssnelheid $c_B = c_{\text{in}}$

$$\rho_B = \gamma\frac{p_B}{c_{\text{in}}^2}. \tag{7.37}$$

Via de vergelijkingen (7.36) en (7.37) geldt voor de entropie

$$z_B = \ln\left(p_B\rho_B^{-\gamma}\right) = \ln\left(\gamma^{-\gamma}p_B^{1-\gamma}c_{\text{in}}^{2\gamma}\right) = \ln\left(e^{z_R}\left(\frac{c_{\text{in}}}{\frac{\gamma-1}{2}\left(u_{\text{in}}-u_R\right)+c_R}\right)^{2\gamma}\right).$$

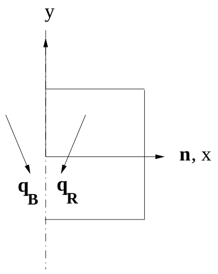
De toestand $\mathbf{q}_B = (u_B,\ v_B,\ c_B,\ z_B)$ is volledig bepaald.

Voor de rechter randcelwand volgt op soortgelijke wijze

$$q_B = \begin{pmatrix} u_B \\ v_B \\ c_B \\ z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\text{in}} \\ v_{\text{in}} \\ c_{\text{in}} \\ \ln\left(e^{z_L}\left(\frac{c_{\text{in}}}{\frac{\gamma-1}{2}(u_L-u_{\text{in}})+c_L}\right)^{2\gamma}\right) \end{pmatrix}.$$

7.9.2 Osher toegepast aan de overige randen van ons domein

Voor de verwerking van de vaste ondoordringbare wanden en de subsone uitstroomrand in het Osher schema wordt verwezen naar mijn literatuurverslag, Lanser [20]. De verwerking van de symmetrierand in het Osher schema is daar niet behandeld.
We beschouwen de symmetrierand in het geval van een linkerrand, zie figuur 7.12. Op deze wijze zit de symmetrierand in ons probleem verwerkt.



Figuur 7.12: De situatie op een celwand welke samenvalt met een symmetrierand

De toestand op de celwand, $\mathbf{q}_B$, stellen we gelijk aan de heersende toestand links van de wand. Uit symmetrieoverweging geldt zodoende

$$\mathbf{q}_B = \begin{pmatrix} u_B \\ v_B \\ c_B \\ z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_R \\ v_R \\ c_R \\ z_R \end{pmatrix}.$$

De situatie voor een rechter symmetrierand verloopt analoog.

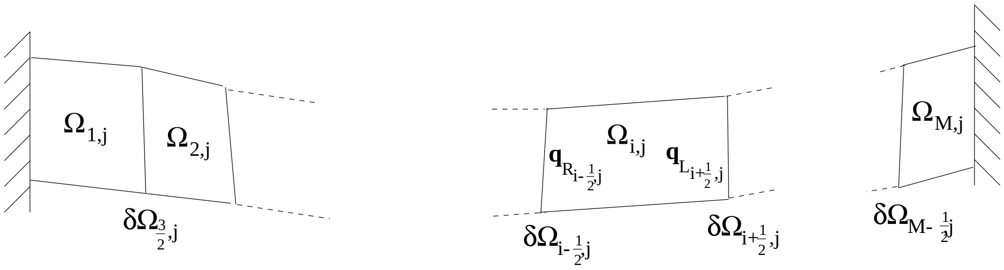
7.10 Toestandsinterpolatie

7.10.1 Inleiding

In het hoofdstuk over de randvoorwaarden, hoofdstuk 5, hebben we met iedere rand van ons fysische domein zijn type (in- of uitstroom) en het type stroming (sub- of supersoon) geïdentificeerd. De mogelijke varianten, subsone instroomrand, subsone uitstroomrand, symmetrierand en vaste ondoordringbare randen, zijn in de vorige paragraaf beschouwd voor hun verwerking in het Osher schema. Daarbij hebben we bovendien de vastgestelde fysische randvoorwaardencombinaties op de randen verwerkt. Met deze bespreking is het Osher schema zo goed als afgerond. Als laatste moeten we nog een keuze maken over de tot standkoming van de constante toestanden $\mathbf{q}_L$ en $\mathbf{q}_R$, links en rechts van de celwand. In deze paragraaf zullen we daar aandacht aan besteden. Hierbij staan $\mathbf{q}_L$ en $\mathbf{q}_R$ in deze paragraaf voor de toestanden links en rechts van de wanden in het globale assenstelsel. Met de keuze voor deze toestanden ligt de orde van nauwkeurigheid van ons upwindschema vast.

7.10.2 Interpolatie voor de linker en rechter celwandtoestanden

De celwand toestanden $\mathbf{q}_L$ en $\mathbf{q}_R$ worden bepaald door interpolatie van de toestanden in de celcentra van nabijgelegen subdomeintjes. De interpolatie vindt daarbij plaats in één richting, ofwel over één celindex, i of j. We spreken van 1D toestandsinterpolatie. We lichten deze toestandsinterpolatie nader toe.



Figuur 7.13: Een set van eindige subdomeintjes van rand tot rand in één richting.

We nemen een willekeurige set cellen in één gegeven richting. We beschouwen het geval met j = constant, zie figuur 7.13. De eenvoudigste toestandsinterpolatie is de eerste orde nauwkeurige 1D interpolatie. Er geldt

$$\mathbf{q}_{L_{i+\frac{1}{2},j}} = \mathbf{q}_{i,j}, \quad \mathbf{q}_{R_{i-\frac{1}{2},j}} = \mathbf{q}_{i,j} \quad \text{met} \quad i = 1, 2, .., M, \tag{7.38}$$

waarin M het aantal gridcellen bedraagt in de set cellen met j = constant. Voor een 1D set cellen in de y-richting, i = constant volgt op soortgelijke wijze

$$\mathbf{q}_{L_{i,j+\frac{1}{2}}} = \mathbf{q}_{i,j}, \quad \mathbf{q}_{R_{i,j-\frac{1}{2}}} = \mathbf{q}_{i,j} \quad \text{met} \quad j = 1, 2, .., N, \tag{7.39}$$

waarin N het aantal gridcellen bedraagt in de set cellen met i = constant.
De nauwkeurigheid van de toestandsinterpolatie voor $\mathbf{q}_L$ en $\mathbf{q}_R$ werkt door op de nauwkeurigheid van de numerieke fluxen uit het Osher schema. Deze numerieke fluxen vormen op hun beurt een benadering van de fluxen over de celwand welke zouden optreden als links en rechts van de celwanden de toestanden $\mathbf{q}_L$ en $\mathbf{q}_R$ zouden heersen. Zonder bewijs vermelden we dat met de keuzes uit vergelijkingen (7.38) en (7.39) de nettoflux over de rand van een subdomein, $\partial\Omega_{i,j}$, eerste orde nauwkeurig is. We verwijzen naar Hirsch [15, blz.493–516].
In de code van het CWI is tevens de mogelijkheid opgenomen met een tweede orde nauwkeurig Osher schema te rekenen. Wij maken van deze mogelijkheid vooralsnog geen gebruik. Ons eerste orde upwindschema is robuust. Bovendien is de 1D-toestandsinterpolatie direct en eenvoudig toepasbaar op iedere celwand. De bekende nadelen nemen we voor lief. Zo worden met 1D-toestandsinterpolatie discontinuïteiten welke niet samenvallen met de celwanden sterk uitgesmeerd.

7.10.3 De gediscretiseerde versie van de 2D Euler vergelijkingen

Met de behandeling van de toestandsinterpolatie zijn we aan het einde gekomen van de bespreking van de numerieke methoden voor de Euler vergelijkingen. Voor stationaire stromingen zijn de 2D Euler vergelijkingen gediscretiseerd tot onderstaande vorm

$$\begin{array}{ll} & T^{-1}\left(\phi_{i+\frac{1}{2},j}\right)\mathbf{F}\left(T(\phi_{i+\frac{1}{2},j})\mathbf{q}_{L_{i+\frac{1}{2},j}}, T(\phi_{i+\frac{1}{2},j})\mathbf{q}_{R_{i+\frac{1}{2},j}}\right)\ell_{i+\frac{1}{2},j} \quad + \\ + & T^{-1}\left(\phi_{i,j+\frac{1}{2}}\right)\mathbf{F}\left(T(\phi_{i,j+\frac{1}{2}})\mathbf{q}_{L_{i,j+\frac{1}{2}}}, T(\phi_{i,j+\frac{1}{2}})\mathbf{q}_{R_{i,j+\frac{1}{2}}}\right)\ell_{i,j+\frac{1}{2}} \quad + \\ + & T^{-1}\left(\phi_{i-\frac{1}{2},j}\right)\mathbf{F}\left(T(\phi_{i-\frac{1}{2},j})\mathbf{q}_{L_{i-\frac{1}{2},j}}, T(\phi_{i-\frac{1}{2},j})\mathbf{q}_{R_{i-\frac{1}{2},j}}\right)\ell_{i-\frac{1}{2},j} \quad + \\ + & T^{-1}\left(\phi_{i,j-\frac{1}{2}}\right)\mathbf{F}\left(T(\phi_{i,j-\frac{1}{2}})\mathbf{q}_{L_{i,j-\frac{1}{2}}}, T(\phi_{i,j-\frac{1}{2}})\mathbf{q}_{R_{i,j-\frac{1}{2}}}\right)\ell_{i,j-\frac{1}{2}} \quad = \quad 0, \end{array} \tag{7.40}$$

waarin $\mathbf{F}$ is gegeven als de numerieke flux volgens het Osher schema. De gediscretiseerde integraalbalansen gelden op ieder eindig volume $\Omega_{i,j}$ uit ons fysische domein Ω. Behalve aan de randen ziet de plaatsdiscretisatie er iets anders uit. Uit het stelsel, dat wordt gevormd door alle balansen over de eindige volumes $\Omega_{i,j}$, kunnen we de toestanden $\mathbf{q}_{i,j}$ in de celcentra bepalen.

We zullen echter geen aandacht besteden aan de gevonden oplossingen voor de Euler vergelijkingen. Te zijner tijd zullen we n.a.v. het draaien van de CWI code slechts zijdelings op onze Euler vergelijkingen terugkomen. Onze interesse gaat uit naar de oplossing van de realistischere 2D NS-vergelijkingen.
Misschien ten overvloede vermelden we nogmaals, dat de uitgebreide behandeling van ons Euler probleem niet voor niets is geweest. Zowel de randvoorwaardenbehandeling als het beschreven numerieke schema van Osher zullen we toepassen bij de bespreking van de NS-vergelijkingen. Zoals zal blijken zijn we al een flink eind op weg naar een numerieke oplossing van ons NS-probleem.

Hoofdstuk 8

De Navier-Stokes vergelijkingen

8.1 Inleiding

In de praktijk zijn alle media in meer of mindere mate viskeus. In viskeuze stromingen spelen, naast traagheids- en drukkrachten, principes zoals wrijving, diffusie en warmtegeleiding een rol. Voor ons probleem zijn de wrijvingsaspecten van belang aan de vaste wanden van de blazer. Daarnaast berust het trekkrachtmechanisme volledig op de aanwezigheid van viscositeit. Wij zullen dan ook de NS-vergelijkingen aanwenden om de luchtstroming in de spleetblazer te bepalen. Omdat echter in grote delen van de stroming naast wrijving de traagheids- en/of drukkrachten domineren, zullen daarbij veelvuldig resultaten en afleidingen voor de 2D Euler vergelijkingen worden gebruikt.

8.2 De Navier-Stokes vergelijkingen in differentiaalvorm

Uit de integraalbalansen (3.21), (3.23) en (3.25) zijn de NS-vergelijkingen in differentiaalvorm af te leiden

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = 0, \tag{8.1}$$

met $\mathbf{q} = (\rho,\ \rho u,\ \rho v,\ \rho E\ )$. In analogie met de Euler vergelijkingen duiden we $\mathbf{F}$ en $\mathbf{G}$ aan als fluxen. Deze fluxen zijn opgebouwd uit een convectief(c) en een diffusief deel(d). We merken op dat in het convectieve deel eveneens de druktermen verwerkt zitten. Voor de fluxen in x-, $\mathbf{F}$, en y-richting, $\mathbf{G}$, geldt respectievelijk

$$\mathbf{F} = \mathbf{f}_c - \mathbf{f}_d \quad \text{en} \quad \mathbf{G} = \mathbf{g}_c - \mathbf{g}_d,$$

met

$$\mathbf{f}_c = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho E u + pu \end{pmatrix},\ \mathbf{f}_d = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xx} u + \tau_{yx} v + k\frac{\partial T}{\partial x} \end{pmatrix},\ \mathbf{g}_c = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + pv \\ \rho E v + pv \end{pmatrix},\ \mathbf{g}_d = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{xy} u + \tau_{yy} v + k\frac{\partial T}{\partial y} \end{pmatrix},$$

waarin

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \mu \left(\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \tau_{yy} &= \mu \left(\frac{4}{3}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Zoals in paragraaf 3.3 is beschreven draagt het extra diffusieve deel uit de fluxen **F** en **G** zorg voor de verwerking van wrijving en warmtegeleiding in het stromingsprobleem.

Met de uitbreiding van de balansen met de diffusieve fluxen is een stelsel van tweede orde partiële differentiaalvergelijkingen ontstaan. Het type van dit stelsel is essentieel anders dan dat van de Euler vergelijkingen. De NS-vergelijkingen vormen een parabolisch stelsel. De impulsvergelijkingen en energievergelijking zijn parabolisch in tijd en plaats. Voor stationaire stromingen vormen de NS-vergelijkingen een elliptisch stelsel. In dat geval zijn de impulsvergelijkingen en energievergelijking elliptisch van aard. Voor achtergronden verwijzen we naar Hirsch [14, blz.152–155] en [15, blz.601–603]. Zoals in hoofdstuk 5 voor de Euler vergelijkingen is besproken hangt het aantal op te leggen randvoorwaarden samen met het hyperbolische karakter van de vergelijkingen. In de volgende paragraaf besteden we aandacht aan de randvoorwaarden problematiek voor ons NS-probleem.

8.3 De randvoorwaarden voor ons Navier-Stokes probleem

8.3.1 Inleiding

De code op het CWI is geschikt voor stationaire stromingsproblemen. Zodoende moeten we op zoek naar geschikte randvoorwaarden voor een gemengd elliptisch-hyperbolisch stelsel op ons fysische domein. Voor een elliptische tweede orde differentiaalvergelijking is bekend dat het probleem goed gesteld is indien één randvoorwaarde wordt opgelegd. Helaas ligt de kwestie voor ons gemengde probleem moeilijker. Voor de NS-vergelijkingen bestaat geen globale theorie welke eisen voorschrijft aan de randvoorwaarden waarmee het stelsel moet worden uitgebreid om een goedgesteld probleem te verkrijgen. Temam [28], Dutt [6] en Gustafsson [10] hebben voor specifieke stromingsproblemen aan deze problematiek aandacht besteed.
Over het algemeen schrijft men voor elliptische tijdsonafhankelijke NS-vergelijkingen randvoorwaarden voor aan de toestandsvariabelen, Dirichlet randvoorwaarden, of hun afgeleiden, Neumann randvoorwaarden. In de keuze speelt vaak fysische intuïtie omtrent de stroming een rol. Daarnaast past men het aantal randvoorwaarden aan op de beschikbare fysische gegevens. We gaan ons niet wagen aan een verdere bespreking van de randvoorwaardenproblematiek voor de NS-vergelijkingen. We bespreken onze keuzes en wijzen op het feit dat de randvoorwaardenproblematiek geen triviale zaak is. In de toekomst is het interessant de mogelijkheden van andere randvoorwaarden en de invloeden van onze randvoorwaardenkeuzes te beschouwen
In een groot deel van onze stroming domineren de traagheids- en drukeffecten. Dit komt overeen met een hoog Reynoldsgetal, zie paragraaf 8.4. Met het oog op deze dominantie hebben we zoveel mogelijk de gekozen randvoorwaarden voor de Euler vergelijkingen vastgehouden. In ieder geval hebben we getracht de randvoorwaardenaantallen n.a.v. de karakteristiekentheorie te handhaven. Op de vaste wanden zijn de randvoorwaarden wel gewijzigd. Ter plaatse spelen de diffusieve fluxen een essentiële rol. In deze paragraaf vullen we de veranderingen in de randvoorwaarden in. Voor de overige randvoorwaarden bespreking verwijzen we naar paragraaf 5.3.6.

8.3.2 De randvoorwaarden op de vaste wanden $\partial\Omega_2,\ \partial\Omega_4,\ \partial\Omega_5$ en $\partial\Omega_6$

Op de vaste wanden van ons domein leggen we randvoorwaarden op aan de snelheidscomponenten u, v en de temperatuur T. Praktijkervaring heeft uitgewezen dat op vaste wanden te allen tijde de no-slip conditie geldt. Het snelheidsverschil tussen het fluïdum en de wand bedraagt nul. In ons geval reduceert de no-slip conditie tot

$$\mathbf{v} = 0.$$

De wanden van de blazer staan immers stil. Voor de temperatuur maakt men veelal gebruik van de volgende randvoorwaarde. Men schrijft de temperatuur van de wand voor

$$T = T_w.$$

In dat geval wordt de wand via een warmtebron op temperatuur gehouden. Of men schrijft de warmteflux voor

$$-k\frac{\partial T}{\partial n} = q_w, \text{ met } q_w \text{ de warmteflux van de wand.}$$

Een speciaal geval van de laatste randvoorwaarde betreft de adiabatische wand, dan geldt

$$-k\frac{\partial T}{\partial n} = 0.$$

De wand is geïsoleerd. Hoewel voor de blazer de wanden niet zijn geïsoleerd, nemen we toch aan dat het warmteverlies via de wanden niet essentieel groot is. Naast de no-slip conditie leggen we aan de wanden de adiabatische wandvoorwaarde op.

8.3.3 De randvoorwaarden aan het einde van de luchtinlaat $\partial\Omega_3$

Als randvoorwaarden van de Euler vergelijkingen schreven we op rand $\partial\Omega_3$ de snelheidscomponenten u_{jet}, v_{jet} en c_{jet} voor. Deze toestanden relateerden we aan vastgelegde voorwaarden voor het Machgetal M_{jet}, de instroomhoek δ_{jet} en de geluidssnelheid in de suskamer c_{sus}. De relaties tussen u_{jet}, v_{jet}, c_{jet} en M_{jet}, δ_{jet}, c_{sus} luidden

$$\begin{aligned} u_{\text{jet}} &= M_{\text{jet}} c_{\text{jet}} \cos\delta_{\text{jet}}, && (8.2)\\ v_{\text{jet}} &= -M_{\text{jet}} c_{\text{jet}} \sin\delta_{\text{jet}}, && (8.3)\\ c_{\text{jet}} &= c_{\text{sus}}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_{\text{jet}}^2\right)^{-\frac{1}{2}}. && (8.4) \end{aligned}$$

Voor de NS-vergelijkingen handhaven we deze randvoorwaardenafhandeling, hoewel we ons realiseren dat in principe vergelijking (8.4) niet geldig is. Deze relatie geldt tenslotte voor niet-viskeuze stromingen. Toch nemen we aan dat bij benadering de relaties (8.2), (8.3) en (8.4) toepasbaar zijn. De relaties stellen ons in staat een schatting te maken omtrent de toestanden u, v en c aan het einde van de luchtinlaat. In analogie met de Euler vergelijkingen geldt voor de instroomhoek $\delta_{\text{jet}} = 20°$ en $c_{\text{sus}} = \sqrt{\gamma R T_{\text{sus}}}$ met $T_{\text{sus}} \approx T_{\text{omg}}$. De aanname voor het constante Machgetal, $M_{\text{jet}} = 1$, kunnen we niet langer toepassen. Aan de wanden van de luchtinlaat moeten we de no-slip conditie respecteren.
De keuze voor M_{jet} baseren we op een Poiseuille snelheidsprofiel. Voor een beschrijving van de Poiseuille stroming verwijzen we naar Korving, Corstens en Timman [19, blz. 178–182]. Een Poiseuille stroming beschrijft een stationaire, laminaire, incompressibele, viskeuze stroming tussen twee vlakke platen op een kleine constante afstand van elkaar. Op het incompressibiliteitsaspect na voldoet onze luchtinlaat aan de gestelde voorwaarden.[1]
We beschouwen rand $\partial\Omega_3^*$, zie figuur 8.1, waarbij we aannemen dat in de luchtinlaat een Poiseuille stroming plaatsvindt. De snelheidscomponent in de x^*-richting, $u^*(y)$, zie figuur 8.1, heeft dan een kwadratisch profiel, ofwel

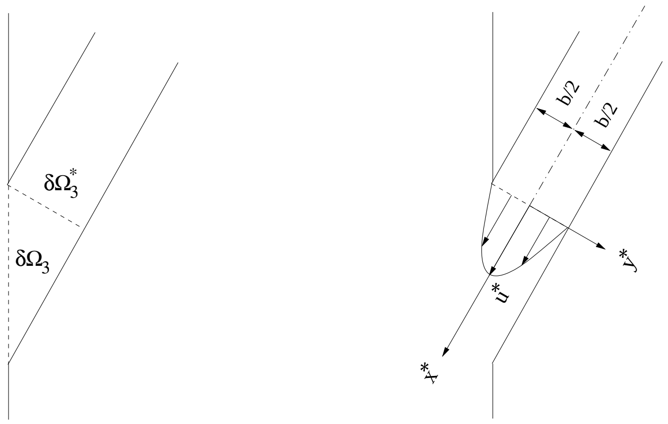
$$u^*(y^*) = a{y^*}^2 + by^* + c, \quad \text{met } a,\ b,\ c \in R. \tag{8.5}$$

De y^*-coördinaat staat eveneens gedefinieerd in figuur 8.1. Er geldt $-b/2 \leq y^* \leq b/2$ met b de breedte van de luchtinlaat. Voor de snelheidscomponent in de y^*-richting geldt $v^* = 0$.
Op een willekeurige dwarsdoorsnede van de luchtinlaat, $x^* =$ constant, heerst voor een Poiseuille stroming een constante druk, $p^*(x^*)$. Wegens de voorwaarde van incompressibiliteit is daarnaast de dichtheid door de gehele luchtinlaat constant. Via vergelijking (3.19) volgt zodoende voor de geluidssnelheid c^*, $c^*(x^*)$. Hieruit volgt vervolgens samen met vergelijking (8.5) dat het Machgetal op elke dwarsdoorsnede, $x^* =$ constant, kan worden beschreven door een kwadratisch profiel

$$M(y^*) = p(x^*){y^*}^2 + q(x^*)y^* + r(x^*) \quad \text{met } p(x^*),\ q(x^*),\ r(x^*)\ \in R. \tag{8.6}$$

Wij zijn op zoek naar het Machprofiel op de rand $\partial\Omega_3^*$, $x^* = 0$. Indien we de constantes $p(0)$, $q(0)$ en $r(0)$ kennen, kunnen we uit vergelijking (8.6) het Machprofiel halen.

[1] Met inachtneming van het incompressibiliteitsaspect is een suggestie gedaan voor het opleggen van een propstroming op rand $\partial\Omega_3$. In zo'n geval geldt aan de wanden $M_{\text{jet}} = 0$. Op de rest van de dwarsdoorsnede geldt $M_{\text{jet}} = 1$. Deze randvoorwaarde is voor eindige volumemethodes Niet te implementeren.

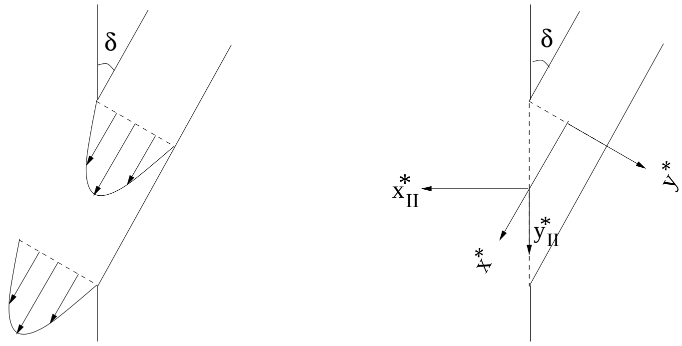


Figuur 8.1: Poiseuille snelheidsprofiel aan de rand $\partial\Omega_3^*$

Op de vaste wanden van de luchtinlaat, $y^* = -b/2$ en $y^* = b/2$ bedraagt de snelheid $\mathbf{v}^* = 0$. Daarnaast nemen we aan dat we over de doorsnede $\partial\Omega_3^*$ het maximale Machgetal kennen. Met het oog op choking kiezen we $M_{\max} = 1$. Voor het Machprofiel op $x^* = 0$ volgt

$$M(y^*) = -\frac{4}{b^2}{y^*}^2 + 1.$$

Met bovenstaande beschrijving van het Machprofiel op rand $\partial\Omega_3^*$ hebben we echter nog niet het Machprofiel op $\partial\Omega_3$ te pakken. We nemen daartoe aan, dat in de richting x^* over de afstand tussen $\partial\Omega_3^*$ en $\partial\Omega_3$ het Machprofiel niet noemenswaardig varieert. We handhaven daarbij de redenering uit paragraaf 5.3.3. Het Machprofiel rond het einde van de luchtinlaat staat geschetst in figuur 8.2.



Figuur 8.2: Machprofiel en lokaal assenstelsel aan de rand $\partial\Omega_3$

Als we vervolgens gebruik maken van het lokale assenstelsel gedefinieerd op de rand $\partial\Omega_3$, zie eveneens figuur 8.2, dan volgt

$$\begin{aligned} u_{\text{jet}}(y^*_{II}) &= M_{\text{jet}} c_{\text{jet}} \cos\delta_{\text{jet}}, \\ v_{\text{jet}}(y^*_{II}) &= -M_{\text{jet}} c_{\text{jet}} \sin\delta_{\text{jet}}, \\ c_{\text{jet}}(y^*_{II}) &= c_{\text{sus}} \left(1 + \tfrac{\gamma-1}{2} M_{\text{jet}}^2\right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad \text{met} \quad \begin{aligned} M_{\text{jet}}(y^*_{II}) &= -\tfrac{4\sin^2\delta_{\text{jet}}}{b^2} {y^*_{II}}^2 + 1, \\ \delta_{\text{jet}} &= 20^\circ, \\ c_{\text{sus}} &= \sqrt{\gamma R T_{\text{omg}}}. \end{aligned}$$

8.3.4 Een samenvatting van de randvoorwaarden voor ons Navier-Stokes model

Op de andere randen uit onze CWI-geometrie hebben we de afgeleide randvoorwaarden volledig gehandhaafd. We sluiten de randvoorwaardenproblematiek af met een samenvatting van de vastgestelde randvoorwaarden voor ons NS-probleem.

- $p = p_{\text{omgeving}}$, $T = T_{\text{omgeving}}$ en $\delta_{\text{instroom}} = 0$ op rand $\partial\Omega_1$ in het geval van subsone instroom,
- $p = p_{\text{omgeving}}$ of $T = T_{\text{omgeving}}$ op rand $\partial\Omega_1$ in het geval van subsone uitstroom,
- Op rand $\partial\Omega_3$, $M_{\text{jet}}(y^*_{II}) = -\frac{4\sin^2\delta_{\text{jet}}}{b^2}{y^*_{II}}^2 + 1$, $\delta_{\text{jet}} = 20°$ en $c_{\text{jet}} = c_{\text{sus}}\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2_{\text{jet}}\right)^{-\frac{1}{2}}$ met $c_{\text{sus}} = \sqrt{\gamma R T_{\text{omgeving}}}$,
- $\mathbf{v} = 0$ en $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ op de randen $\partial\Omega_2$, $\partial\Omega_4$, $\partial\Omega_5$ en $\partial\Omega_6$,
- $p = p_{\text{omgeving}}$ op rand $\partial\Omega_7$.
- Voor de verwerking van de symmetrierand $\partial\Omega_8$ verwijzen we naar paragraaf 7.9.2.

8.4 Overgang naar een dimensieloze vorm van de Navier-Stokes vergelijkingen

We zullen in de CWI-code niet werken met de NS-vergelijkingen, zoals ze in paragraaf 8.2 zijn beschreven. In de code is een dimensieloze versie van de vergelijkingen verwerkt. In appendix B staat de afleiding van deze versie beschreven. De dimensieloze NS-vergelijkingen luiden

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} - \frac{1}{\text{Re}}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial y}\right) = 0, \tag{8.7}$$

met

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ \rho u \left(E + \frac{p}{\rho}\right) \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ \rho v \left(E + \frac{p}{\rho}\right) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + \frac{1}{(\gamma-1)}\frac{1}{\text{Pr}}\frac{\partial c^2}{\partial x} \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + \frac{1}{(\gamma-1)}\frac{1}{\text{Pr}}\frac{\partial c^2}{\partial y} \end{pmatrix},$$

waarin

$$\tau_{xx} = \mu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial y}\right), \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad \tau_{yy} = \mu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

De grootheden u, v, ρ, p, E, en c en de coördinaten x en y uit deze vergelijkingen zijn dimensieloos. Als referentiegrootheden hebben we gekozen voor

$$l = 1 \text{ mm}, \quad U = c_{\text{sus}}, \quad \rho_{\text{ref}} = \rho_{\text{omgeving}}.$$

Het Reynoldsgetal is gedefinieerd als

$$\text{Re} = \frac{\rho_{\text{ref}} U l}{\mu_{\text{ref}}}$$

en het Prandtlgetal als

$$\text{Pr} = \frac{\mu_{\text{ref}} c_p}{k_{\text{ref}}}.$$

Voor lucht onder standaardcondities geldt $\text{Pr} = 0.71$. Voor het Reynoldsgetal volgt

$$\text{Re} = \frac{\rho_{\text{ref}} U l}{\mu_{\text{ref}}} = \frac{1.2 \cdot 340 \cdot 1.0 \cdot 10^{-3}}{1.789 \cdot 10^{-5}} \approx 2.3 \cdot 10^4, \tag{8.8}$$

waarin ρ_{ref}, μ_{ref} zijn gekozen als de dichtheid en dynamische viscositeit bij standaardcondities, $p = 1$ atm en $T = 293$ K. De referentiesnelheid c_{sus} hebben we afgeschat als de geluidssnelheid onder deze standaardcondities.

Bij het draaien van de CWI-code zullen we naast het Reynoldsgetal uit vergelijking (8.8), aangeduid als Re_{proef}, een range van Reynoldsgetallen beschouwen. Met het variëren van het Reynoldsgetal oefenen we invloed uit op de mate waarin de traagheids- en druktermen over de diffusietermen domineren of omgekeerd. Bij de resultatenbespreking komen we op het belang van de Reynoldsvariatie terug.

Als laatste merken we twee dingen op. In het geval van de dimensieloze versie van de vergelijkingen kunnen we zonder problemen de randvoorwaarden uit paragraaf 5.3.6 en 8.3.4 opleggen. We moeten daarbij wel de randvoorwaarden door hun dimensieloze varianten vervangen. Verder verkrijgen we, indien we het quotiënt $1/Re$ gelijk aan nul stellen, het dimensieloze Euler probleem.

8.5 Numerieke methoden voor de Navier-Stokes vergelijkingen

8.5.1 Inleiding

Voor de NS-vergelijkingen is slechts in een beperkt aantal gevallen een exacte uitdrukking voor de oplossing bekend. Voor het vinden van een oplossing zijn we zodoende aangewezen op het gebruik van numerieke methoden. Zo'n numerieke methode wordt geacht de fysica achter het probleem te representeren. Een numerieke oplossing is pas een goede benadering van de exacte oplossing, indien aan bepaalde criteria betreffende deze fysica is voldaan. Voor de Euler vergelijkingen zijn deze criteria in paragraaf 6.1.1 besproken. De criteria voor de NS-vergelijkingen verlopen analoog. Enkele criteria vereisen daarbij een toelichting. Voor verdere aanvulling verwijzen we naar paragraaf 6.1.1.

Fysische aspecten, waarmee ons numerieke schema rekening moet houden:

1. Behoud van massa, impuls en energie

2. Juiste representatie van fysisch correcte schokken.

   Onder invloed van viskeuze effecten en warmtegeleiding zijn de niet-viskeuze discontinuïteiten, zoals schokken en contactdiscontinuïteiten, overgegaan in scherpe, maar continue variaties. Het begrip schok blijft in een viskeuze stroming echter gehandhaafd. De afstand, waarover de scherpe schokovergangen plaatsvinden zijn erg klein, ongeveer enkele vrije weglengtes in het gas. We verwijzen naar Liepmann en Roshko [22]. Op een numeriek rooster is deze afstand te klein om te worden waargenomen. Schokken worden zodoende in viskeuze stromingen op dezelfde wijze behandeld als hun niet-viskeuze varianten. De numerieke methode moet in staat zijn fysisch correcte schokken te representeren.

3. Numerieke diffusie

   Numerieke methoden bouwen veelal via de gekozen discretisatie extra diffusie in de gediscretiseerde vergelijkingen in. We spreken van numerieke diffusie. Voor een goede representatie van de daadwerkelijke diffusie is het van belang deze numerieke diffusie binnen de perken te houden. De numerieke diffusie smeert schokken in de stroming uit en beïnvloedt de grenslaagdikte aan de vaste wanden. Numerieke diffusie is ongewenst.

4. Een nette afhandeling en verwerking van de randvoorwaarden

8.5.2 Ons numerieke schema voor de Navier-Stokes vergelijkingen

In de komende paragraaf bespreken we de numerieke methoden, welke wij hebben toegepast om de NS-vergelijkingen op te lossen. Onze methode voldoet aan de gestelde criteria, nummer 1, 2 en 4. Criteria 3 levert voor numerieke methoden veelal problemen. We hebben getracht criteria 3 zo goed mogelijk te respecteren. Bij de resultatenbespreking van de Re-variatie zullen we laten zien, dat we daar met onze numerieke methode goed in zijn geslaagd.

Discretisatie met behulp van een eindige volume methode

Zoals Lax voor de Euler vergelijkingen beschreef, blijft de conservatieve integraalvorm geldig in de aanwezigheid van discontinuïteiten in de stroming. Omdat we graag willen, dat onze numerieke oplosmethode voor de NS-vergelijkingen eveneens een Euler oplossing met discontinuïteiten toestaat, zullen we de vergelijkingen (8.7) in hun integraalvorm discretiseren.
In navolging van de Euler vergelijkingen passen we een eindige volumemethode toe. We delen ons fysische domein Ω op in elkaar niet overlappende subdomeintjes, eindige volumes $\Omega_{i,j}$ met rand $\partial\Omega_{i,j}$, zie paragraaf 6.2. Over ieder subdomein $\Omega_{i,j}$ leggen we de behoudswetten op. Er geldt

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega_{i,j}} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial y}\right) dV &= 0 \qquad \Rightarrow \\ \oint_{\partial\Omega_{i,j}} \mathbf{f}(\mathbf{q})n_x + \mathbf{g}(\mathbf{q})n_y \, dS - \frac{1}{\mathrm{Re}} \oint_{\partial\Omega_{i,j}} \mathbf{r}(\mathbf{q})n_x + \mathbf{s}(\mathbf{q})n_y \, dS &= 0, \quad \forall i,j. \end{aligned} \tag{8.9}$$

De normaal $\mathbf{n}$ is hierin gedefinieerd als de naar buitengerichte eenheidsnormaal op de rand $\partial\Omega_{i,j}$ van het eindige volume $\Omega_{i,j}$. In paragraaf 6.2 staan de bijbehorende figuren voor de eindige volumes geschetst. De gevormde integraalbalansen moeten op een geschikte wijze worden gediscretiseerd. De discretisatie van het convectieve en het diffusieve deel uit de balansen vindt onafhankelijk van elkaar plaats.

Discretisatie van het convectieve deel uit de conservatieve integraalvorm

De behandeling van de discretisatie van het convectieve deel is zo goed als besproken. Het betreft de discretisatie van de integraal

$$\oint_{\partial\Omega_{i,j}} \mathbf{f}(\mathbf{q})n_x + \mathbf{g}(\mathbf{q})n_y \, dS.$$

Het convectieve deel uit de NS-vergelijkingen is gelijk aan het fluxdeel uit de integraalvorm van de Euler vergelijkingen, vergelijking (6.2). Discretisatie van die integraal is in hoofdstuk 7 breed uitgemeten. Op basis van de argumenten omtrent de voordelen van het Osher schema passen we deze discretisatie eveneens toe voor het convectieve deel van de NS-vergelijkingen. Voor de rotatie-invariantie, de numerieke flux en de randvoorwaardenafhandeling volgens Osher verwijzen we volledig terug naar hoofdstuk 7. We passen op het convectieve deel een eerste orde nauwkeurig Osher upwindschema toe.

Discretisatie van het diffusieve deel uit de conservatieve integraalvorm

De discretisatie van het diffusieve deel komt in deze paragraaf aan de orde. We beschouwen de integraal

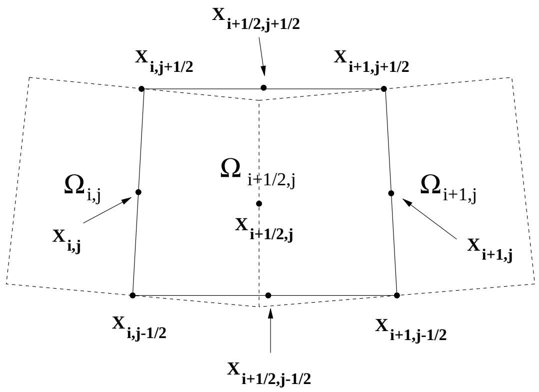
$$\oint_{\partial\Omega_{i,j}} \mathbf{r}(\mathbf{q})n_x + \mathbf{s}(\mathbf{q})n_y \, dS.$$

Voor de evaluatie van deze integraal, bekijken we de integraal over een deel van de celwand, celwand $\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$. De integraal over de diffusieve flux over deze celwand luidt

$$\int_{\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j}} \mathbf{r}(\mathbf{q})n_x + \mathbf{s}(\mathbf{q})n_y \, dS = n_{x_{i+\frac{1}{2},j}} \int_{\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j}} \mathbf{r}(\mathbf{q}) \, dS + n_{y_{i+\frac{1}{2},j}} \int_{\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j}} \mathbf{s}(\mathbf{q}) \, dS. \tag{8.10}$$

Voor de berekening van de integralen uit het rechterlid moeten we de fluxen $\mathbf{r}$ en $\mathbf{s}$ over de wand $\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$ evalueren. De eerste stap daartoe is de berekening van de gradiënten ∇u, ∇v en ∇c^2 uit de fluxen $\mathbf{r}$ en $\mathbf{s}$. We illustreren zo'n berekening voor de gradiënt ∇u.
Over de celwand $\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$ definiëren we een verschoven eindig volume $\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$, zie figuur 8.3, met hoekpunten $\mathbf{x} = (x,y)^T$, waarin

$$\mathbf{x}_{i,j\pm\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{x}_{i-\frac{1}{2},j\pm\frac{1}{2}} + \mathbf{x}_{i+\frac{1}{2},j\pm\frac{1}{2}}\right) \text{ en } \mathbf{x}_{i+1,j\pm\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{x}_{i+\frac{1}{2},j\pm\frac{1}{2}} + \mathbf{x}_{i+\frac{3}{2},j\pm\frac{1}{2}}\right).$$



Figuur 8.3: Het verschoven eindige volume $\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$

Over dit eindige volume heerst per definitie een constante toestand overeenkomstig aan de toestand in het centrum van het volume, $\mathbf{q}_{i+\frac{1}{2},j}$. Zodoende geldt

$$\int_{\Omega_{i+\frac{1}{2},j}} \nabla u \, d\Omega = (\nabla u)_{i+\frac{1}{2},j} \, A_{i+\frac{1}{2},j},$$

hierin is $A_{i+\frac{1}{2},j}$ het volume van de cel $\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$. Met behulp van het theorema van Gauss volgt hieruit

$$(\nabla u)_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{A_{i+\frac{1}{2},j}} \oint_{\partial\Omega^*_{i+\frac{1}{2},j}} u\mathbf{n} \, dS, \tag{8.11}$$

waarin $\partial\Omega^*_{i+\frac{1}{2},j}$ de celwand vormt van het eindige volume $\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$. $\mathbf{n}$ is gedefinieerd als de naar buitengerichte eenheidsnormaal over de wand.
We beschouwen de kringintegraal over de wand $\partial\Omega^*_{i+\frac{1}{2},j}$ van $\mathbf{x}_{i+1,j-\frac{1}{2}}$ tot $\mathbf{x}_{i+1,j+\frac{1}{2}}$. Deze lijnintegraal benaderen we als volgt

$$\int_{\mathbf{x}_{i+1,j-\frac{1}{2}}}^{\mathbf{x}_{i+1,j+\frac{1}{2}}} u\mathbf{n} \, dS \approx \|\mathbf{x}_{i+1,j+\frac{1}{2}} - \mathbf{x}_{i+1,j-\frac{1}{2}}\| \, u_m \mathbf{n} = u_{i+1,j} \left(\mathbf{x}^{\perp}_{i+1,j+\frac{1}{2}} - \mathbf{x}^{\perp}_{i+1,j-\frac{1}{2}} \right). \tag{8.12}$$

Hierin is $\mathbf{x}^{\perp}$ gedefinieerd als $\mathbf{x}^{\perp} = (y, -x)^T$ en de index m geeft aan dat we met een toestandsgrootheid op het middelpunt van het lijnstuk te maken hebben. We hebben voor vergelijking (8.12) gebruikt, dat de eenheidsnormaal $\mathbf{n}$ op een recht lijnstuk tussen twee willekeurige punten $\mathbf{x}_1$ en $\mathbf{x}_2$ wordt gegeven als

$$\mathbf{n} = \frac{(y_2 - y_1, -(x_2 - x_1))}{\|(y_2 - y_1, -(x_2 - x_1))\|} = \frac{\mathbf{x}_2^{\perp} - \mathbf{x}_1^{\perp}}{\|\mathbf{x}_2^{\perp} - \mathbf{x}_1^{\perp}\|} = \frac{\mathbf{x}_2^{\perp} - \mathbf{x}_1^{\perp}}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|}.$$

Als we vergelijking (8.12) eveneens toepassen voor de overige delen van de rand $\partial\Omega^*_{i+\frac{1}{2},j}$, dan wordt de kringintegraal uit vergelijking (8.11) bij benadering

$$\begin{aligned} \oint^*_{\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j}} u\mathbf{n} \, dS \;&=\; u_{i+1,j} \left(\mathbf{x}^{\perp}_{i+1,j+\frac{1}{2}} - \mathbf{x}^{\perp}_{i+1,j-\frac{1}{2}} \right) + u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(\mathbf{x}^{\perp}_{i,j+\frac{1}{2}} - \mathbf{x}^{\perp}_{i+1,j+\frac{1}{2}} \right) \\ &+\; u_{i,j} \left(\mathbf{x}^{\perp}_{i,j-\frac{1}{2}} - \mathbf{x}^{\perp}_{i,j+\frac{1}{2}} \right) + u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(\mathbf{x}^{\perp}_{i+1,j-\frac{1}{2}} - \mathbf{x}^{\perp}_{i,j-\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \tag{8.13}$$

De uitdrukkingen u_m voor de lijnstukken $\mathbf{x}_{i+1,j+\frac{1}{2}}$ naar $\mathbf{x}_{i,j+\frac{1}{2}}$ en $\mathbf{x}_{i,j-\frac{1}{2}}$ naar $\mathbf{x}_{i+1,j-\frac{1}{2}}$ zijn gegeven als $u_{i+\frac{1}{2},j\pm\frac{1}{2}}$. Deze snelheidscomponenten zijn gedefineerd via onderstaande centrale uitdrukking

$$u_{i+\frac{1}{2},j\pm\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \left(u_{i,j} + u_{i,j\pm 1} + u_{i+1,j} + u_{i+1,j\pm 1} \right). \tag{8.14}$$

Via de expressies (8.11), (8.13) en (8.14) is de gradiënt ∇u in het celcentrum van het eindige volume $\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$ bepaald. De gradiënt ∇u over de gehele celwand $\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$ volgt, als we stellen dat de toestand op de wand $\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$ constant blijft, ofwel

$$(\nabla u)_{\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j}} = (\nabla u)_{i+\frac{1}{2},j} \, .$$

Op soortgelijke wijze kunnen we ∇v en ∇c^2 op de celwand $\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$ bepalen.
Naast de benadering van de gradiënten ∇u, ∇v en ∇c^2 op de celwand hebben we voor de diffusieve fluxevaluatie van $\mathbf{r}$ en $\mathbf{s}$ over de celwand $\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$ een uitdrukking nodig voor de snelheidscomponenten u en v op deze wand. We benaderen deze snelheden door de centrale expressies

$$\begin{aligned} u_{\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j}} &\approx \frac{1}{4}\left(u_{i,j} + u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + u_{i+1,j} + u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\right), \\ v_{\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j}} &\approx \frac{1}{4}\left(v_{i,j} + v_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + v_{i+1,j} + v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\right). \end{aligned} \tag{8.15}$$

Daarbij stellen we de snelheidscomponenten eveneens constant over de wand. De snelheden $u_{i+\frac{1}{2},j\pm\frac{1}{2}}$ en $v_{i+\frac{1}{2},j\pm\frac{1}{2}}$ volgen uit vergelijking (8.14).
De fluxen $\mathbf{r}$ en $\mathbf{s}$ over de wand $\partial\Omega_{i+\frac{1}{2},j}$ zijn zo volledig bepaald. De integraal uit vergelijking (8.10) kunnen we vervolgens uitrekenen. Op soortgelijke wijze zijn de integralen over de randen $\partial\Omega_{i-\frac{1}{2},j}$ en $\partial\Omega_{i,j\pm\frac{1}{2}}$ af te leiden. Het diffusieve gedeelte uit vergelijking (8.9) is op deze wijze volledig gediscretiseerd. We merken op dat de centrale expressies uit de vergelijkingen (8.14) en (8.15) niet toepasbaar zijn in de eindige volumes aan de randen van ons fysische domein. In de programmatuur is voor dit probleem netjes zorggedragen. Daarbij zijn tevens de laatste restjes van de randvoorwaarden gebruikt. We laten de bespreking van de randvoorwaardenafhandeling in de diffusieve fluxen achterwege. Als laatste vermelden we dat de centrale diffusieve fluxberekening tweede orde nauwkeurig is, zie Koren [16].

De gediscretiseerde versie van de dimensieloze Navier-Stokes vergelijkingen

Zoals in paragraaf 7.10.3 is beschreven, resulteert de discretisatie van de stationaire Euler vergelijkingen op elk eindig volume in het stelsel

$$\mathbf{N}_c\left(\mathbf{q}_{i-1,j}, \mathbf{q}_{i,j-1}, \mathbf{q}_{i,j}, \mathbf{q}_{i+1,j}, \mathbf{q}_{i,j+1}\right) = 0 \quad \forall i,j.$$

Dit is via vergelijking (7.40) gemakkelijk in te zien, als we ons realiseren dat de $\mathbf{q}_L$ en $\mathbf{q}_R$ voor de celwanden zijn geconstrueerd via een eerste orde toestandsinterpolatie. Wegens de overeenkomst tussen de Euler vergelijkingen en het convectieve deel van de NS-vergelijkingen leidt eveneens de discretisatie van het convectieve deel uit deze vergelijkingen tot de functie $\mathbf{N}_c$

$$\mathbf{N}_c\left(\mathbf{q}_{i-1,j}, \mathbf{q}_{i,j-1}, \mathbf{q}_{i,j}, \mathbf{q}_{i+1,j}, \mathbf{q}_{i,j+1}\right) \quad \forall i,j.$$

De discretisatie van het diffusieve deel resulteert op zijn beurt over elk eindig volume tot de functie

$$\mathbf{N}_f\left(\mathbf{q}_{i-1,j}, \mathbf{q}_{i-1,j-1}, \mathbf{q}_{i,j-1}, \mathbf{q}_{i+1,j-1}, \mathbf{q}_{i+1,j}, \mathbf{q}_{i+1,j+1}, \mathbf{q}_{i,j+1}, \mathbf{q}_{i-1,j+1}, \mathbf{q}_{i,j}\right) \quad \forall i,j.$$

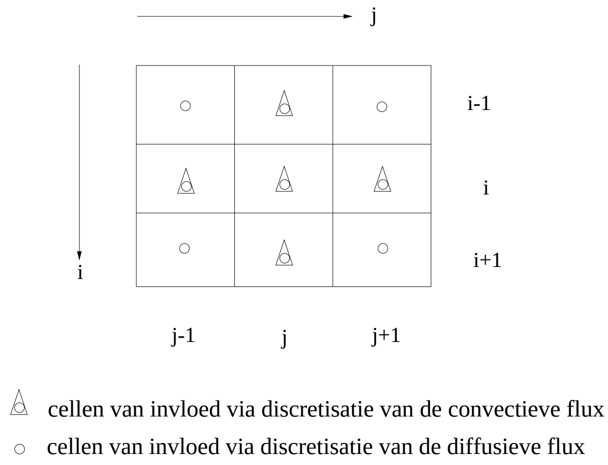
Dit kan worden afgeleid uit paragraaf 8.5.2. De evaluatie van de exacte uitdrukking voor $\mathbf{N}_c$ en $\mathbf{N}_f$ laten we aan de lezer over. In figuur 8.4 staan de punten aangegeven, welke van invloed zijn in de gediscretiseerde NS-vergelijkingen over het eindige volume $\Omega_{i,j}$. Op elk eindig volume $\Omega_{i,j}$ zijn de imensieloze NS-vergelijkingen dus omgevormd tot de gediscretiseerde balansen

$$\mathbf{N}\left(\mathbf{q}_{i-1,j}, \mathbf{q}_{i-1,j-1}, \mathbf{q}_{i,j-1}, \mathbf{q}_{i+1,j-1}, \mathbf{q}_{i+1,j}, \mathbf{q}_{i+1,j+1}, \mathbf{q}_{i,j+1}, \mathbf{q}_{i-1,j+1}, \mathbf{q}_{i,j}\right) = 0 \quad \forall i,j, \tag{8.16}$$

met

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_c + \mathbf{N}_f.$$

De functies $\mathbf{N}_c$ en $\mathbf{N}_f$ zijn daarbij aan de randen iets anders geformuleerd dan in het inwendige van het domein.



Figuur 8.4: Eindige volumes welke via de discretisatie invloed uitoefenen op de toestand in het eindige volume $\Omega_{i,j}$

Uit het stelsel, dat wordt gevormd door alle gediscretiseerde balansen naar model (8.16), kunnen we de toestanden $\mathbf{q}_{i,j}$ in de celcentra van alle eindige volumes van ons fysische domein bepalen. Daartoe zullen we gebruik gaan maken van een iteratieve oplosmethode. In de volgende paragraaf komt deze methode aan de orde. We vermelden daarbij dat de beschrijving van deze iteratieve oplosmethode tot een minimum beperkt zal blijven. We besteden slechts aandacht aan die aspecten, welke in het verloop van ons onderzoek een belangrijke rol hebben gespeeld. Voor de overige gegevens over deze methode verwijzen we ter plaatse naar de benodigde literatuur.

8.5.3 Oplosmethode voor de gediscretiseerde Navier-Stokes vergelijkingen

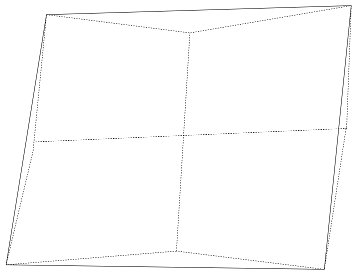
Het oplossen van de balansen uit vergelijking (8.16) gebeurt met een multiroostermethode. De multiroostermethode berust op een belangrijke eigenschap van klassieke iteratieve oplosmethoden. Klassieke iteratieve methoden hebben de neiging na enkele iteraties het merendeel van de fouten in de benaderde oplossing te hebben gladgestreken. Zo'n iteratieve methode heeft echter moeite met het wegwerken van laag frequente fouten. Het betreft fluctuaties, welke optreden over afstanden met een orde van enkele maaswijdten. Het basisidee achter de multiroostermethode is nu om juist op het moment dat de iteratieve methode het gros van de fouten heeft weggewerkt over te stappen naar een grover rooster. Op dit grovere rooster kunnen vervolgens de fluctuaties met de lagere frequenties worden weggewerkt. Hun golflengte correspondeert op het grovere rooster immers beter met de aanwezige maaswijdte. De gebruikte klassieke iteratieve methode in een multiroostermethode duiden we aan als de smoother.

Voor de implementatie van de multiroostermethode werken we met een hiërachie van rekenroosters G^i, met

$$G^i, \quad i = 1, ..., I, \text{ waarbij } G^1 \subset G^2 \subset ... \subset G^I.$$

Een rooster G^i ontstaat uit een fijner rooster G^{i+1} door een set van 2x2 eindige volumes tot één cel samen te nemen, zie figuur 8.5. Op het rooster G^I willen we uiteindelijk de gediscretiseerde NS-vergelijkingen oplossen.

Een multiroostermethode is een iteratieve oplosmethode welke grofweg uit twee stadia bestaat. Het eerste stadium is de nested iteration, ook wel full multigrid genoemd. In dit stadium zoeken we een initiële oplossing voor het iteratieproces op het fijnste rooster (hoogste level). Het tweede stadium is de non-linear multigrid fase, ook wel full approximation scheme genoemd. In dit stadium zoeken we een verbeterde oplossing op het fijnste rooster. Het resultaat van de nested iteration vormt daarbij de initiële oplossing voor deze fase. Voor een beschrijving van beide stadia verwijzen we naar standaardwerken op het gebied van multiroostermethoden Wesseling [31] en Hackbusch [11]. Kortweg komt het op het volgende neer.



Figuur 8.5: Eindige volumes op een rooster met corresponderend eindig volume op het voorafgaande grovere rooster.

Nested iteration (Full MultiGrid) :

We starten op het grofste rooster (laagste level). Om een initiële oplossing op een fijner rooster G^{i+1} te verkrijgen, verbeteren we eerst de oplossing op het voorafgaande grovere rooster G^i. We realiseren dit door een aantal Non Linear Multigrid stappen, of ook wel FAS-slagen, toe te passen. De werking van een Non Linear Multigrid stap staat onder de volgende kop beschreven. Op het grovere rooster discretiseren we dus de NS-vergelijkingen, waarna we deze oplossen alsof we ons reeds op het fijnste rooster bevinden. Vervolgens interpoleren we de gevonden oplossing naar het fijnere rooster. Op dit fijnere rooster herhalen we de besproken stappen. Opnieuw lossen we via een aantal FAS-slagen gedeeltelijk de NS-vergelijkingen over dit rooster op. De geprolongeerde oplossing van het grovere rooster doet daarbij dienst als initiële oplossing. Het proces van oplossen, prolongeren ect. herhalen we totdat we op het hoogste level zijn aangeland.

Non Linear Multigrid (Full Approximation Scheme) :

We beschrijven één Non-Linear Multigrid stap, of ook wel FAS-slag. Zowel de Non Linear Multigrid fase als de Nested Iteration zijn uit zulke FAS slagen opgebouwd.

1. Op het fijnste rooster G^I verbeteren we de laatst verkregen benadering voor de oplossing $\mathbf{q}_{G^I}$ uit vergelijking (8.16) door p pre-relaxaties uit te voeren. In paragraaf 8.5.4 staat beschreven wat een relaxatie inhoudt.

2. Vervolgens passen we op het onderliggende grovere rooster een Coarse Grid Correction toe. De theorie achter de Coarse Grid Correction laten we hier achterwege, zie Wesseling [31] en Hackbusch [11]. De naam spreekt voldoende tot de verbeelding.

3. Na de Coarse Grid Correction verkrijgen we op rooster G^I een gecorrigeerde benadering voor de oplossing $\mathbf{q}_{G^I}$. Deze gecorrigeerde oplossing vormt de initiële oplossing voor q post-relaxaties.

We herhalen deze Non Linear Multigrid stap, totdat de fout welke met de benadering voor de oplossing op het rooster G^I in vergelijking (8.16) wordt gemaakt voldoende klein is.

Voor de beschrijving van de relaxatie moeten we terug naar de klassieke iteratieve methoden. Eén relaxatie betreft één iteratieslag uit een klassieke iteratieve methode. In het geval van de p pre-relaxaties passen we p iteratieslagen van een klassieke iteratieve methode toe. Voor de q post-relaxaties betreft het q iteratieslagen van eventueel een andere klassieke iteratieve methode. Wij maken gebruik van collectieve, punt, symmetrische Gauss-Seidel relaxatie. Deze relaxatie methode passen we zowel in de pre- als post-relaxatie toe. In de volgende paragraaf staat de werking van deze relaxatiemethode beschreven.

8.5.4 Collectieve punt symmetrische Gauss-Seidel relaxatie

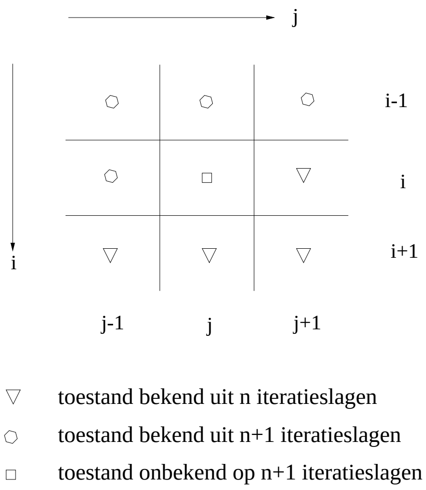
Op een gegeven rooster G^i geldt op elk eindig volume de gediscretiseerde balans

$$\mathbf{N}\left(\mathbf{q}_{i-1,j}, \mathbf{q}_{i-1,j-1}, \mathbf{q}_{i,j-1}, \mathbf{q}_{i+1,j-1}, \mathbf{q}_{i+1,j}, \mathbf{q}_{i+1,j+1}, \mathbf{q}_{i,j+1}, \mathbf{q}_{i-1,j+1}, \mathbf{q}_{i,j}\right) = 0 \quad \text{met} \quad N \in R^4.$$

We bevinden ons op het eindige volume $\Omega_{i,j}$ en we zijn op zoek naar de oplossing $\mathbf{q}_{i,j}$ in dat eindige volume. We hebben reeds n iteratieslagen gemaakt om de oplossing $\mathbf{q}_{i,j} \quad \forall i,j$ op het fysische domein te vinden. De oplossing $\mathbf{q}_{i,j}$ na n iteratieslagen wordt aangeduid als $\mathbf{q}_{i,j}^{(n)}$. We voeren nogmaals een iteratieslag, een relaxatie, uit. We passen collectieve punt symmetrische Gauss-Seidel relaxatie toe.
Over het fysische domein, Ω, is na n relaxatieslagen de oplossing $\mathbf{q}_{i,j}^{(n)}$ in alle eindige volumes $(\forall i,j)$ bekend. We bevinden ons in een willekeurig eindig volume $\Omega_{i,j}$. De toestanden op de overige volumes zetten we vast (punt relaxatie). We passen de toestand $\mathbf{q}_{i,j}^{(n)}$ in het celcentrum van het eindige volume aan in de hoop naar een oplossing voor het stelsel (8.16) te convergeren. De nieuwe toestand $\mathbf{q}_{i,j}^{(n+1)}$ bepalen we via de balans (8.16), welke met de huidige toestanden over het fysische domein is gegeven als

$$\mathbf{N}\left(\mathbf{q}_{i,j}^{(n+1)}, \underbrace{\mathbf{q}_{i-1,j-1}^{(n+1)}, \mathbf{q}_{i-1,j}^{(n+1)}, \mathbf{q}_{i-1,j+1}^{(n+1)}, \mathbf{q}_{i,j-1}^{(n+1)}, \mathbf{q}_{i,j+1}^{(n)}, \mathbf{q}_{i+1,j-1}^{(n)}, \mathbf{q}_{i+1,j}^{(n)}, \mathbf{q}_{i+1,j+1}^{(n)}}_{\text{vast dankzij puntrelaxatie}}\right) = 0. \tag{8.17}$$

Daarbij is aangenomen dat de cellen $\Omega_{i-1,j-1}$, $\Omega_{i-1,j}$, $\Omega_{i-1,j+1}$ en $\Omega_{i,j-1}$ reeds op dezelfde wijze onderhanden zijn genomen. De toestanden in hun celcentra na (n+1) iteraties wordt al in de update voor de toestand $\mathbf{q}_{i,j}$ gebruikt (Gauss-Seidel relaxatie). De volgorde, waarin de eindige volumes in de iteratie (n+1) worden geupgrade, is afhankelijk van de richting waarin het rooster wordt doorlopen. We nemen hier aan dat upgraden gebeurt van lage i naar hoge i en van lage j naar hoge j, zie figuur 8.6.



Figuur 8.6: Gauss-Seidel puntrelaxatie

Voor het oplossen van de toestand $\mathbf{q}_{i,j}^{(n+1)}$ uit vergelijking (8.17) passen we een Newton linearisatie methode toe. Een benadering van de oplossing $\mathbf{q}_{i,j}^{(n+1)}$ uit vergelijking (8.17) volgt dan uit het onderstaande iteratieproces

$$\mathbf{q}_{i,j_{(0)}}^{(n+1)} = \mathbf{q}_{i,j}^{(n)},$$

$$\mathbf{N}\left(\mathbf{q}_{i,j_{(k)}}^{(n+1)}, \mathbf{q}_{i-1,j-1}^{(n+1)}, \,..\,, \mathbf{q}_{i+1,j+1}^{(n)}\right) + \left.\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{q}_{i,j}}\right|_{\left(\mathbf{q}_{i,j_{(k)}}^{(n+1)}, \mathbf{q}_{i-1,j-1}^{(n+1)}, \,..\,, \mathbf{q}_{i+1,j+1}^{(n)}\right)} \left(\mathbf{q}_{i,j_{(k+1)}}^{(n+1)} - \mathbf{q}_{i,j_{(k)}}^{(n+1)}\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left.\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{q}_{i,j}}\right|_{\left(\mathbf{q}_{i,j_{(k)}}^{(n+1)}, \mathbf{q}_{i-1,j-1}^{(n+1)}, \,..\,, \mathbf{q}_{i+1,j+1}^{(n)}\right)} \mathbf{q}_{i,j_{(k+1)}}^{(n+1)} =$$

$$-\mathbf{N}\left(\mathbf{q}_{i,j_{(k)}}^{(n+1)}, \mathbf{q}_{i-1,j-1}^{(n+1)}, \,..\,, \mathbf{q}_{i+1,j+1}^{(n)}\right) + \left.\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{q}_{i,j}}\right|_{\left(\mathbf{q}_{i,j_{(k)}}^{(n+1)}, \mathbf{q}_{i-1,j-1}^{(n+1)}, \,..\,, \mathbf{q}_{i+1,j+1}^{(n)}\right)} \mathbf{q}_{i,j_{(k)}}^{(n+1)}.$$

Deze laatste vergelijking vormt een lineair stelsel, waaruit na Gauss eliminatie met pivoting de toestand $\mathbf{q}_{i,j_{(k+1)}}^{(n+1)}$ kan worden gevonden. De matrix $\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{q}_{i,j}} \left(\left(\mathbf{q}_{i,j_{(k)}}^{(n+1)}, \mathbf{q}_{i-1,j-1}^{(n+1)}, \; .. \;, \mathbf{q}_{i+1,j+1}^{(n)} \right) \right)$ moet wel voldoende goed geconditioneerd zijn. Zo nodig wordt een goede conditie verzorgd met de in Koren [18] aangegeven preconditionering techniek.

In het geval van een multiroostermethode leggen we veelal een maximum aantal iteratieslagen in het Newton proces vast, waarin een benadering van de toestand $\mathbf{q}_{i,j}^{(n+1)}$ mag worden gevonden. Daarnaast itereren we net zo vaak als nodig is om het residu, welke is gedefinieerd als

$$\mathbf{r}_{\text{newton}} = \max_{i=1} \left| N_i \left(\mathbf{q}_{i,j_{(k)}}^{(n+1)}, \mathbf{q}_{i-1,j-1}^{(n+1)}, \; .. \;, \mathbf{q}_{i+1,j+1}^{(n)} \right) \right|,$$

kleiner dan een voorgeschreven ϵ te krijgen. De beschreven Newton linearisatie methode convergeert kwadratisch naar de oplossing $\mathbf{q}_{i,j}^{(n+1)}$, tenminste indien het proces convergeert.

Na het bepalen van $\mathbf{q}_{i,j}^{(n+1)}$, een benadering althans, stappen we naar het volgende eindige volume in het rooster. Op dit eindige volume berekenen we eveneens de toestand na $(n+1)$-iteraties. Op deze wijze doorlopen we het gehele fysische domein.

Rest ons de betekenis uit te leggen van het bijvoegelijke naamwoord symmetrisch uit de relaxatieaanduiding, collectieve punt symmetrisch Gauss-Seidel relaxatie. Met het woord symmetrisch geven we aan dat indien voor één relaxatie het rooster op een gegeven wijze is doorlopen. In dit geval van lage i naar hoge i en van lage j naar hoge j, nogmaals deze weg in omgekeerde richting wordt afgelegd.

Met de bespreking van de relaxatiemethode weten we afdoende om straks de problemen en oplossingen te begrijpen, welke zijn gerezen bij de toepassing van de besproken multiroostermethode. We verwijzen naar paragraaf 9.2.

Hoofdstuk 9

Twee codes voor het oplossen van de Navier-Stokes vergelijkingen, een research- en een commerciële code

9.1 Inleiding

De wijze, waarop we de NS-vergelijkingen numeriek kunnen oplossen, lopen wijd uiteen. En dan doelen we niet alleen op het aantal verschillende mogelijkheden voor de toegepaste numerieke methodes. Voor het oplossen van de NS-vergelijkingen kunnen we ons wenden tot zowel researchcodes als commerciële CFD-pakketten. Tijdens het afstuderen hebben we van beide mogelijkheden gebruik gemaakt.
Bij Akzo Nobel heeft men een commercieel CFD-pakket ter beschikking. Het betreft CFX4 van AEA Technology uit Harwell. Steeds vaker maken ingenieurs in de industriële praktijk gebruik van zulke commerciële pakketten. Veelal is het afdoende aan het pakket het fysische probleem te overleggen en de geometrie van het probleem voor te schrijven. De gebruiker hoeft zich niet of nauwelijks te bekommeren om de wijze, waarop het probleem wordt opgelost. De interactie in de numerieke oplosmethode blijft veelal beperkt tot de instelling van enkele parameters. Een commercieel pakket biedt daarnaast uitgebreide mogelijkheden voor indrukwekkende visualisaties van de resultaten. Een fraaie graphic userinterface vormt het uitgangspunt voor de numerieke berekeningen van de gebruiker.
We werken met de commerciële code, CFX4. CFX4 is geschikt voor uiteenlopende CFD-problemen. De code is onder andere ontworpen voor berekeningen op het gebied van straling, meerfase stromingen, subsone, transone of supersone stromingen, maar ook bevat het pakket de mogelijkheid turbulentie modellen toe te passen. De achterliggende code en numerieke methoden van de CFX-solver beschouwen we als een black-box. De CFX-executable draait op een IBM SP2 op het SARA in Amsterdam.
Als researchcode hebben we gebruik gemaakt van een code, welke is ontwikkeld op het CWI door Koren. De code is speciaal gericht op het oplossen van stationaire Euler- en NS-vergelijkingen. Een uitbreiding naar een instationaire vorm is een toekomstmogelijkheid. In de code zitten de numerieke methoden verwerkt, welke we in de hoofdstukken 6, 7 en 8 hebben besproken. Het Osher schema, de centrale verwerking van de diffusieve fluxen en de multiroostermethoden staan aan de basis van de code. De Fortran code stond volledig tot onze beschikking. Interactie in de programmatuur was direct uitvoerbaar, zodat de code speciaal op onze specifieke blazerprobleem kon worden toegespitst.
Beide codes hebben we toegepast op ons blazerprobleem. De blazergeometrie is gedefinieerd in hoofdstuk 2.3. De aannames omtrent de stroming zijn gemaakt in paragraaf 3.4. We moeten de NS-vergelijkingen oplossen. De verschillen in aanpak, werkbaarheid en mogelijkheden tussen de twee codes zullen we duidelijk maken aan de hand van de beschrijving van de draaiprocessen van beide.

9.2 Het draaiproces van de researchcode op het CWI

We beschrijven het proces, dat we hebben doorlopen om met de code van Koren op het CWI de NS-vergelijkingen over onze blazergeometrie met verbreding op te kunnen lossen. De NS-vergelijkingen zijn in de code opgenomen. De randvoorwaarden uit hoofdstuk 5 en paragraaf 8.3 zijn in de code verwerkt. De geometrie uit paragraaf 5.3 ligt aan de basis. Daarnaast zijn het besproken Osher schema, de centrale discretisatie van de diffusieve fluxen en de besproken multiroostermethode in de code verwerkt om de vergelijkingen te discretiseren en het resulterende stelsel op te lossen. De illusie dat met een juiste implementatie van het geheel zonder problemen op een numerieke oplossing wordt afgestevend is gauw doorbroken. We besteden aandacht aan de problemen, die op onze weg zijn opgedoken en aan de manieren, waarop we deze problemen hebben aangepakt. Tijdens de bespreking zullen we de sterke en zwakke kanten van de researchcode belichten.
In tegenstelling tot het commerciële CFD-pakket, CFX, beschikt de CWI-code niet over een fraaie userinterface. Het programma telt ruim 6600 regels Fortrancode. Om enig inzicht te krijgen in de code hebben we ons eerst verdiept in de gebruikte datastructuren voor de opslag van de oplossingen en tussenresultaten en de functies van de verschillende subroutines. Op welke wijze zijn de vergelijkingen en numerieke methoden in de code geïmplementeerd?

9.2.1 Test I: De 2D stationaire Euler vergelijkingen over een rechte blazergeometrie

Ons draaiproces starten we vervolgens met de berekening van een 2D stationaire Euler stroming over een rechte blazergeometrie. Met dit eenvoudige probleem zijn we in staat de discretisatie methode van Osher te testen. We kunnen bovendien al antwoord vinden op de vraag of rond de luchtinlaat schokken optreden. Indien we schokken waarnemen, kunnen we tevens direct aanschouwen in hoeverre numerieke diffusie een rol speelt in het door ons gekozen numerieke schema. Daarnaast vormt deze test een controle middel voor de juiste implementatie van zowel het numerieke schema, als de multiroostermethode.
Over het rechte kanaal moeten we als eerste een rooster genereren. Alhoewel we de multiroostermethode als een iteratieve methode met de nodige voordelen hebben getipt, lopen we hier tegen het eerste nadeel aan. Tijdens de roostergeneratie moeten we rekening houden met de vereiste roosteraantallen op basis van het gestelde aantal levels en de regel voor roostervorming uit paragraaf 8.5.3. Op het fijnste rooster, level $= n$ moeten zowel in de x- als y-richting een veelvoud van $2^{(n-1)}$ cellen worden geplaatst. Het roosteraantal is implementatie afhankelijk. Tevens moeten we in de roostergeneratie rekening houden met het feit dat in de multiroostermethode op elk rooster ons stromingsprobleem wordt opgelost. De instroom van lucht via de luchtinlaat hebben we gemodelleerd als een randvoorwaarde. Om op elk rooster inspuiting waar te nemen, moeten we bogen dat op alle roosters, dus tot het grofste rooster aan toe, minstens 1 of meer cellen van het begin tot het einde van de luchtinlaat lopen. Wij besluiten met 4 levels te werken, waarbij op het fijnste rooster 80 cellen in de x-richting en 16 cellen in de y-richting zijn geplaatst. In de x-richting passen we een stretchalgoritme toe. De stretching is zodanig ingesteld, dat de cellen zich rondom de luchtinlaat concentreren. In de y-richting nemen we het rooster equidistant. Het rooster op het hoogste level staat afgebeeld in bijlage H.
Als we de code vervolgens laten draaien, lopen we tegen convergentieproblemen aan. Het Newton proces uit de multiroostermethode blijkt in het lage Machgebied langs de vaste wand direct onder de luchtinlaat niet te convergeren. De divergentie van het Newton proces in regionen met een laag Machgetal is voor de Euler vergelijkingen een bekend probleem. In deze regionen is de afgeleide matrix uit het Newton iteratieproces slecht geconditioneerd. Om alsnog een goede conditie te realiseren passen we de voorgestelde preconditionering uit Koren [18] toe. Daarnaast besluiten we in de FMG-fase op elk level volledig uit te convergeren, voordat we de oplossing naar een hoger level prolongeren. Op deze wijze worden reeds in de FMG-fase een groot deel van de laagfrequente fouten weggewerkt. We starten de full approximation fase met een initiële oplossing welke reeds enigszins op de daadwerkelijke oplossing aansluit.
Na deze toevoegingen blijken we zonder problemen over het huidige rooster het Euler probleem te kunnen draaien. De Euler resultaten hebben we niet opgenomen. Bij Akzo Nobel gaat de interesse uit naar de oplossing van de NS-vergelijkingen. We vermelden wel dat rondom de luchtinlaat geen schokken

zijn waargenomen. De stroming blijft in het gehele trekkanaal subsoon. Dit is in overeenstemming met de metingen van Persoon.

9.2.2 Test II: De 2D stationaire Navier-Stokes vergelijkingen over een rechte blazergeometrie

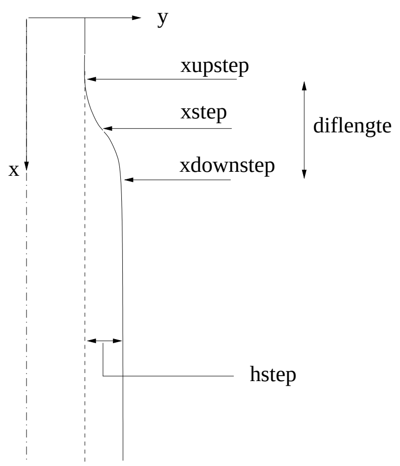
Het tweede testprobleem voor de code betreft de berekening van de luchtstroming met behulp van de NS-vergelijkingen over een rechte blazergeometrie. De testberekeningen voeren we uit met een Reynoldsgetal, Re $= 2.4 \cdot 10^4$. Het rooster uit ons Euler probleem over de rechte blazergeometrie kunnen we handhaven. Bij het draaien van de code besluiten we de toevoegingen uit de vorige paragraaf in gebruik te houden. Met name de preconditionering verdient daarbij de aandacht. De door Koren voorgestelde preconditionering is toegespitst en getest voor de Euler vergelijkingen. Voor de NS-vergelijkingen is de preconditionering nog niet eerder gebruikt. Zonder de preconditionering lopen we echter tegen convergentieproblemen op. De preconditionering blijkt dus eveneens zeer geschikt te zijn voor de NS-vergelijkingen over gebieden met lage Machgetallen. De resultaten voor de rechte blazergeometrie worden besproken in hoofdstuk 10. We merken wel alvast op dat aan de draadinlaat deels terugstroming optreedt. Onze randvoorwaardenafhandeling aan de draadinlaat staat deze terugstroming niet in de weg. De preconditionering en de randvoorwaardenafhandeling aan de draadinlaat blijken in al onze verdere berekeningen aan de luchtstroming in de blazergeometrie van essentieel belang.

9.2.3 Test III: De 2D stationaire Navier-Stokes vergelijkingen over een blazergeometrie met een backward facing step

De laatste stap in het testproces voor toepassing van de CWI-code op het blazerprobleem betreft onderzoek naar de luchtstroming in een blazer, waarin op een aangegeven hoogte $x = x_{\text{step}}$ een stapsgewijze overgang naar een breder trekkanaal is opgenomen. We willen de NS-vergelijkingen, Re $= 2.4 \cdot 10^4$, oplossen over het fysisch domein, welke we in paragraaf 5.3 hebben gedefinieerd.
Het eerste probleem waar we tegen aanlopen, is de generatie van een rooster over deze geometrie. Over de geometrie moet een single-block rooster worden gelegd. De CWI-code kan met multi-block worden uitgebreid, maar vooralsnog werken we met een single-block versie. Voor de roostergeneratie maken we gebruik van Sepmesh van Sepra. Opnieuw passen we een gestretched rooster in de x-richting toe, waarbij we de cellen rond de luchtinlaat en de step concentreren. Het rooster staat afgebeeld in bijlage H.
De roostergeneratie heeft de nodige voeten in de aarde gehad. De roosterlijnen rondom de step zijn glad afgebogen. Deze gladde afhandeling van de roosterlijnen is te danken aan een smoother welke in Sepmesh is verwerkt. De smoother vereist cellen, welke in de x- en y-richting ongeveer van dezelfde afmetingen zijn. Het gebruik van de multiroostermethode vereist daarentegen, dat indien we op het grofste rooster de step willen waarnemen minstens 1 cel op dit rooster over de step moet zijn gelegd. Indien we een redelijk aantal cellen over de blazergeometrie willen plaatsen, blijken beide eisen in conflict met elkaar. Uiteindelijk verkrijgen we een fraai glad rooster op een level 5 rooster met 448 bij 32 celllen. Daarbij is de concessie gemaakt, dat slechts op de twee hoogste levels een stapsgewijze overgang wordt waargenomen. Op de overige levels nemen we deze step als een gladde overgang waar.
Als we dan de code gaan draaien, blijken opnieuw convergentieproblemen in het Newton proces, zij het nu rondom de verbreding, op te treden. We vermoeden dat de oplossing in het stationaire geval rondom de verbreding niet uniek is. We staken de zoektocht naar een numerieke oplossing van de NS-vergelijkingen op de huidige geometrie en besluiten op een andere wijze een verbreding in de blazergeometrie te realiseren.

9.2.4 Test IV: De 2D stationaire Navier-Stokes vergelijkingen over een blazergeometrie met diffusor.

Voor de rechte blazergeometrie zijn we in staat de NS-vergelijkingen numeriek op te lossen. Om zoveel mogelijk op de rechte geometrie aan te sluiten passen we kanaalverbreding toe door in het trekkanaal een diffusor te plaatsen. De blazergeometrie met diffusor staat geschetst in figuur 9.1.



Figuur 9.1: Situatieschets voor een blazergeometrie met diffusor

Xupstep geeft de x-coördinaat van de start van de diffusor aan. Xdownstep geeft de x-coördinaat aan van het punt, waarop de diffusor de verbreding in het trekkanaal heeft gerealiseerd. De afstand tussen xupstep en xdownstep duiden we aan als diflengte. Xstep bevindt zich halverwege de diffusor tussen xupstep en xdownstep. Hstep geeft de breedte van de door de diffusor gerealiseerde verbreding aan. De diffusorvorm bestaat uit een glad sinusvormig profiel. Voor onze testcase beschouwen we een blazergeometrie met xstep=167, hstep=0.5 en diflengte=152. Voor het Reynoldsgetal nemen we $\mathrm{Re} = 2.4 \cdot 10^4$.
Voorlopig leggen we in de x-richting hetzelfde gestretched rooster op, welke we in de rechte blazergeometrie hebben gekozen. De roosterverdeling in de y-richting blijft equidistant. Tenminste, we plaatsen de 16 cellen in deze richting equidistant over de volledige breedte van het trekkanaal, breedte(x) ter plaatse. Het rooster staat gegeven in bijlage H. In de toekomst is het misschien gewenst een fraaier rooster te maken. Vooralsnog nemen we genoegen met het rooster uit de bijlage H. Als we de code vervolgens over dit rooster laten draaien, convergeren we zonder problemen uit naar een oplossing.

We zijn nu met de CWI-code in staat verschillende blazergeometrieën door te rekenen. De diffusor blazergeometrie kan daarin op verschillende wijzen worden gevarieerd. Eveneens behoren variaties in het stromingsprobleem zelf via bijvoorbeeld de randvoorwaarden of het Reynoldsgetal tot de mogelijkheden. In hoofdstuk 10 hebben we enkele testsets met de code uitgevoerd. Ter plaatse is de numerieke oplossing met behulp van Matlab gevisualiseerd. De format van de uitvoer van de CWI-code bestaat uit een file, waarin voor alle celcentra de toestand (u, v, c, z) is afgedrukt. De roostergeneratie voor de geteste geometrieën verloopt geheel analoog aan de besproken roostergeneraties in dit hoofdstuk van respectievelijk de rechte of diffusor blazergeometrie. We werken met level 4 roosters van 80 bij 16 cellen. De CWI-code is geschikt voor berekeningen aan de spleetblazer. Daarbij staat de CWI-code open voor veel uitbreidingen, zoals multi-block, tweede orde nauwkeurig upwindschema, instationaire of turbulente berekeningen. De bouwdoos is nog lang niet uitgeput.

9.2.5 Rekentijden

In ons werk hebben rekentijden nooit een issue gevormd. Voor Akzo Nobel telde slechts het resultaat van de berekening. Ter indicatie vermelden we dat voor het oplossen van de NS-vergelijkingen over de beschreven diffusorgeometrie met 80 bij 16 cellen ongeveer 3.5 uur is gemoeid. De berekeningen zijn uitgevoerd op een SGI-indy workstation met een 100 mHz IP22 processor.

9.3 Het draaiproces van de commerciële code, CFX4

9.3.1 De opbouw van CFX4

Het commerciële CFD-pakket bestaat uit drie hoofdmodules. Het betreft

- CFX4 Build
  CFX4 Build vormt een apart onderdeel uit CFX4 voor de definitie van het fysische domein en de generatie van een rooster over dit domein. CFX Build is gebaseerd op MSC/Partran.

- CFX4 Flow solver
  In dit deel lost CFX het stromingsprobleem op. De gebruiker moet een invoerfile opstellen, waarin de solver bekend wordt gemaakt met het fysische probleem over de gedefinieerde geometrie, de randvoorwaarden, de stromingsparameters en eventueel met enkele numerieke parameters voor de numerieke oplosmethode welke voor het probleem wordt toegepast.

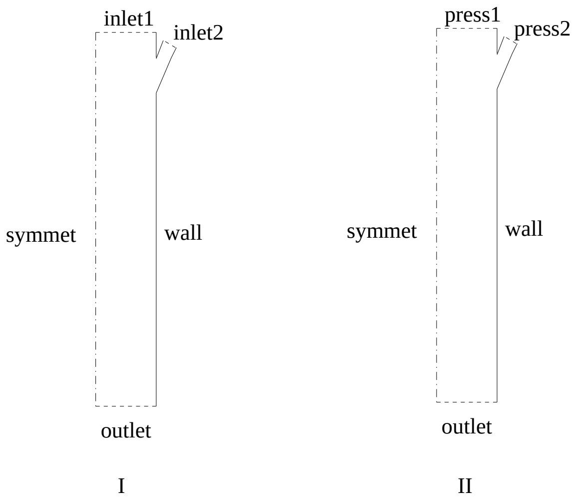
- CFX Visualise
  Dit aparte programma bestaat uit een ruim assortiment graphics tools gebaseerd op het visualisatie systeem AVS, Advanced Visual Systems inc. Met de module kunnen nagenoeg alle aspecten van de stroming zichtbaar worden gemaakt.

CFX zorgt zelf voor een geschikte uitvoer van de resultaten uit de ene module naar de andere.

9.3.2 Het draaiproces van CFX

CFX Build

Met CFX Build moeten we in staat zijn de meest moeilijke geometrie te representeren en van een rooster te voorzien. Het programma biedt de mogelijkheid CAD-geometrieën met de beschrijving van het fysisch domein in te voeren. De meshgenerator biedt de mogelijkheid om in de gedefinieerde geometrie een multi-block rooster op te bouwen. De roosters in de verschillende blokken zijn gestructureerd. Helaas is de code niet uitgerust met een routine om uit een ASCII-file een bestaand rooster in te lezen. Uit tijdsoverwegingen en uit praktisch oogpunt i.v.m. een vergelijking tussen CFX- en CWI-resultaten zou dat handig zijn geweest. Een ander nadeel aan de meshgenerator is het ontbreken van een handleiding. Informatie over functies in het Buildpakket worden alleen online in het pakket gegeven. Een naslagwerk is ons vooralsnog niet bekend.
CFX Build bestaat uit een volledig muisgeöriënteerde grafische interface. De gebruiker start met de definitie van het fysisch domein. Als testversie voor het pakket passen we eerst onze simpele blazergeometrie van een recht kanaal toe. We kunnen direct de luchtinlaat in de geometrie meenemen. Zoals we reeds in paragraaf 5.3.3 hebben geschreven, lijkt dat gunstiger met het oog op de randvoorwaardenafhandeling ter plaatse. We definiëren de hoekpunten, ribben, begrenzende oppervlakten en volumes. Hoewel een 2D blazergeometrie voldoende is, moeten we toch een 3D versie van ons 2D probleem invoeren. Elke toevoeging aan de geometrie, punten, lijnen etc., worden direct zichtbaar in een window, waarin het volledige beeld van de geometrie staat afgebeeld. De grafische userinterface biedt de mogelijkheid de geometrie uit allerlei perspectieven te bekijken, uit te vergroten etc. De mogelijkheden zijn na wat gepuzzel enorm. Deze opmerking is kenmerkend voor het gehele Buildpakket.
Na de definitie van de geometrie en de blokken moeten we voor de randen van ons domein het type vastleggen. De exacte definitie van de randvoorwaarden is uitbesteed aan de solver. De keuzemogelijkheden voor de randtypering zijn: inlet, specificatie van een inlaatrand, outlet, specificatie van een uitstroomrand, symmet, specificatie van een symmetrierand, wall, specificatie van een vaste wand en press, specificatie van een rand waarlangs de druk is bepaald. Voor een inlet vinden we in de handleiding van de solver terug, dat we ter plaatse in ieder geval de snelheidscomponenten moeten voorschrijven, eveneens wordt de mogelijkheid geboden om naast het debiet een thermodynamische variabele druk of temperatuur voor te schrijven. De keuze voor de randtypen baseren we op de redenering achter de randtypering in paragraaf 5.2.2 voor de Euler vergelijkingen. We hebben het karakter en het aantal randvoorwaarden gerespecteerd. In dat geval verkrijgen de randen de typering volgens figuur 9.2.



Figuur 9.2: Twee mogelijkheden voor de randtypering

Op basis van de eerder besproken argumenten uit paragraaf 5.3.2 is het ongunstig om aan de bovenrand van de blazer een debiet of snelheid voor te schrijven. Bij Akzo Nobel wordt ook met CFX aan het blazerprobleem gerekend. Het moet mogelijk zijn alleen druk en temperatuur voor te schrijven. Dat lijkt gunstig, we vermoeden dat met een geometrie uit figuur 9.2 is gewerkt. Beide randtyperingen zullen we uittesten. Zoals later zal blijken, zijn voor de afhandeling van de randen bij Akzo Nobel extra subroutines gebruikt. Deze routines zijn niet in de standaardversie aanwezig.
We hebben de aangegeven blokken over de geometrie gedefinieerd en we moeten vervolgens over de blokken een rooster vastleggen. CFX zou problemen hebben met slanke cellen. De celgroottes in de x- en y-richting zouden min of meer gelijk moeten zijn. We leggen deze opmerking terzijde en we besluiten een gestretched rooster in de lengte richting van het kanaal op te zetten. CFX Build biedt deze mogelijkheden. In de breedte kiezen we het rooster equidistant. In de z-richting leggen we één cel op. Mochten de slanke cellen in de solver inderdaad problemen geven dan komen we die vanzelf tegen. Ons rooster rondom de luchtinlaat staat weergegeven in bijlage G. De stretching in de x-richting is in de rest van het trekkanaal en de draadinlaat voortgezet.
Voor een ingewikkelde geometrie is CFX Build waarschijnlijk zeer geschikt, maar voor onze simpele geometrie maken de uitgebreide mogelijkheden de roostergeneratie onnodig omslachtig en onoverzichtelijk. Het ontbreken van een goede handleiding draagt evenmin bij aan het nodige inzicht. De online helpfunctie is goed, maar deze wijze van informatie voorziening is naar mijn mening niet praktisch. Daarnaast is met de generatie van ons simpele rooster maar liefst 80 Mb geheugen gemoeid. De visualisatie mogelijkheden, terwijl je werkt, vreten geheugen. Op een voldoende grote machine levert dit echter geen problemen. Als laatste ondervinden we bij de roostergeneratie de nodige hinder doordat CFX Build moeite heeft met de grote afmetingsverschillen in de lengte en breedte van de blazer.

De CFX solver

Over het gedefinieerde domein en op het gegenereerde rooster willen we de stroming berekenen. In de solver zitten allerlei stromingsmodellen verwerkt. Daarnaast zijn eveneens veel discretisatie en oplosmethode verwerkt. Voor de verschillende stromingsmodellen staan veelal default numerieke methoden vast. De gebruiker kan echter voor een andere aanpak kiezen. Wij besluiten zoveel mogelijk de defaultinstellingen van CFX te respecteren. We zijn immers op zoek naar een antwoord op de vraag in hoeverre CFX als een blackbox bruikbaar is.
Om de solver te gebruiken moeten we een inputfile opzetten. In de inputfile moet worden gedefinieerd met wat voor een type stromingsprobleem we te maken hebben. Betreft het een laminaire of turbulente stroming, is de stroming compressibel of incompressibel enz. Daarnaast moeten we fysische parameters, zoals het molekulair gewicht, de dynamische viscositeit, thermische conductiviteit enz. vastleggen. Na

deze definities liggen voor de stroming de stromingsvergelijkingen vast.
Met de solver van CFX willen we over onze blazergeometrie de instationaire 2D Navier Stokes vergelijkingen oplossen. In de invoerfile, welke in bijlage G staat gegeven, geven we dit aan met de keywords transient flow, compressible flow en heat transfer. De trefwoorden viskeus en laminair hoeven we niet te vermelden. Zij vormen de default uitgangspunten in CFX modelvorming. In tegenstelling tot de stationaire NS-vergelijkingen, welke zijn opgelost met de CWI-code, maken we hier gebruik van de instationaire variant. Deze uitbreiding hebben we toegepast in de hoop straks misschien de ingewikkeldere geometrie met backward facing step te kunnen doorrekenen. Aan de NS-vergelijkingen wordt als default de toestandsvergelijking voor een ideaal gas toegevoegd. De ideale gaswet wordt daarbij genoteerd in een andere vorm dan wij in paragraaf 3.2.1 hebben beschreven. Er geldt

$$\rho = \frac{pW}{RT},$$

met W het molekulaire gewicht van het fluïdum, in ons geval perslucht, en R, de universele gasconstante. Voor de benodigde stromingsparameters kiezen we

$$W = 28.79 \text{ kg/kmol}, \quad R = 8314.0 \text{ J/kmolK}, \quad \mu = 17.9 \cdot 10^{-6} \text{ kg/ms}, \quad k = 0.0256 \text{ J/msK}$$
$$c_p = 1.006 \cdot 10^3 \text{ J/kgK}.$$

De parameters zijn gekozen onder een temperatuur van 293 K en een standaarddruk van 1 atm. De stromingsparameters gelden voor de lucht in de omgeving.
De laatste instellingen in de inputfile hebben betrekking op de gebruikte numerieke methoden en de randvoorwaarden. In de handleiding bij de solver staat vermeld dat in het geval van instationaire, compressibele stromingen de keywoorden high mach simple algoritme, en rhie-chow switch, averaging harmonic coefficients moeten worden toegevoegd. De termen hebben betrekking op de gebruikte discretisatiemethode voor de NS-vergelijkingen. Wegens de beperkte tijd besluiten we ons niet in de discretisatiemethoden, welke door CFX voor compressibele stromingen worden toegepast, te verdiepen. Zoals reeds uit de beschrijvingen van de gebruikte discretisatie in de CWI-code blijkt, zijn de discretisatiemethodes voor de NS-vergelijkingen niet eenvoudig. We willen de commerciële code gebruiken in zijn functie, dat zonder verdere kennis van de default ingestelde numerieke methoden de NS-vergelijkingen kunnen worden opgelost. Uitgangspunt is de code als een blackbox te beschouwen.
We leggen verder in de inputfile de tijdstappen vast. We werken met een achterwaarts Euler tijdstapschema. Dit is het defaulttijdstap schema in CFX.
Voor de randen van het domein respecteren we deels de randvoorwaarden uit paragraaf 8.3. Aan de rand press1 en outlet1 leggen we de thermodynamische condities van de omgeving op, $p = p_{\text{omgeving}}$ en $T = T_{\text{omgeving}}$. Aan de rand press2 moet het dus voldoende zijn om de druk voor te schrijven. We leggen aan de rand press2 vast, $p = p_{\text{sus}} \approx 6$ bar en $T = T_{\text{sus}} \approx 293$ K. Aan de overige randen gelden de no-slipconditie en de aanname van een adiabatische wand, default in CFX.

Draaien met problemen

Bij het draaien van de code lopen we in één tijdstap al vast op convergentieproblemen. Als eerste remedie besluiten we aan de randvoorwaarden te sleutelen. We kunnen ons goed voorstellen dat een mogelijke onderspecificatie van het aantal randvoorwaarden problemen geeft bij het vinden van een eventueel eenduidige oplossing. We stappen over naar de randtyperingen uit figuur 9.2 en schrijven aan de bovenrand en luchtinlaat variërende instroomdebieten voor. De constructie en schatting van de instroomdebieten laten we hier achterwege. We blijven echter met soortgelijke convergentieproblemen zitten. Vervolgens spelen we met tijdstapgroottes en andere parameters uit de invoerfile. Het mag niet baten.
Bij Akzo Nobel heeft men inmiddels met CFX voor ons blazerprobleem een oplossing gevonden. Uit hun inputfile blijkt, dat alhoewel met de NS-vergelijkingen is gewerkt, eigenlijk een Euler probleem is opgelost. De dynamische viscositeit evenals de thermische conductiviteit zijn extreem klein gekozen, $\mu = 10^{-8}$ kg/ms en $k = 10^{-8}$ J/msK. Aan de randen respecteert men niet langer de no-slipconditie maar staat men slip toe. Verder rekenen zij een stationair probleem door. Om in ieder geval een oplossing uit CFX te verkrijgen, besluiten wij eveneens onder deze voorwaarden een oplossing voor ons blazerprobleem

te vinden. Opnieuw krijgen we te maken met convergentieproblemen. Randvoorwaardenvariaties, een overstap naar een instationaire versie, verschillende tijdstappen kunnen deze problemen niet verhelpen. Met de weinige kennis omtrent de gebruikte numerieke discretisatiemethoden, zonder duidelijke voorschriften voor de benodige randvoorwaarden en met een gestript fysisch probleem bekruipt ons de vraag of we op deze manier met CFX voor ons blazerprobleem een goed middel in handen hebben om een oplossing te vinden. Tenminste, zolang we CFX als een blackbox willen beschouwen. Na verloop van tijd wordt duidelijk dat men bij Akzo Nobel over extra routines beschikt. De routines zijn speciaal door mensen van AEA Technology ontworpen om een oplossing voor het blazerprobleem te vinden. De routines zijn niet in de standaardversie van CFX verwerkt en mogen door Akzo Nobel niet worden vrijgegeven. Na navraag blijken de routines de mogelijkheid te bieden andere randvoorwaardencombinaties aan de randen voor te schrijven. Naast de statische druk kan de totale druk worden voorgeschreven. Op de gevolgen en werking van de routines hebben we geen zicht. Bij ons rijst echter het sterke vermoeden dat de routines essentieel zijn voor het verkrijgen van een oplossing. We besluiten onze inspanningen met een commerciële code stop te zetten.

We willen met deze keuze niet zeggen, dat CFX geen perspectieven biedt. Bij de solver zit een degelijke handleiding, waarin een set van referentie voorbeelden is toegevoegd. Met eventuele vragen kan men zich richten tot een helpdesk. De code heeft eveneens uitbreidingsmogelijkheden via fortranroutines, welke door de gebruiker zelf kunnen worden geschreven en aan CFX kunnen worden gelinkt. Dit is echter nooit onze bedoeling geweest. Met de beschikbare tijd hebben wij CFX willen testen op de mogelijkheden het pakket als een blackbox toe te passen. Daarbij was de vraag of de standaardversie van CFX zonder extra toevoegingen geschikt zou zijn voor het oplossen van ons blazerprobleem. Vooralsnog lijkt dat niet mogelijk zonder de beschikking over de extra routines. Als men in de toekomst alsnog verder wil met CFX moet men zich naar mijn mening in de achterliggende numerieke methoden verdiepen. Men heeft dan een beter zicht op eventuele convergentieproblemen, die kunnen ontstaan en met name meer zicht op mogelijke manieren om deze op te lossen. Daarnaast bestaat de mogelijkheid CFX aan te wenden onder begeleiding van de makers. In dat geval streeft de commerciële code echter zijn doel voorbij.

Hoofdstuk 10

Numerieke resultaten

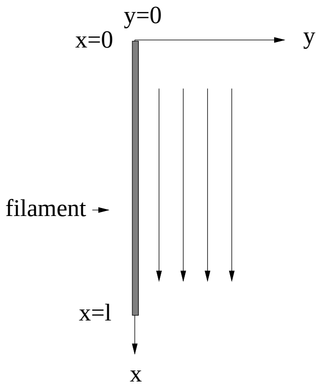
10.1 Inleiding

In het vorige hoofdstuk hebben we het draaiproces van de CWI-code beschreven. Met de code zijn we in staat variaties in het blazerprobleem aan te pakken. We kunnen denken aan Reynolds variaties, variërende instroomhoeken δ_{jet} of Machgetallen M_{jet} aan de luchtinlaat. Maar ook variaties in de diffusorgeometrie, zoals diffusorverbreding, stapverplaatsing van of naar de luchtinlaat of verlenging of verkorting van het trekkanaal behoren tot de mogelijkheden. De vraag is met welke variaties we het beste antwoord krijgen op de ons gestelde doelen.
Ons hoofddoel is het verklaren van de trekkrachtverhogende werking van de verbreding in de blazergeometrie. In het Japanse blazermodel bleek de verbreding essentieel voor de generatie van voldoende trekkracht aan de filamenten. Een blazer in het huidige spinproces moet zo'n 200 cN trekkracht leveren om één filament te verstrekken en door de spinmachine te transporteren. Met een overeenkomstige blazergeometrie zonder verbreding kan deze limiet niet worden gehaald.
Een mogelijk verklaring zit opgesloten in het antwoord op de volgende vragen. Op welke wijze vindt de trekkrachtgeneratie in de blazer plaats? Welke aspecten in de luchtstroming zijn essentieel voor de generatie van voldoende trekkracht aan de filamenten? En op welke wijze oefent de verbreding invloed uit op deze stromingsaspecten? In dit hoofdstuk beschrijven we twee ideeën, die een mogelijke verklaring vormen voor de effectiviteit van de verbreding op de gegenereerde trekkracht in de blazer. De ideeën staan besproken in paragraaf 10.3. Naar aanleiding van deze ideeën zullen we de CWI-code toepassen op verschillende varianten van het blazerprobleem. Vervolgens zullen we onze vermoedens omtrent de trekkrachtverhogende werking van de verbreding toetsen aan de numerieke berekeningen van de luchtstroming in deze problemen.
Als eerste starten we dit hoofdstuk met de introductie van een trekkrachtmaat. Met deze maat kunnen we deels de trekkrachtwerking van onze verschillende blazergeometrieën beoordelen. Eveneens vormt de achterliggende gedachte een aanknopingspunt bij de evaluatie van onze ideeën omtrent de trekkrachtverhogende werking van de verbreding.

10.2 Een maat voor de trekkracht aan de filamenten

Over de trekkracht aan de filamenten is weinig bekend. Een wiskundige beschrijving van een trekkrachtmodel aan de filamenten ontbreekt. Over grenslaagopbouw in compressibele stromingen langs dunne draden, zoals onze filamenten, is nauwelijks theorie bekend. Bij Akzo Nobel zijn in het verleden wel trekkrachtmetingen verricht aan een proefopstelling van een luchtinjektor. Aan de proefopstelling van Persoon zijn nog geen trekkrachtmetingen uitgevoerd. De enige ons bekende benaderingen van de trekkracht aan een filament zijn gepubliceerd in werk van Bos [3] en de Haas [5]. Bos heeft een afschatting gemaakt op basis van de impulsvergelijkingen in de grenslaag aan de filamenten. Dit model zullen we niet toepassen. In verder onderzoek kunnen we misschien zijn model implementeren. De Haas heeft met behulp van de grenslaagtheorie van Blasius rondom een cilinder getracht de trekkracht aan de

filamenten te modelleren. De resultaten van zijn trekkrachtberekeningen sluiten echter niet voldoende aan op trekkrachtmetingen uit de praktijk.
Een perfecte mogelijkheid om inzicht te krijgen in de trekkracht aan de filamenten is de evaluatie van de stroming in een 3D-blazergeometrie in de aanwezigheid van de filamenten. Vooralsnog hebben wij numerieke berekeningen gedaan aan een 2D blazergeometrie. Op basis van de argumenten uit paragraaf 2.3.2 is daarbij de invloed van de filamenten op de stroming verwaarloosd. Om toch een uitspraak te kunnen doen omtrent geometrievariaties in de blazer in relatie tot de stroming in de blazer en de trekkracht aan de filamenten introduceren we een trekkrachtmaat. Nadrukkelijk vermelden we dat de maat wordt ingevoerd ter referentie. Aan de maat mag geen kwantitatieve betekenis worden ontleend. De maat biedt ons de mogelijkheid kwalitatief de invloeden van verschillende geometrieaanpassingen op de trekkracht aan de filamenten te toetsen. De trekkrachtmaat is als volgt ontstaan.
We plaatsen de filamenten terug in de blazer, waarbij we aannemen dat de filamenten zich exact in het symmetrievlak bevinden. We handhaven eveneens de aanname dat de filamenten geen invloed uitoefenen op de stroming. Het stromingsprofiel blijft zodoende 2-dimensionaal. In figuur 10.1 staat de situatie geschetst voor een dwarsdoorsnede in de lengterichting van de blazer, waarbij zich in het symmetrievlak een filament bevindt. Het filament heeft een voortplantingssnelheid van ± 80 m/s.



Figuur 10.1: Geometrie voor de stroming indien zich in het symmetrievlak een filament bevindt.

Als maat voor de lokale trekkracht langs het filament ter plaatse x hanteren we het snelheidsverschil tussen de stroming langs het filament en de filamentsnelheid. De lokale trekkrachtmaat nemen we recht evenredig met dit snelheidsverschil

$$F_{\text{trek}_{\text{lokaal}}} = u_{\text{langs}} - u_{\text{filament}} = u_{\text{langs}} - 80.$$

De totale trekkrachtmaat langs het filament volgt hieruit, als we de lokale trekkrachtmaat langs het filament integreren

$$F_{\text{trek}} = \int_{x=0}^{x=L} (u_{\text{langs}} - 80)\, dx. \tag{10.1}$$

Hierin beschrijft L de lengte van de blazer. We wijzen op het feit dat we de totale trekkrachtmaat evalueren in onze twee gestelde dimensies.
Om de maat toepasbaar te maken voor de evaluatie van de trekkracht in onze numerieke berekeningen moeten we op zoek naar een benadering van deze integraal. De snelheid langs het filament wordt daarbij gegeven door de berekende snelheidscomponent u ter plaatse van het symmetrievlak. De filamenten zijn zeer dun, diameter van ± 30 μm en daarnaast is aangenomen dat de filamenten geen invloed uitoefenen op de luchtstroming. Er geldt

$$u_{\text{langs}} = u(x,0) \quad \text{voor} \quad 0 \leq x \leq L. \tag{10.2}$$

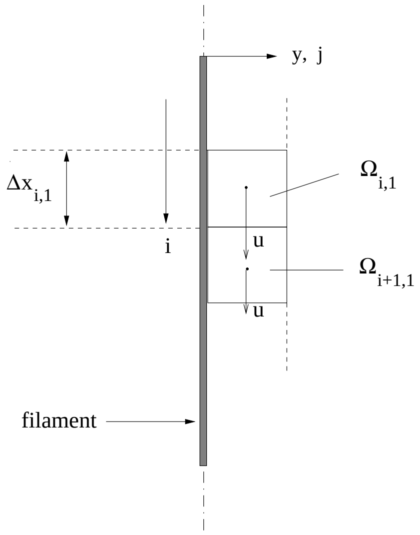
Deze berekende snelheidscomponent $u(x,0)$ in het symmetrievlak is per definitie gelijk aan de berekende snelheidscomponent u in de celcentra van de eindige volumes, die aan het symmetrievlak grenzen. We duiden deze eindige volumes aan als $\Omega_{i,1}$ met $1 \leq i \leq nx_{\text{in}}$. nx_{in} geeft het aantal cellen in de x-richting langs het symmetrievlak. Als we ons vervolgens realiseren, dat de snelheidscomponent u per definitie over ieder eindig volume constant is, dan volgt uit vergelijking (10.2)

$$u_{\text{langs}} = u(x,0) = u(x_{i,1},0) = u(x_{i,1},y_{i,1}) \quad \text{indien} \quad x_{i-\frac{1}{2},1} \leq x \leq x_{i+\frac{1}{2},1} \quad \text{met} \quad 1 \leq i \leq nx_{\text{in}}. \qquad (10.3)$$

Hierin zijn $x_{i,1}$ en $y_{i,1}$ respectievelijk de x- en y-coördinaat van het celcentrum in het eindige volume $\Omega_{i,1}$. Voor de totale trekkrachtmaat uit vergelijking (10.1) volgt zodoende

$$F_{\text{trek}}^{\text{num}} = \sum_{i=1}^{nx_{\text{in}}} \left(u(x_{i,1},0) - 80\right) \Delta x_{i,1}. \qquad (10.4)$$

Hierin beschrijft $\Delta x_{i,1}$ de lengte van de wand van het eindige volume $\Omega_{i,1}$, welke samenvalt met het symmetrievlak, zie figuur 10.2. In onze numerieke testproblemen geldt $nx_{\text{in}} = 80$.



Figuur 10.2: Twee eindige volumes aangrenzend aan het symmetrievlak, waarin zich een filament bevindt.

Uiteindelijk hebben we ter evaluatie van de trekkrachtwerking in onze numerieke tests geen gebruik gemaakt van vergelijking (10.4) als numerieke trekkrachtmaat, maar van een relatieve variant. De relatieve trekkrachtmaat hebben we gedefinieerd, als

$$F_{\text{trek}_{\text{relatief}}}^{\text{num}} = \frac{F_{\text{trek}_{\text{test}}}^{\text{num}}}{F_{\text{trek}_{\text{referentie}}}^{\text{num}}}. \qquad (10.5)$$

Als referentie waarde voor de numerieke trekkrachtmaat nemen we de numerieke trekkrachtmaat, die geldt in ons stromingsprobleem met diffusorgeometrie. Voor de diffusorbreedte, diffusorhoogte en xupstep is achtereenvolgens genomen hstep=0.5, diflengte=152 en xupstep=91. Het Reynoldsgetal bedraagt $\text{Re} = 2.4 \cdot 10^4$. De randvoorwaarden uit paragraaf 8.3 zijn ingesteld. Het zodanig geconstrueerde referentie blazerprobleem sluit goed aan bij de daadwerkelijke situatie in de spleetblazer bij Akzo Nobel. Voor deze situatie kunnen we met een redelijk grote zekerheid zeggen dat in de spleetblazer de limiet van 200 cN aan gegenereerde trekkracht per filament wordt gehaald.

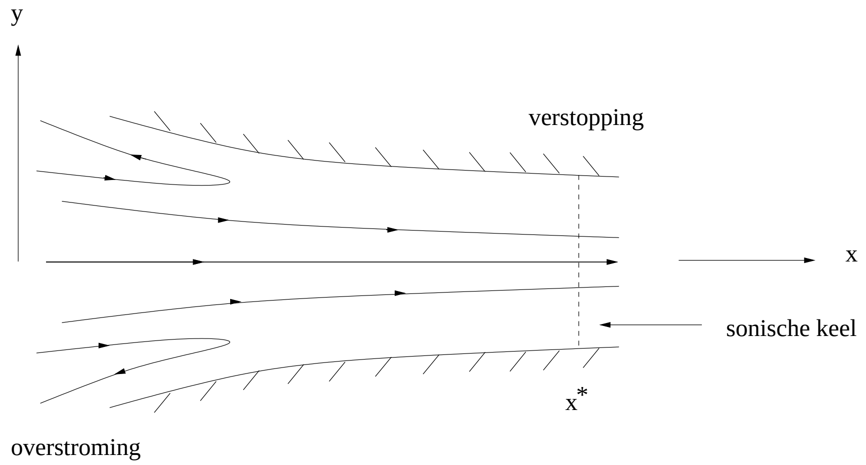
Voor we overstappen naar een beschijving van de ideeën, die leiden tot een verklaring voor de effectiviteit van de verbreding in het trekkanaal wijzen we op het volgende. De trekkrachtmaat impliceert dat een hogere snelheid in de positieve x-richting langs het symmetrievlak resulteert in een hogere trekkracht aan het filament. Op basis van de trekkrachtmaat moeten we zodoende een verklaring voor de opname van de verbreding in de blazergeometrie zoeken in zijn effect op de snelheidscomponent u in het symmetrievlak van het trekkanaal.

10.3 Een verklaring voor de verbreding: incompressibele viskeuze en compressibele niet-viskeuze verstopping

In deze paragraaf besteden we aandacht aan twee vormen van verstopping, die in het trekkanaal kunnen optreden. Het betreft compressible niet-viskeuze verstopping en incompressibele viskeuze verstopping. Onder verstopping in het trekkanaal verstaan we, dat in het trekkanaal het maximale debiet is gerealiseerd, dat onder de huidige condities door het trekkanaal kan worden geperst. Indien we trachten een groter debiet door het trekkanaal te persen, verlaat de overtollige lucht de blazer via de draadinlaat. Voor beide soorten verstopping zullen we de achterliggende theorie beschrijven, waarna we aandacht besteden aan de negatieve invloed van verstopping op de trekkracht aan de filamenten. Daarnaast zal blijken dat tegen beide soorten verstopping grotendeels dezelfde remedies zijn opgewassen. De verbreding vormt zo'n mogelijke remedie. In paragraaf 10.4 zetten we vervolgens een aantal numerieke tests op, waarin we de oorzaken van verstopping aanpakken. Met behulp van onze trekkrachtmaat uit paragraaf 10.2 zullen we de verschillende stromingssituaties op hun trekkrachtwaarde beoordelen.

10.3.1 Compressibele niet-viskeuze verstopping

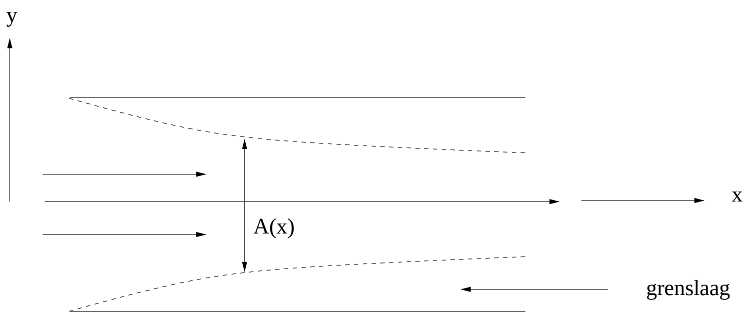
De rol van compressibele niet-viskeuze verstopping is van minder groot belang dan die van incompressibele viskeuze verstopping, zoals uit de numerieke resultaten zal blijken. Als we echter de blazergeometrie zodanig hebben vervaardigd dat in de geometrie subsone snelheden optreden, die naar de geluidssnelheid neigen, dan speelt deze vorm van verstopping wel degelijk een belangrijke rol. Hoge snelheid betekent een hoge trekkracht, maar te hoge snelheid levert, wat wij aanduiden als, compressibel niet-viskeus verstoppingsgevaar.
Compressibele niet-viskeuze verstopping illustreren we aan de hand van een bekend stromingsprobleem uit de gasdynamica. In appendix E is aandacht besteed aan een stationaire, niet-viskeuze, compressibele, quasi-één-dimensionale stroming door een kanaal met een variërend doorstroomoppervlak $A(x)$. De situatie staat geschetst in figuur E.1. We hebben voor zo'n stroming afgeleid, dat indien de betreffende stroming subsoon is, onder afname van het doorstroomoppervlak $A(x)$, $dA/dx < 0$, de snelheid, $u(x)$, in het kanaal toeneemt. De snelheid blijft bij afname van het doorstroomoppervlak groeien en groeien. Op den duur wordt op deze wijze de geluidssnelheid bereikt en geldt $M = 1$. Op dat moment moeten we ons overeenkomstig aan de theorie uit appendix E.1 in het minimale doorstroomoppervlakte in het kanaal bevinden. Dit minimale doorstroomoppervlakte noteren we als A^*. We spreken van een sonische keel.



Figuur 10.3: Overstroming in een buisgeometrie met een quasi-één-dimensionale stroming

In appendix E.2 hebben we eveneens een relatie afgeleid tussen het Machgetal en het doorstroomoppervlak in een willekeurige doorsnede x en de grootte van het doorstroomoppervlak van een eventueel aanwezige sonische keel. Stel we hebben een kanaal gemaakt, waarin door het gehele kanaal aan de

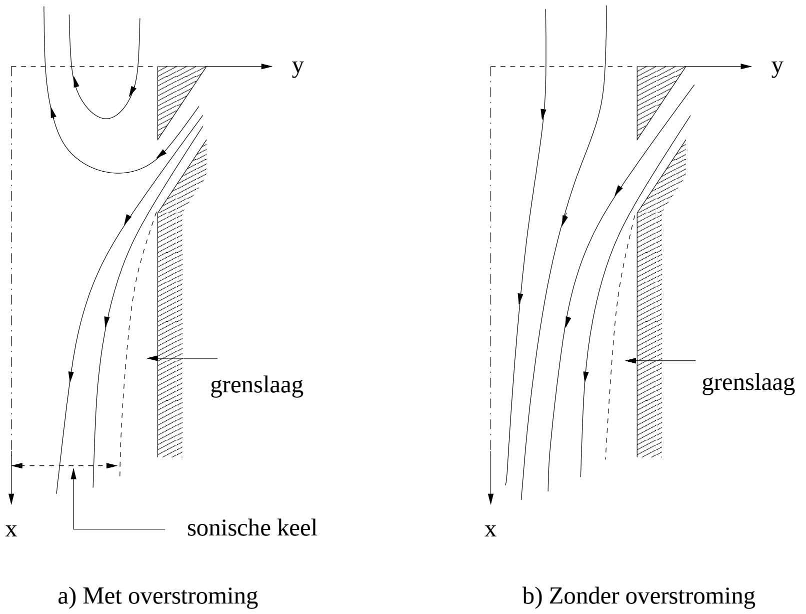
oppervlakte-Mach relatie wordt voldaan. Bovendien is de gasstroom aan het begin van het kanaal subsoon en neemt het doorstroomoppervlak in de geometrie af. In het kanaal bevindt zich een minimaal doorstroomoppervlak. We nemen aan dat daar geldt $M = 1$. Er is sprake van een sonische keel. De geometrie van het kanaal staat geschetst in figuur 10.3. We kunnen in de sonische keel het debiet berekenen. Uit de theorie van de quasi-één-dimensionale gasdynamica kan worden afgeleid dat dit debiet het maximale debiet is, dat op welke wijze dan ook door het kanaal met de huidige geometrie kan worden geperst. Dit geldt dus voor niet-viskeuze, compressibele, stationaire stromingen. Het bewijs laten we hier achterwege. Een afleiding is te vinden met behulp van de behandelde theorie in Anderson [1, blz.57–63, 147–155].
Wat gebeurt er indien we toch proberen een groter debiet door het kanaal te persen? Het kanaal raakt verstopt. Het kanaal is choked. Tengevolge van de verstopping overstroomt het kanaal. De situatie staat geschetst in figuur 10.3. De situatie kunnen we generaliseren naar 2D niet-viskeuze, compressibele, stationaire stromingen.
In hoeverre is bovenstaande theorie van belang voor onze spleetblazer? Onze stroming is stationair en compressibel, maar helaas wel viskeus. Daarnaast is in onze rechte blazergeometrie geen minimaal doorstroomoppervlak te herkennen. Van een sonische keel kan geen sprake zijn. Tenminste, zo lijkt het. Een nadere beschouwing van een recht kanaal, zie figuur 10.4, werpt een ander licht op de zaak.



Figuur 10.4: Een kanaal met effectief doorstroomoppervlak $A(x)$ na reductie van het doorstroomoppervlak met de dikte van de grenslaag.

We nemen aan dat de stroming niet al te sterk viskeus is. De stroming correspondeert met een voldoende hoog Reynoldsgetal, opdat de viskeuze effecten beperkt blijven tot een grenslaag aan de vaste wanden van het kanaal. Buiten de grenslaag kunnen de viskeuze effecten worden verwaarloosd en is de stroming bij benadering niet-viskeus. Als we aannemen dat de grenslagen dun zijn en het debiet, dat door de grenslagen stroomt te verwaarlozen is ten opzichte van het debiet dat door het kanaal buiten de grenslaag stroomt, dan is de stroming in het gebied buiten de grenslaag op te vatten als een quasi-één-dimensionale niet-viskeuze compressibele stroming door een buis met effectief doorstroomoppervlak $A(x)$. $A(x)$ is de doorsnede van het kanaal zonder grenslaag.
De toegepaste aanname omtrent de verwaarlozing van het debiet door de grenslaag ten opzichte van het debiet door het buitengebied is redelijk. De snelheid in de grenslaag ligt aanmerkelijk lager dan in het gebied buiten de laag. Bovendien is de grenslaag bij een hoog Reynoldsgetal redelijk dun. Als we de maximale grenslaagdikte afschatten op basis van de analyse van de grenslaagdikte langs een vlakke plaat door Blasius, dan geldt $\delta_{\max} \sim \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}_{\mathrm{kan}}}}$. Hierin is het Reynoldsgetal gedefinieerd, als $\mathrm{Re}_{\mathrm{kan}} = \frac{U_{\max} L}{\nu}$ met $U_{\max}$ de maximale snelheid in het kanaal, L de lengte van het kanaal en ν een referentiewaarde voor de viscositeit in de stroming. Voor een afschatting van de grenslaagtheorie volgens Blasius verwijzen we naar Schlichting [25, blz.135–148] en appendix D. We merken op dat de grenslaagtheorie van Blasius van toepassing is op een incompressibele vrije stroming over een vlakke plaat. In het trekkanaal is hiervan geen sprake, maar met de afschatting van de grenslaagdikte $\delta_{\max}$ hebben we in ieder geval een indicatie voor de orde grootte van de grenslaagdikte te pakken.
De overstap van bovenstaande ideeën naar onze blazergeometrie is gemakkelijk gemaakt. Voor de eenvoud beschouwen we een rechte blazergeometrie. We hebben aangenomen dat onze stroming door de blazer viskeus, stationair en compressibel is. Aan onze vaste wanden in het trekkanaal ontwikkelt zich een grenslaag. Als we ook hier aannemen dat het debiet door de grenslaag te verwaarlozen is

ten opzichte van het debiet door het effectieve doorstroomoppervlak van het buitengebied, dan kunnen we de 2D generalisatie van de quasi-één-dimensionale gasdynamica toepassen op het buitengebied. De situatie staat geschetst in figuur 10.5.



Figuur 10.5: Mogelijke situatieschetsen in onze blazergeometrie door reductie van het effectieve doorstroomoppervlak ten gevolge van de grenslaagontwikkeling langs de vaste wanden van de blazer.

Vanuit de suskamer wordt een debiet het trekkanaal ingeperst. Ten gevolge van de heersende onderdruk rond de luchtinlaat wordt van boven de blazer lucht het trekkanaal ingezogen. We beschrijven hier een ideale situatie. Het resulterende debiet, dat door het trekkanaal wordt geperst, is op basis van het effectieve doorstroomoppervlak en de niet-viskeuze compressibele theorie toegepast op het buitengebied, begrensd door een maximale waarde. Dit maximum wordt gerealiseerd indien in het minimale effectieve doorstroomoppervlak een sonische stroming wordt gerealiseerd. Het minimale doorstroomoppervlak wordt in ons geval bepaald door de dikte van de grenslaag aan de vaste wanden van de blazer. In appendix D hebben we een afschatting gemaakt voor deze grenslaagdikte, $\delta(x)$. Deze afschatting is eveneens gebaseerd op de grenslaagtheorie van Blasius voor een vrije stroming over een vlakke plaat

$$\delta(x) \sim \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{\ell}} \frac{x}{\sqrt{\mathrm{Re}}}. \tag{10.6}$$

Hierin beschrijft l de breedte van het trekkanaal in het halfprobleem. ℓ is de lengte van de blazer. Re geeft het Reynoldsgetal, zoals deze in paragraaf 8.4 is gedefinieerd

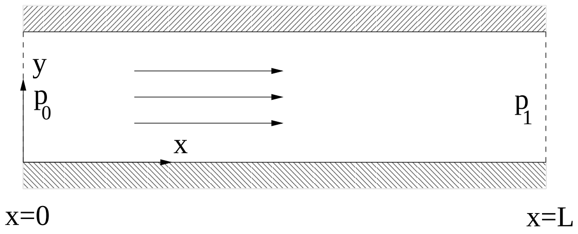
$$\mathrm{Re} = \frac{c_{\mathrm{sus}} l}{\nu}.$$

Met de afschatting uit vergelijking (10.6) is de grenslaagdikte in een rechte blazergeometrie maximaal op het einde van het trekkanaal.
Op basis van de besproken theorie krijgen we te maken met een bovengrens aan het debiet, welke vanuit de suskamer door de blazer kan worden geperst. In het ideale geval, met het oog op de trekkracht, stroomt het maximale debiet door de blazer. De snelheden neigen naar de geluidssnelheid. Hoge snelheid in het symmetrievlak van de blazer impliceren een hoge trekkracht aan de filamenten. In tegenstelling tot deze ideale situatie kan het gebeuren dat vanuit de suskamer een te groot debiet het trekkanaal wordt ingespoten. Met het huidige effectieve doorstroomoppervlak ten gevolge van de heersende grenslagen aan de vaste wanden van het kanaal kan dit debiet niet worden verwerkt. Overstroming ten gevolge

van compressibele niet-viskeuze verstopping is het resultaat. Deze situatie staat naast de ideale situatie geschetst in figuur 10.5.
Zoals later in deze paragraaf zal worden besproken heeft overstroming een negatief effect op de gegenereerde trekkracht in de blazer. Compressibele niet-viskeuze verstopping moeten we zien te voorkomen. Dit kan worden gerealiseerd door het effectieve doorstroomoppervlak te vergroten. We kunnen daartoe denken aan verbreding van het trekkanaal of aan de reductie van de grenslaagdikte door een afname van het Reynoldsgetal. Variaties in het Reynoldsgetal zijn te verwezenlijken door invloed uit te oefenen op c_{sus}, b of ν. We sluiten af met de opmerking dat de naamgeving van compressibele niet-viskeuze verstopping is geresulteerd naar aanleiding van het type stromingsprobleem, dat aan de redenering ten grondslag ligt.

10.3.2 Incompressibele viskeuze verstopping

Compressibele niet-viskeuze verstopping en terugstroming zouden aanleiding geven tot de opname van de verbreding in de geometrie. Als we uitgaan van de verbreding als een remedie voor verstopping dan blijken we naast compressibele niet-viskeuze verstopping een andere oorzaak voor verstopping aan te kunnen wijzen. Deze vorm van verstopping, aangeduid als incompressibele viskeuze verstopping illustreren we eveneens aan de hand van een bekend stromingsprobleem.
We beschouwen een stroming tussen twee vaste evenwijdige wanden. Tussen het begin en einde van het zo gevormde kanaal is een drukverschil opgezet, $(p_0 - p_1) > 0$. De stroming is laminair, incompressibel, stationair en viskeus. Het probleem staat bekend als de Poiseuille stroming. Voor de theorie hebben we al eerder verwezen naar Korving, Corstens en Timman [19, blz. 178–182]. De situatie staat geschetst in figuur 10.6.



Figuur 10.6: Poiseuille stroming in een kanaal van lengte L met een drukverschil van $p_0 - p_1$

Uit de impuls- en continuïteitsvergelijking staat daar afgeleid, dat geldt

$$v = 0 \ , \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{d^2u}{dy^2} = C, \quad \frac{dp}{dx} = C \quad \text{met} \quad C \in R. \tag{10.7}$$

Misschien ten overvloede merken we op dat zowel u, v, p, x en y in deze vergelijkingen dimensieloze grootheden zijn. De grootheden u, v, p, x en y zijn dimensieloos gemaakt zoals in appendix B is geïllustreerd. Als karakteristieke lengte ℓ is genomen $h/2$. Om zo dadelijk aan te sluiten op de blazergeometrie hebben we de karakteristieke snelheid U gelijk gekozen aan de geluidssnelheid uit de suskamer. Het Reynoldsgetal is gegeven door

$$\mathrm{Re} = \frac{c_{\mathrm{sus}} h/2}{\nu_{\mathrm{ref}}}.$$

We wijzen op de overeenkomst tussen dit Reynoldsgetal en het Reynoldsgetal, dat we in paragraaf 8.4 hebben gedefinieerd voor ons blazerprobleem.
Met behulp van de kleefconditie aan de vaste wand kunnen we uit vergelijking (10.7) afleiden, dat geldt

$$u = -\frac{C\mathrm{Re}}{2} y(h - y). \tag{10.8}$$

De constante C volgt als gevolg van de gegeven drukken p_0 en p_1 op de doorsneden $x = 0$ en $x = L$

$$p = Cx + p_0, \quad C = \frac{p_1 - p_0}{L}. \tag{10.9}$$

Uit vergelijking (10.8) kunnen we afleiden, welk debiet we onder deze omstandigheden door het kanaal kunnen persen

$$Q = \int_{y=0}^{y=h} \rho u \, dy = \rho \int_{y=0}^{h} -\frac{C\mathrm{Re}}{2} y(h-y)\, dy = -\frac{C\rho\mathrm{Re}}{12} h^3. \tag{10.10}$$

Hierin staat Q voor het debiet.

Op welke wijze zijn de bovenstaande principes nu toepasbaar in onze blazergeometrie? De stroming in ons model is stationair en viskeus, maar niet incompressibel. We beschouwen nog steeds uit overwegingen van eenvoud een rechte blazergeometrie. We spuiten vanuit de suskamer lucht onder hoge druk het trekkanaal in. Direct onder de luchtinlaat treedt aan de vaste wanden een onderdruk op. De straal spuit onder een hoek het trekkanaal in. Vervolgens buigt de straal af en de onderdruk langs de vaste wanden is verdwenen. Dit correspondeert met metingen van de statische druk van Persoon. Ten gevolge van de wrijving in het trekkanaal smeert de ingeblazen luchtstraal vanuit de suskamer zich over de volledige breedte van het trekkanaal uit. Afhankelijk van de mate, waarin diffusie in de modelvorming domineert, vindt deze uitsmering snel plaats. Voor een laag Reynoldsgetal speelt diffusie een belangrijke rol in het trekkanaal, zie paragraaf 8.4. Als de straal over de breedte van het trekkanaal is uitgesmeerd, varieert de snelheidscomponent u nauwelijks meer in de positieve x-richting. De stroming is volledig ontwikkeld. Bij benadering is de stroming in het resterende gedeelte van het trekkanaal te beschouwen als een incompressibele stroming. De snelheden liggen niet hoog. Bij benadering komt het snelheidsprofiel u in dit deel van het trekkanaal overeen met een Poiseuille snelheidsprofiel. De snelheidscomponent v in de y-richting is bij benadering 0.

Stel dat ter plaatse x^* in het trekkanaal de stroming volledig ontwikkeld is. Tot het einde van het trekkanaal moet dan nog een afstand van $\Delta x = L - x^*$ worden afgelegd. L is de lengte van de blazer. Via vergelijking (10.9) en (10.10) ligt onder de heersende druk p ter plaatse x^* (p_0) en p_{atm} ter plaatse $x = L$ (p_1) met het bijbehorende Reynoldsgetal voor het stromingsprobleem en de gegeven referentiedichtheid het maximale debiet vast dat door het trekkanaal kan worden geperst.

Voor sterk viskeuze stromingen door ons nauwe lange trekkanaal moet het drukverschil $p_0 - p_1$ in het deel van het trekkanaal, waarover de stroming volledig ontwikkeld is, behoorlijk hoog liggen, opdat we op basis van vergelijking (10.10) een voldoende groot debiet door de buis kunnen persen. Indien vanuit de suskamer een te hoog debiet wordt ingeblazen, zal de overtollig ingespoten lucht de spleetblazer via de draadinlaat verlaten. De stroming zoekt voor een deel een makkelijkere uitweg via de bovenkant van de blazer. De af te leggen afstand door de spleetblazer is zodoende aanmerkelijk bekort. De lange weg door het trekkanaal vol wrijving wordt liever gemeden. De situatieschets in dit geval is analoog aan figuur 10.5 met dit verschil dat in de stroming geen sonische keel aanwezig is. Met het omklappen van de stromingsrichting vanuit de suskamer gaat veel bewegingsenergie verloren, maar dit weegt in dat geval op tegen het verlies aan bewegingsenergie ten gevolge van de weerstand in het trekkanaal. Het kanaal kan de debietaanvoer niet verwerken, opnieuw is er sprake van verstopping. We spreken van incompressibele viskeuze verstopping. De naamgeving is gerelateerd aan het achterliggende Poiseuille probleem dat aan de redenering ten grondslag ligt. Het ingespoten debiet vanuit de suskamer en de aangezogen lucht van boven de blazer kunnen niet door het lange trekkanaal worden verwerkt.

Incompressibele viskeuze verstopping kan worden voorkomen door, in het geval van volledige ontwikkeling in de loop van het trekkanaal, een groter debiet door dit kanaal toe te staan. Uit vergelijking (10.10) volgt dat we dit kunnen realiseren door het kanaal te verbreden, h groter, of door de mate van diffusie met behulp van het Reynoldsgetal te laten afnemen. We wijzen op het feit dat beide mogelijkheden eveneens een oplossing vormen voor compressibele niet-viskeuze verstopping. Kanaalverbreding leidt immers tot een toename van het effectieve doorstroomoppervlak en reductie van het Reynoldsgetal leidt tot een dunnere grenslaag langs de vaste wanden van de blazer.

10.3.3 Gevolgen van verstopping en overstroming op trekkrachtgeneratie

Wat betekent verstopping nu eigenlijk voor de trekkracht aan de filamenten? Voor een antwoord gaan we terug naar paragraaf 10.2. We hebben daar een trekkrachtmaat afgeleid, welke een relatie beschrijft tussen de hoogte van de snelheid in het symmetrievlak van een blazergeometrie zonder filamenten en de hoogte van de trekkracht in een geometrie met filamenten, zie vergelijking (10.4). Stel nu dat in het trekkanaal een situatie van verstopping optreedt. Het overtollige debiet, dat is aangevoerd via de suskamer of is aangezogen van boven de blazer, moet op een of andere manier de blazer via een andere weg verlaten. Langs het symmetrievlak treedt in het gebied rondom de luchtinlaat terugstroming op. De overtollige lucht verlaat de blazer via de draadinlaat. We bevinden ons in een situatie, zoals geschetst in figuur 10.5 met of zonder sonische keel.

Terugstroming heeft een negatieve invloed op de trekkracht, die in de spleetblazer wordt gegenereerd. Lokaal wordt in de terugstroomgebieden de trekkracht negatief. In deze gebieden wordt niet langer aan de filamenten getrokken. De invloed van de lokaal negatieve trekkracht in de terugstroomzones kan daarbij zo sterk zijn dat de totaal uitgeoefende trekkracht in de blazer eveneens negatief is. De blazer moet echter minstens een trekkracht van 200 cN genereren. Wordt deze limiet niet gehaald dan kunnen de filamenten terugslaan. De blazergeometrie zal dus zodanig geconstrueerd moeten zijn, opdat terugstroming wordt voorkomen. Verstopping in het trekkanaal is ongewenst.

Zoals reeds eerder is vermeld, kunnen zowel incompressibele viskeuze verstopping als compressibele niet-viskeuze verstopping overstroming veroorzaken in het trekkanaal. De remedies om verstopping terug te dringen zijn in beide gevallen gelijk. Tot nu toe weten we niet in hoeverre de kans op één van beide vormen van verstopping in de blazergeometrie aanwezig is. De vraag is of de effectiviteit van de verbreding inderdaad te wijten is aan de reductie van de kans op verstopping en resulterende terugstroming in het trekkanaal? We zullen drie numerieke testsets gaan opzetten, waarmee we antwoord willen vinden op de volgende vragen :

- Treedt in het trekkanaal een of andere vorm van verstopping op? Zo ja, welke vorm van verstopping treedt op en welke factoren kunnen bijdragen aan een reductie van deze vorm van verstopping? Op welke wijze kunnen we de trekkracht laten toenemen ten gevolge van reductie van de terugstroming in het trekkanaal?

- Waarom is de verbreding zo effectief uit het oogpunt van trekkrachtgeneratie? Speelt inderdaad reductie van verstopping en terugstroming een rol?

- Welke andere geometrie- of probleemveranderingen hebben een positieve invloed op de generatie van hoge snelheden in de positieve x-richting langs het symmetrievlak? Generatie van hoge snelheden impliceert een hoge trekkracht. Compressibele niet-viskeuze verstopping moet daarbij worden voorkomen.

Van essentieel belang in het numerieke onderzoek zal de mogelijkheid blijken om aan de draadinlaat in de numerieke oplossing ongedwongen terugstroming te vinden ten gevolge van de gekozen randvoorwaardencombinatie ter plaatse. De in paragraaf 5.3.2 gepresenteerde randvoorwaardencombinatie biedt deze mogelijkheid.

We willen tenslotte nog enkele zaken opmerken. Indirect hebben we in voorgaande beschrijvingen aangenomen, dat slechts één van beide vormen van verstopping in het trekkanaal kan optreden. Incompressibele viskeuze verstopping treedt op indien de diffusieve aspecten in de stroming domineren. De snelheden liggen in een groot deel van het trekkanaal vrij laag. De luchtstroming is bij benadering grotendeels incompressibel. Voor stromingen met een hoog Reynoldsgetal vertoont de stroming meer overeenkomsten met de beschreven situatie onder compressibele niet-viskeuze verstopping.
Stel in een blazergeometrie treedt onder de heersende condities verstopping op. In dat geval is het gunstig voor de trekkracht, als we met compressibele niet-viskeuze verstopping te maken hebben. In dat geval liggen de snelheden in het trekkanaal zeer hoog. Tenminste in de gebieden waar geen terugstroming plaatsvindt. Op de plaats van het minimale doorstroomoppervlak bevindt zich een sonische keel. Het Machgetal bedraagt daar zelfs $M = 1$. Hoge snelheden impliceren een hoge trekkracht. Als we de blazergeometrie of de stromingscondities zodanig aanpassen, dat we tegen terugstroming aan zitten, dan liggen de snelheden nog steeds hoog. Als in plaats van compressibele niet-viskeuze verstopping incompressibele viskeuze verstopping in het trekkanaal optreedt, zijn we nog ver van een ideale blazergeometrie onder geschikte condities verwijderd. Terugstroomreductie heeft in dat geval eveneens een positieve uitwerking op de trekkrachtgeneratie, maar de totaal gegenereerde trekkracht zal niet groot zijn. De snelheden in het trekkanaal liggen in dat geval vrij laag.

Zoals reeds is opgemerkt moet in de spleetblazer aan elk filament minstens een trekkracht van 200 cN worden gegenereerd. Indien deze limiet niet wordt gehaald, slaan de filamenten terug. Er ontstaat een zogenaamde oploper in de proefmachine. In principe is het voldoende een blazergeometrie te vinden, waarin deze limiet wordt gehaald. Welke grootte van de relatieve trekkrachtmaat exact met deze limiet waarde correspondeert, is echter niet bekend. We gaan zodoende op zoek naar een blazergeometrie en probleemconstructie, waarmee een maximale trekkracht kan worden gegeneerd. Indien zo'n geometrie onder geschikte stromingscondities is gevonden, kan men vervolgens uit het oogpunt van kostenreductie met de limietwaarde in het achterhoofd aan het gevonden blazerprobleem sleutelen.

10.4 Drie numerieke testsets

Het fysische domein, de vergelijkingen en de randvoorwaarden, waarmee wij ons stromingsprobleem in de blazer kunnen beschrijven, zijn in de hoofdstukken 2.3, 3, 5 en 8 opgesteld. In de hoofdstukken 6, 7 en 8 hebben we ruim aandacht besteed aan de numerieke methoden, waarmee we het beschreven stromingsprobleem kunnen oplossen. Uiteindelijk zijn al deze gegevens in de code op het CWI verwerkt. We zetten drie numerieke testsets op om een antwoord te vinden op bovengenoemde vragen. Per testset hebben we steeds één aspect uit ons stromingsprobleem over de blazergeometrie gevarieerd. De testsets zijn zodanig gekozen, dat de variaties van invloed zijn op de snelheid in het trekkanaal. Met de trekkrachtmaat uit paragraaf 10.2 beoordelen we de gevarieerde aspecten op hun invloed op trekkrachverhoging of verlaging. Op basis van de stromingsverschijnselen uit paragraaf 10.3 proberen we hiervoor een verklaring te vinden. Daarnaast zullen we waken over het optreden van compressibele niet-viskeuze en incompressibele viskeuze verstopping.

De drie numerieke testsets betreffen :

- Re-variaties, $\text{Re} = 10^3,\ 10^4,\ 10^5$
  We passen Re-variaties toe in een rechte blazergeometrie. Ter herinnering vermelden we nogmaals dat ons Reynoldsgetal is gedefinieerd als
  $$\text{Re} = \frac{c_{\text{sus}} l}{\nu}.$$
  We verwijzen naar paragraaf 8.4. De Reynolds variaties in deze testset zijn te realiseren door variaties in c_{sus} of ν. De breedte van het halfprobleem, l, is vast gezet op 1. We wijzen op het feit dat alle afstanden zonder eenheden worden geschreven. We werken met de dimensieloze grootheden uit de CWI-code. Als we in de toekomst praten over de breedte van het trekkanaal dan spreken we over de breedte van het halfprobleem. Over het fysische domein worden de randvoorwaarden uit paragraaf 8.3 gerespecteerd.

- Variatie in diffusorbreedte, $\text{hstep} = 0,\ 0.25,\ 0.5,\ 0.75$
  In deze gevallen beschouwen we het stromingsprobleem beschreven door de NS-vergelijkingen op een blazergeometrie, waarin een diffusor is opgenomen. De diffusor bevindt zich tussen $\text{xupstep} = 91$ en $\text{xdownstep} = 243$. De verbreding welke de diffusor in het trekkanaal realiseert, is in deze testcases gevarieerd. Op deze wijze grijpen we via een harde geometrieverandering in. De testcases zijn uitgevoerd voor een vast Reynoldsgetal, $\text{Re} = 2.4 \cdot 10^4$. De randvoorwaarden uit paragraaf 8.3 zijn gerespecteerd.

- Variatie in diffusorhoogte, $\text{xstep} = 147,\ 167,\ 187$
  In dit geval passen we de NS-vergelijkingen en de randvoorwaarden toe op een diffusorgeometrie met een breedte $\text{hstep} = 0.5$. Als Reynoldsgetal kiezen we $\text{Re} = 2.4 \cdot 10^4$. De diffusor smeert deze verbreding uit over een afstand van 152. We hebben de diffusor in hoogte verschoven. De diffusor start op de afstanden $\text{xupstep} = 71,\ 91,$ en 111.

10.5 Numerieke resultaten onder Reynolds variaties

We beschouwen de numerieke resultaten voor de stromingsberekeningen op basis van de NS-vergelijkingen met variabele Reynoldsgetallen $\mathrm{Re} = 10^3,\ 10^4,\ 10^5$. Het betreft een rechte blazergeometrie. In de figuren 10.7 tot en met 10.11 hebben we enkele resultaten opgenomen. De resultaten zijn allen geplot met behulp van matlab. Voor elke figuur beschrijven we welke resultaten we eruit kunnen aflezen.

Figuur 10.7

In de eerste figuur staan voor de verschillende Reynoldsgetallen het Machgetal over het gehele rechte trekkanaal afgebeeld. Langs de horizontale as staat de breedte van het halfprobleem uitgezet, $0 \leq y \leq 1$. Op $y = 0$ bevindt zich het symmetrievlak. Op $y = 1$ bevindt zich de vaste wand met de luchtinlaat op $x = 15.6345$ tot $x = 16.3655$. Langs de verticale as staat de afstand tot aan de bovenkant van de blazer, x, uitgezet. De legenda naast de plots geeft de kleurenrange aan welke correspondeert met de verschillende Machwaarden in de plots. Uit de figuur valt op dat voor lage Reynoldsgetallen de straal vanuit de luchtinlaat sterk is gediffundeerd. De mate van diffusie is gerelateerd aan het Reynoldsgetal. Voor $\mathrm{Re} = 10^3$ varieert het Machprofiel vanaf $x = 150$ nauwelijks meer. Voor $\mathrm{Re} = 10^4$ nemen we hetzelfde waar vanaf ongeveer $x = 300$. In het geval van $\mathrm{Re} = 10^5$ spelen de diffusie aspecten een veel kleinere rol. De straal is op het einde van het trekkanaal nog niet volledig gediffundeerd.
Het lijkt alsof voor $\mathrm{Re} = 10^3$ en $\mathrm{Re} = 10^4$ vanaf de aangegeven plaatsen de stroming in het resterende deel van het trekkanaal volledig ontwikkeld is. De snelheidscomponent v is zo goed als nul. De snelheidscomponent u in de x-richting, welke zodoende direct is gerelateerd aan het Machgetal, varieert niet meer in de x-richting. Voor een volledig ontwikkelde, Poiseuille stroming is bekend dat de druk in de stroming niet varieert in de y-richting. Bovendien is het drukprofiel lineair in x. Het snelheidsprofiel u beschrijft een parabool. Ter bevestiging van de volledige ontwikkeling bekijken we de figuren 10.8 en 10.9.

Figuur 10.8

In figuur 10.8 staan de snelheidsprofielen voor de verschillende Reynoldsgetallen op het einde van het trekkanaal, $x = 587$, geschetst. Het kanaal is ter plaatse 1 breed. Nogmaals we duiden de kanaalbreedte aan als de breedte van het halfdomein, $0 \leq y \leq 1$. Het snelheidsprofiel voor een volledig ontwikkelde stroming is bekend om zijn parabolische vorm. Voor $\mathrm{Re} = 10^3$ en $\mathrm{Re} = 10^4$ beschrijft het stromingsprofiel op het einde van het trekkanaal nagenoeg een parabool. De stroming heeft zich inderdaad in de loop van het trekkanaal volledig ontwikkeld. Het snelheidsprofiel voor $\mathrm{Re} = 10^5$ laat iets anders zien. De straal blijft langs de wand plakken. De straal is nog niet voldoende uitgediffundeerd.

Figuur 10.9

In figuur 10.9 staat de drukcoëfficiënt, $(p - p_{\text{omgeving}})/p_{\text{omgeving}}$ over het gehele rechte trekkanaal afgebeeld. Langs de assen staan evenals voor de Machplot de y- en x-coördinaat afgebeeld. De legenda naast de plots geeft de kleurenrange aan welke correspondeert met de waardes van de drukcoëfficiënt. Voor een volledig ontwikkelde stroming moet de druk dus lineair afhankelijk zijn van de x-coördinaat en onafhankelijk van de y-coördinaat. De stroomlijnen lopen evenwijdig aan de x-as. Opnieuw kunnen we, zij het nu in de drukplots, waarnemen dat de stroming zich voor de lagere Reynoldsgetallen in de loop van het trekkanaal volledig ontwikkelt. We wijzen eveneens op het feit dat de druk in het trekkanaal afneemt als het Reynoldsgetal toeneemt. Dit is te verwachten als we ons realiseren, dat de weerstand voor lagere Reynoldsgetallen in het trekkanaal groeit. Verder kunnen we uit de drukplots aflezen dat zowel op $x = 0$ als $x = 587$ aan de gestelde randvoorwaarden $p = p_{\text{omgeving}}$ is voldaan. Verder is rondom de luchtinlaat, $x = \pm 16$, te zien dat ter plaatse een onderdruk heerst.
De figuren 10.8 en 10.9 dienen naast hun fysische interpretatie nog een tweede doel. Voor lage Reynoldsgetallen is de sterke diffusie en de resulterende volledige ontwikkeling in de loop van het trekkanaal te verwachten. De daadwerkelijke representatie van deze resultaten wekt vertrouwen voor de numerieke berekeningen welke we met de CWI-code zijn uitgevoerd. Daarnaast wekken de machplots en met name

de sterke variatie tussen de Reynoldsgetallen 10^4 en 10^5 vertrouwen voor de gebruikte discretisatiemethoden. Voor hoge Reynoldsgetallen zijn Reynolds variaties veelal niet meer goed zichtbaar in de numerieke resultaten van het stromingspatroon. De rol van numerieke diffusie overheerst de rol van de daadwerkelijke diffusie. In ons geval is daarvan nog geen sprake.

De beoordeling van de drie situaties op basis van de trekkrachtgeneratie

Met onze trekkrachtmaat beoordelen we de drie stromingsproblemen op hun vermogen om trekkracht te genereren. In tabel 10.1 staat de trekkrachtmaat voor de drie Reynoldsgetallen gegeven.

Re	10^3	10^4	10^5
$F^{\mathrm{num}}_{\mathrm{trek}_{\mathrm{relatief}}}$	-0.57	-0.33	0.36

Tabel 10.1: Evaluatie van de relatieve numerieke trekkrachtmaat voor de verschillende Reynoldsgetallen in een rechte blazergeometrie

Voor de Reynoldsgetallen $\mathrm{Re} = 10^3$ en $\mathrm{Re} = 10^4$ is de totale trekkracht negatief. Dit duidt op een hevige terugstroming langs delen van het symmetrievlak. Dit is ongunstig voor de daadwerkelijk gegenereerde trekkracht in de spleetblazer. Op basis van onze numerieke resultaten zullen we gaan bekijken of inderdaad terugstroming ten gevolge van verstopping is opgetreden. We beschouwen daartoe het snelheidsveld rondom de luchtinlaat.

Figuren 10.10 en 10.8

We beschouwen het snelheidsveld rondom de luchtinlaat voor de verschillende Reynoldsgetallen. Het snelheidsveld over de hele trekkanaalbreedte staat geplot op een gebiedje van $14.5 \leq x \leq 18$. De luchtinlaat is expliciet in de figuur aangegeven. Voor $\mathrm{Re} = 10^3$ en $\mathrm{Re} = 10^4$ treedt inderdaad een overstromingswervel op. Langs het symmetrievlak zien we een sterke terugstroming optreden. Daarbij is duidelijk waarneembaar dat hoe lager het Reynoldsgetal, hoe sterker de terugstroming. In figuur 10.8 staan de snelheidsprofielen aan de draadinlaat geschetst. Voor $\mathrm{Re} = 10^3$ en $\mathrm{Re} = 10^4$ zien we opnieuw de sterke terugstroming langs het symmetrievlak. De uitstroomsnelheden nemen voor lagere Reynoldsgetallen toe. Voor $\mathrm{Re} = 10^5$ wordt over de volledige breedte van het trekkanaal lucht aangezogen. Dit komt ten gunste aan het debiet dat door het trekkanaal wordt geperst. Na evaluatie van het debiet blijkt bij een $\mathrm{Re} = 10^3$ maar lieft 58% van het ingespoten debiet vanuit de suskamer de blazer via de draadinlaat te verlaten. De sterke terugstroming verklaart de negatieve totale trekkracht. Voor $\mathrm{Re} = 10^5$ nemen we nergens langs het symmetrievlak terugstroming waar.

De mogelijke oorzaken achter de effecten van Reynolds variatie op de trekkracht

Als oorzaak voor de sterke terugstroming in het trekkanaal geldt voor $\mathrm{Re} = 10^3$ en $\mathrm{Re} = 10^4$ incompressibele viskeuze verstopping. Zoals we reeds hebben aangetoond is de stroming voor de lage Reynoldsgetallen in de loop van het trekkanaal volledig ontwikkeld. Compressibele niet-viskeuze verstopping kan naar aanleiding van de Machplots over het gehele trekkanaal simpelweg niet de oorzaak van terugstroming vormen. Nergens nemen we in het trekkanaal een sonisch Machgetal waar. In de geometrie is geen sonische keel aanwezig. Voor $\mathrm{Re} = 10^3$ liggen de berekende snelheden in het trekkanaal zelfs lager dan $M = 0.2$. Des te lager het Reynoldsgetal, des te sterker de weerstand welke de lucht in het trekkanaal ondervindt en dus des te kleiner het maximale debiet welke door het kanaal kan worden geperst.
Met het oog op de generatie van zoveel mogelijk trekkracht in de huidige rechte blazergeometrie geven we aan dat zich tussen de Reynoldsgetallen 10^4 en 10^5 een optimaal Reynoldsgetal bevindt. Deze aanname is opnieuw te verklaren met behulp van de Machplots over het gehele trekkanaal uit figuur 10.7. Voor $\mathrm{Re} = 10^4$ treedt nog terugstroming op in het trekkanaal. De terugstroming kunnen we laten afnemen door het Reynoldsgetal te verhogen. Voor $\mathrm{Re} = 10^5$ treedt geen terugstroming op. Helaas liggen bij dit Reynoldsgetal de snelheden langs het symmetrievlak vanaf $x = \pm 80$ tot aan het einde van de blazer echter aanmerkelijk lager dan de positieve snelheden welke in het symmetrievlak voor $\mathrm{Re} = 10^4$ zijn

berekend. Voor $\mathrm{Re} = 10^5$ blijft de luchtstraal vanuit de suskamer langs de vaste wand plakken. Doordat terugstroming ontbreekt, valt de trekkrachtmaat voor dit Reynoldsgetal echter toch nog hoger uit dan voor $\mathrm{Re} = 10^4$. Een sterkere mate van diffusie in het trekkanaal, opdat de straal sneller over de breedte van het trekkanaal uitsmeert, lijkt voor trekkrachtverhoging gewenst. Dit duidt op de keuze van een Reynoldsgetal, dat lager ligt dan $\mathrm{Re} = 10^5$. We moeten het Reynoldsgetal dus zodanig kiezen dat het groot genoeg is om de weerstand in het trekkanaal zodanig in te perken dat terugstroming wordt voorkomen. Daarnaast moeten we echter nog voldoende diffusie toestaan om de straal in een beperkte mate over de breedte van het trekkanaal te laten diffunderen.

Ter herinnering merken we nogmaals op dat het Reynoldsgetal is gedefinieerd als

$$\mathrm{Re} = \frac{c_{\mathrm{sus}} l}{\nu},$$

waarin l stond voor de breedte van het trekkanaal. De Reynolds variaties in de testcases zijn te realiseren door variaties in c_{sus} en ν. l is constant gehouden. Naast Reynolds variatie kunnen we eventueel verstopping waarnemen indien we een diffusorgeometrie beschouwen, waarin we de diffusorbreedte hstep variëren. We gaan uit van de diffusorgeometrie zoals deze in paragraaf 9.2.4 is beschreven. De stromingsberekeningen vinden plaats voor een vast Reynoldsgetal. De karakteristieke lengte l, welke in het Reynoldsgetal is verwerkt als de (karakteristieke) breedte van het trekkanaal, is betrokken op de breedte van het trekkanaal direct na de luchtinlaat. Voor de diffusorgeometrieën, waarin hstep is gevarieerd, blijft zodoende het Reynoldsgetal constant. We werken met het Reynoldsgetal, $\mathrm{Re} = 2.4 \cdot 10^4$, dat aansluit op de blazergeometrie uit de proefmachine.
Variaties in de diffusorbreedte kunnen zowel van invloed zijn op het effectieve doorstroomoppervlak uit de redenering, die naar compressibele niet-viskeuze verstopping heeft geleid, als op het doorstroomdebiet uit de redenering omtrent de incompressibele viskeuze verstopping. In het laatste geval moeten we ons realiseren dat de stroming hoogst waarschijnlijk pas na de verbreding volledig ontwikkeld is. De kanaalbreedte uit vergelijking (10.10) heeft dan betrekking op de maximale breedte van het trekkanaal in de diffusorgeometrie.

10.6 Numerieke resultaten onder variaties in de diffusorbreedte

Tussen xupstep=91 en xdownstep=243 plaatsen we een diffusor in de blazergeometrie. Het trekkanaal ondergaat tussen xupstep en xdownstep een verbreding met respectievelijk nul, een kwart, een halve en driekwart kanaalbreedte, (hstep = 0, 0.25, 0.5, 075). De NS-vergelijkingen worden opgelost voor een $\mathrm{Re} = 2.4 \cdot 10^4$ welke aansluit op de huidige blazergeometrie bij Akzo Nobel.

De beoordeling van de vier situaties op basis van de trekkrachtgeneratie

Met onze trekkrachtmaat beoordelen we de vier diffusor blazergeometrieën op hun vermogen om trekkracht te genereren. In tabel 10.2 staat de trekkrachtmaat voor de vier diffusorbreedtes gegeven.

hstep	0	0.25	0.5	0.75
$F^{\mathrm{num}}_{\mathrm{trek}_{\mathrm{relatief}}}$	0.11	0.59	1	1.15

Tabel 10.2: Evaluatie van de relatieve numerieke trekkrachtmaat voor verschillende diffusorbreedtes in een diffusor blazergeometrie

In alle gevallen levert de blazer een positieve trekkracht. Vooralsnog neemt de trekkracht toe met diffusorverbreding.

Figuren 10.12 en 10.13

We bekijken het snelheidsveld rondom de luchtinlaat, zie figuur 10.12. Alleen in het geval van een rechte blazergeometrie nemen we terugstroming waar. De terugstroming is voor het Reynoldsgetal $\mathrm{Re} = 2.4 \cdot 10^4$ echter vrij zwak. Dat blijkt ook als we naar de trekkrachtmaat voor het rechte trekkanaal kijken. De totale trekkrachtmaat welke in de blazer wordt gegenereerd is ondanks de terugstroming positief. De Reynolds regio, waarin zich voor een recht trekkanaal een optimale waarde moest bevinden met het oog op trekkrachtgeneratie is teruggedrongen tot het Reynolds gebied $2.4 \cdot 10^4 \leq \mathrm{Re} \leq 10^5$. Voor de overige drie blazergeometrieën met verbreding is geen terugstroming gevonden. Uit de snelheidsvelden blijkt verder dat met de verbreding van het trekkanaal de hoeveelheid aangezogen lucht van boven de blazer toeneemt. Dit is gunstig uit het oogpunt van trekkrachtgeneratie, zoals uit tabel 10.2 kan worden waargenomen. De snelheidsprofielen aan de draadinlaat bevestigen de toename van aangezogen lucht onder een toename in de diffusorbreedte, zie figuur 10.13.

Figuren 10.14 en 10.15

Als we naar de plots van het Machgetal uit figuur 10.14 kijken, zien we naast een hoog Machgetal rond de luchtinlaat het Machgetal toenemen langs het symmetrievlak rondom de kanaalverbreding. Deze groei is met name voor hstep = 0.5 en 0.75 goed zichtbaar. De stroming voor deze beide gevallen is vanaf $x = 350$ nagenoeg volledig ontwikkeld, maar tussen de luchtinlaat en de verbredingregio voeren compressibele stromingsaspecten de overhand. Het gas expandeert, de snelheid groeit en de druk neemt af. Uit de drukplots, zie figuur 10.15, is rondom de verbreding een afname van de druk zichtbaar. De afname van de druk resulteert ten gevolge van de expansie van het gas en wegens de weerstandsreductie in het trekkanaal doordat het kanaal wordt verbreed. Uit de drukplots kunnen we eveneens verklaren dat voor een grotere kanaalverbreding de aanzuiging van lucht van boven de blazer toeneemt. Onder invloed van de lagere druk in de bredere trekkanalen wordt meer lucht van boven de blazer aangezogen. Voor geometrieën met een verbreding ligt de druk over het gehele trekkanaal aanmerkelijk lager dan in de rechte geometrie. Voor een sterke verbreding kan zelfs ter plaatse een onderdruk resulteren.

De mogelijke oorzaken achter de effecten van diffusorbreedte variatie op de trekkracht

De snelheidsverhoging in de x-richting dankzij de expansie van het gas komt de trekkrachtgeneratie in de blazer ten goede. Daarnaast heeft eveneens de extra toestroom van lucht via de draadinlaat een positieve uitwerking op de trekkracht. De druk in het trekkanaal neemt naast de expansie van het gas toe door de weerstandsreductie ter hoogte van de verbreding in het trekkanaal. Dankzij de verbreding is het mogelijk een groter debiet door de spleetblazer te laten stromen. Opnieuw nemen we geen sonische keel waar in de Machplots, ofwel de verbreding reduceert in de huidige geometrie de kans op incompressibele viskeuze verstopping. Daarbij merken we op dat de verbreding het eveneens mogelijk maakt, dat de snelheden in het trekkanaal groeien. De toename in de trekkracht ten gevolge van toename in de diffusorbreedte is echter niet oneindig. De trekkrachtmaat groeit tussen de overgang van hstep = 0.5 en 0.75 al niet meer zo sterk als tussen de overgang van hstep = 0.25 en 0.5. Een directe verklaring ligt in het feit dat met een te grote breedte van het trekkanaal op een gegeven ogenblik ook de snelheid in het symmetrievlak afneemt. We zullen moeten onderzoeken voor welke diffusorbreedte de blazergeometrie met diffusor de meeste trekkracht genereert.

10.7 Numerieke resultaten onder variaties in de diffusorhoogte

In de blazergeometrie uit proefmachine 550 bevindt de verbreding zich op een kortere afstand van de luchtinlaat dan in de geometrie van de proefopstelling, welke in paragraaf 2.3.2 is besproken. In deze paragraaf besteden we aandacht aan drie blazergeometrieën waarin de diffusor ten opzichte van de luchtinlaat is verschoven. Als uitgangspunt hebben we gekozen voor een blazergeometrie met diffusor, waarvan de diffusorbreedte 0.5 bedraagt. De diffusor is uitgesmeerd over een afstand van 152. De diffusor begint respectievelijk op xupstep = $71, 91$ en 111. De berekeningen zijn opnieuw uitgevoerd met het Reynoldsgetal $\mathrm{Re} = 2.4 \cdot 10^4$. De testcase met xupstep = 91 is reeds in de vorige paragraaf beschouwd.

De beoordeling van de vier situaties op basis van de trekkrachtgeneratie

We beoordelen de drie blazergeometrieën met diffusor met variabele diffusorhoogte op hun vermogen om trekkracht te genereren. In tabel 10.3 staat de trekkrachtmaat voor de drie diffusorhoogtes gegeven.

xupstep	71	91	111
$F^{\mathrm{num}}_{\mathrm{trek}_{\mathrm{relatief}}}$	1.09	1	0.92

Tabel 10.3: Evaluatie van de trekkrachtmaat voor verschillende diffusorhoogtes in een diffusor blazergeometrie

Voor een verklaring van de hogere trekkracht welke resulteert in het geval dat de diffusor dichter naar de luchtinlaat is geschoven, wenden we ons tot de snelheidsprofielen aan het begin van de draadinlaat en rondom de luchtinlaat, zie figuur 10.16 en 10.17.

Figuren 10.16 en 10.17

In figuur 10.16 staat het snelheidsprofiel aan de draadinlaat weergegeven. In figuur 10.17 staat het snelheidsveld in de regio rond de luchtinlaat afgebeeld. We zien in figuur 10.16 dat des te dichter de verbreding zich bij de luchtinlaat bevindt, des te meer lucht van boven de spleetblazer wordt aangezogen. De instroomsnelheden aan de draadinlaat zijn voor de blazergeometrie met xstepup=71 groter dan voor het kanaal, waarin de diffusor zich op een hoogte van xstepup=111 bevindt.

Figuren 10.18 en 10.19

De beschrijving van deze figuren varieert nauwelijks van de beschrijving onder de diffusorbreedte variaties. Uit de machplots, zie figuur 10.18, blijkt opnieuw dat het gas rond de verbreding expandeert. Eveneens is af te lezen vanaf waar zich bij benadering een volledige ontwikkelde stroming in het trekkanaal voordoet. Rondom de blazergeometrie is opnieuw een onderdruk waar te nemen. Dit verklaart deels de aanzuiging van de extra lucht van boven de blazer.

De mogelijke oorzaken achter de effecten van diffusorhoogte variatie op de trekkracht

Met de extra aanvoer van lucht van boven de blazer wordt simpelweg een groter debiet door het kanaal geperst. De bijkomende hogere snelheden aan het symmetrievlak zijn gunstig met het oog op trekkrachtgeneratie. Daarnaast is eveneens de expansie van het gas, welke in het trekkanaal voor en rondom de blazer plaatsvindt, gunstig met het oog op extra trekkrachtgeneratie. Als verklaring van de extra aanzuiging van lucht dient ook hier de redenatie van de reductie van de weerstand door verbreding van het trekkanaal. Als we de stap dichter naar de draadinlaat schuiven, treedt eerder weerstandsvermindering op. De kanaalverbreding zet zich vroeger in. De vraag is hoever we de diffusor richting de luchtinlaat kunnen schuiven uit het oogpunt van extra trekkrachtgeneratie. Het antwoord ligt besloten in de vraag op welke wijze een vroegtijdige kanaalverbreding de stroming rond de luchtinlaat beïnvloedt. We hebben hier vooralsnog weinig zicht op. Onder de aanname dat de stroming laminair is, komt verschuiving van de diffusorbreedte tot aan de luchtinlaat overeen met een toename in het Reynoldsgetal van de stroming. In de praktijk zal echter rond de luchtinlaat niet aan deze aanname zijn voldaan. Vooralsnog kan de diffusor echter nog zonder problemen dichter naar de luchtinlaat worden geschoven in verband met een betere trekkrachtgeneratie.

Met onze numerieke resultaten hebben we de invloed op de trekkrachtgeneratie beschouwd onder invloed van Reynolds variaties, variaties in de diffusorbreedte en in de diffusorhoogte. In de eerste twee gevallen geeft de berekende trekkrachtmaat een indicatie voor een optimumwaarde in de variatiemogelijkheid. De verwachting luidt dat zich eveneens in de variatiemogelijkheid van de diffusorhoogte een optimum zal bevinden. We hebben daar echter minder zicht op, zoals reeds eerder is vermeld.

10.8 Compressibele niet-viskeuze verstopping een mogelijke verklaring voor de verbreding?

In paragraaf 10.3.1 hebben we compressibele niet-viskeuze verstopping aangedragen als mogelijke verklaring voor de effectiviteit van de verbreding op de trekkrachtgeneratie in de blazergeometrie. In al onze numerieke berekeningen is echter nergens compressibele niet-viskeuze verstopping waargenomen. Overal geldt in principe $M < 1$. Een sonische keel wordt nergens aangetroffen. Voor een blazergeometrie waar hoge subsone snelheden worden waargenomen, zou echter wel degelijk compressibel niet-viskeus verstoppingsgevaar kunnen dreigen. Dat de verbreding eveneens kan zijn opgenomen om dit gevaar af te wenden, laten we zien aan de hand van metingen van Persoon.

Persoon heeft metingen verricht aan een proefopstelling van de spleetblazer. De geometrie van deze blazer komt overeen met de beschreven blazergeometrie uit hoofdstuk 2.3. De luchtinlaat bevindt zich op zo'n 16 mm afstand van de bovenkant van de blazer. De stap ligt rond een afstand van 167 mm van deze top. De verrichte metingen betreffen snelheid, statische en totale druk. Daarnaast heeft hij onderzoek gedaan naar turbulentie intensiteit in de blazer. Deze laatste gegevens zijn voor ons minder interessant. Wij nemen aan dat de luchtstroming in de spleetblazer laminair is. Voor een beschrijving van de wijze waarop de metingen zijn verricht, verwijzen we naar het afstudeerverslag van Persoon. In bijlage F hebben we enkele van zijn grafieken opgenomen, waarin hij de snelheids- en drukmetingen heeft verwerkt.

De grafieken moeten als volgt worden geïnterpreteerd. De grootheden u, p_{statisch} en p_{totaal} zijn uitgezet tegen de afstand tot de bovenkant van de blazer. In onze notatie drukken we deze afstand uit als de x-coördinaat. De x-coördinaat drukken we in overeenstemming met Persoon uit in dimensies. Per grafiek zijn de grootheden bepaald onder verschillende drukken vanuit de suskamer. De statische druk in de suskamer doorloopt een range van 0.5 tot 6.0 bar. De plots zijn voor ieder drukniveau vanuit de suskamer verschillend gekleurd. De legenda staat naast de grafiek vermeld. De eerste grafiek beschrijft de snelheidsgrootte u. Daarbij moet worden vermeld dat de gemeten snelheden in de blazer overal in de positieve x-richting verlopen. De snelheidsmetingen zijn verricht in het symmetrievlak van de blazer. Evenals wij, heeft Persoon aangenomen dat de filamenten geen invloed uitoefenen op de stroming. In zijn proefopstelling zijn geen filamenten geplaatst. De tweede grafiek uit bijlage F geeft de statische druk aan de wand van de spleetblazer als functie van de afstand x tot aan de top van de blazer weer. De afstand tot de top van de spleetblazer, waarop de luchtinlaat en stap zich bevinden, staat expliciet in de plot aangegeven. De laatste grafiek zet, op dezelfde wijze als voor de druk en snelheid is gedaan, de totale druk uit tegen de afstand in mm. vanaf de top van de spleetblazer (x). De totale drukken zijn in het midden van het trekkanaal gemeten.

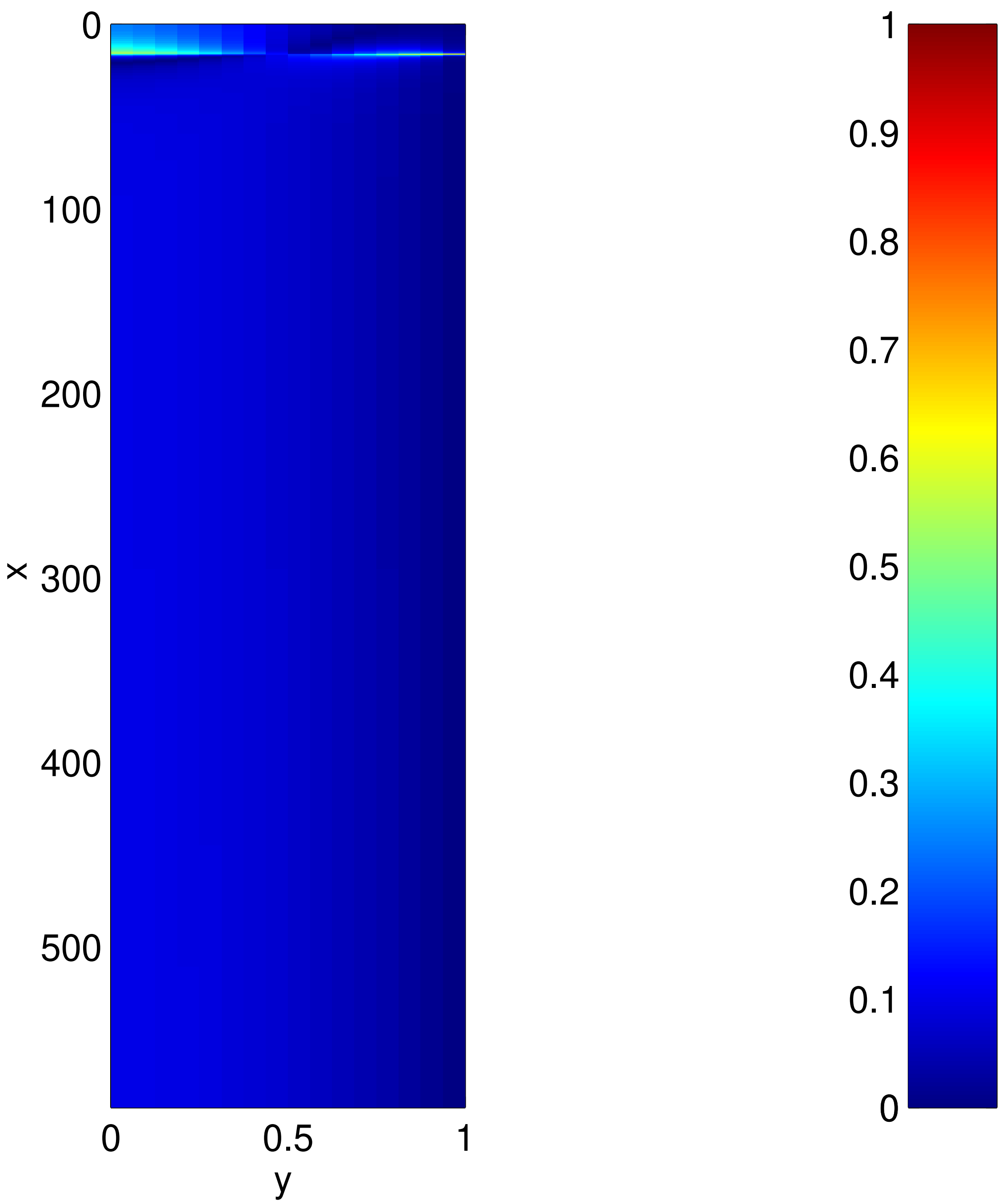
Als trekkrachtmaat passen we vergelijking (10.1) toe. Op basis van de argumenten uit paragraaf 10.2 kiezen we als snelheid langs de filamenten de snelheid, die in het symmetrievlak is gemeten. Persoon heeft net als wij aangenomen dat de filamenten geen invloed uitoefenen op de luchtstroming in de blazer. De trekkrachtmaat werkt analoog aan onze numerieke relatieve trekkrachtmaat. Misschien ten overvloede vermelden we nogmaals dat de trekkrachtmaat uit vergelijking (10.1) impliceert dat hoge snelheden in het symmetrievlak corresponderen met een hoge trekkracht. Een verklaring voor de opname van de verbreding in de blazergeometrie moeten we op basis van bovenstaande trekkrachtmaat dus zoeken in zijn effect op de snelheid in het symmetrievlak van het trekkanaal. We nemen hiertoe de snelheidsgegevens van Persoon onder de loep.

We beschouwen de snelheidscurve onder een suskamerdruk van 6.0 bar. Onder zeer hoge snelheid $\pm M = 1$ wordt vanuit de suskamer perslucht de blazer ingespoten. Dit verklaart de hoge piek in de curve van de snelheid ter plaatse van de luchtinlaat. Voor de luchtinlaat is reeds lucht in de blazer aanwezig. Zoals uit de drukplot is te zien, heerst rond de luchtinlaat een onderdruk. Ten gevolge van deze onderdruk stroomt lucht van boven de spleetblazer de blazer in. Na de luchtinlaat, 50 mm $\leq x \leq$ 80 mm zakt de snelheid hard in elkaar. In dit gebied treedt waarschijnlijk turbulente menging op. Bij dit proces gaat veel bewegingsenergie verloren. De snelheid neemt af. Na ± 80 mm wordt de stroming min of meer laminair en expandeert het gas. De druk neemt af en de snelheid neemt toe. Ter hoogte van de stap zien we vervolgens opnieuw de snelheid afnemen. Waarna waarschijnlijk opnieuw turbulente menging en circulaties optreden. Dit gebeurt eveneens ten koste van de bewegingsenergie. De snelheid neemt af. Vervolgens stelt zich op een afstand van ±250 mm van de bovenkant van de blazer een laminaire stroming in. De snelheid neemt tot aan het einde van het trekkanaal toe.

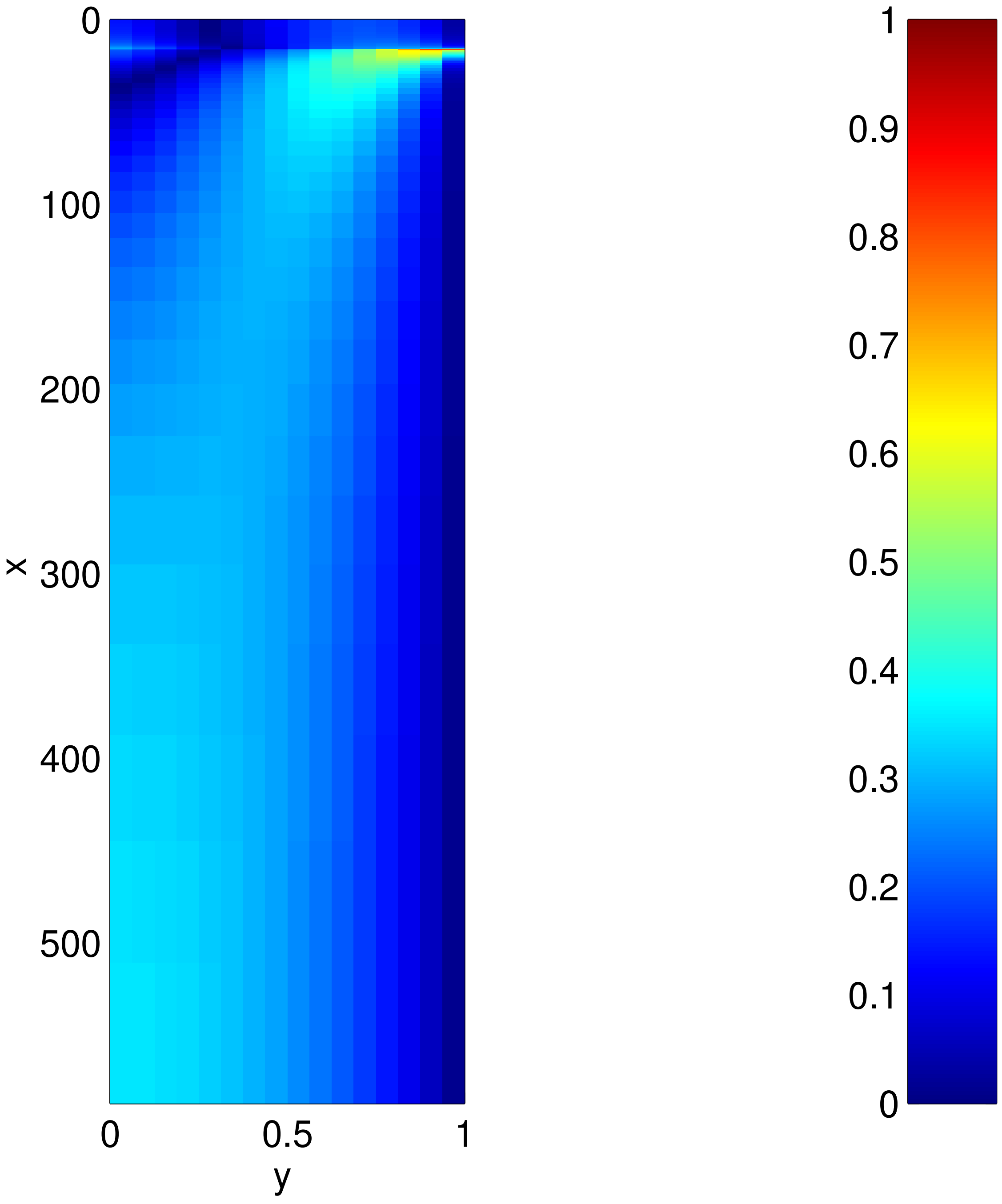
Stel dat de stap rond $x = 167$ mm niet in de geometrie zou zijn opgenomen. Hoe zou het snelheidsprofiel in het midden van het kanaal er dan hebben uitgezien? We nemen aan dat de ingezette expansietrend zich voortzet. We plaatsen hierbij de kanttekening dat wij in onze numerieke berekeningen voor de rechte blazergeometrieën geen expansie langs het symmetrievlak hebben waargenomen. In de diffusorgeometrieën was hiervan wel sprake. De vraag is dan ook of de hierbeschouwde voortzetting van de expansietrend relevant is. We zetten dit even terzijde. Voor de verbreding meet Persoon een snelheid van ±275 m/s. Onder de voortgezette expansietrend groeit en groeit de snelheid. Op deze wijze klimt de snelheid steeds dichter naar de geluidssnelheid. Welke waarde de geluidssnelheid exact heeft, is niet bekend. De geluidssnelheid hangt af van de temperatuur in de blazer, $c^2 = \gamma RT$. Grote temperatuurvariaties in de blazer zijn echter niet bekend. Dit blijkt ook uit onze numerieke resultaten. De geluidssnelheid zal dus zo rond de 330 m/s liggen. Als de snelheid gelijk wordt aan de geluidssnelheid, ofwel $M = 1$, dan is het trekkanaal choked. In het trekkanaal treedt compressibele niet-viskeuze verstopping op.

De numerieke resultaten pleiten voor een verklaring van de effectiviteit van de verbreding op de trekkrachtgeneratie in de richting van reductie van incompressibele viskeuze verstopping. Zoals in deze paragraaf is beschreven, mogen we compressibele niet-viskeuze verstopping niet geheel zonder meer uitvlakken. Hoe dan ook, de verbreding lijkt in het kanaal te zijn opgenomen om verstopping in welke vorm dan ook te voorkomen.

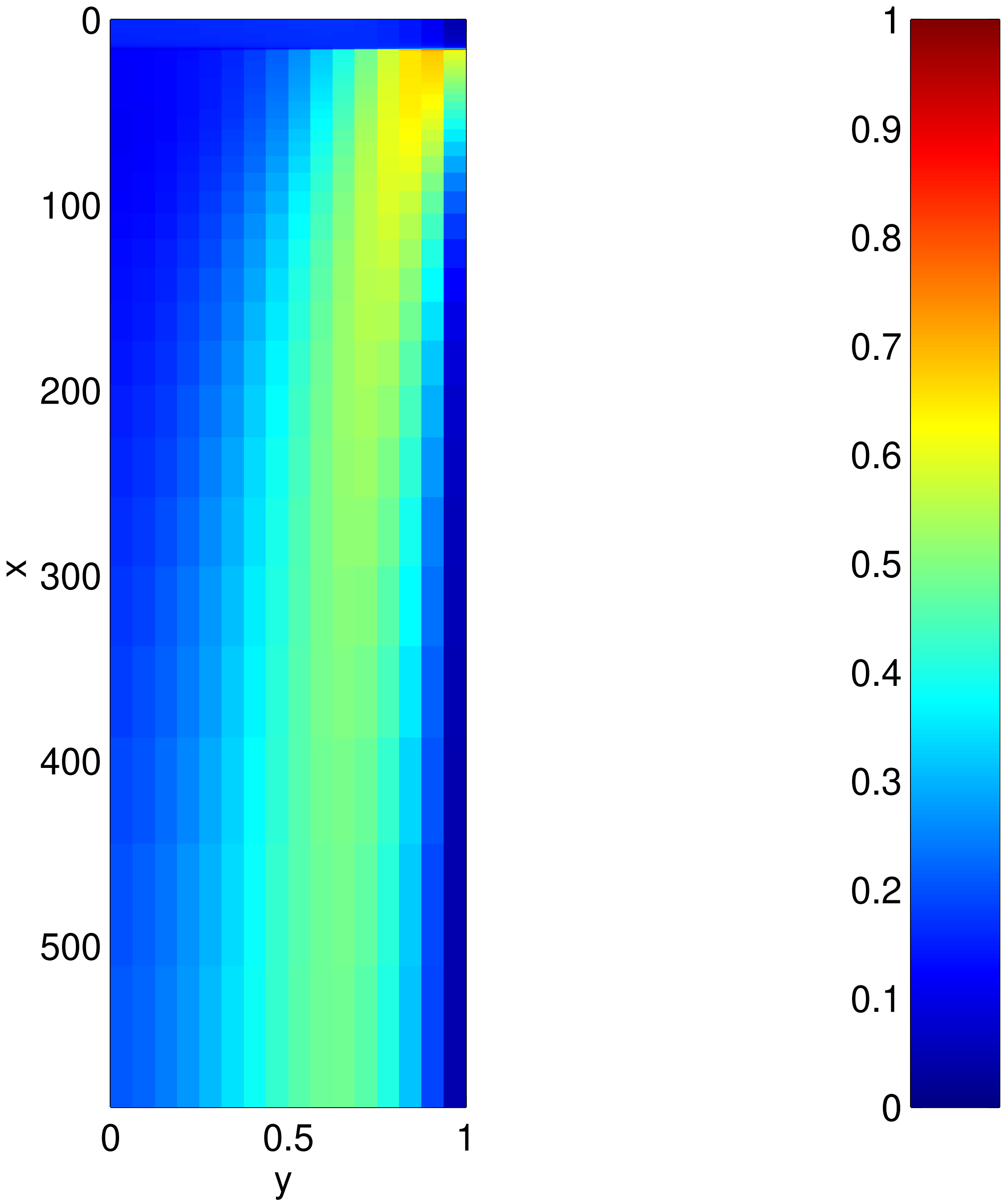
Als laatste merken we op dat uit de resultaten van Persoon is af te leiden dat over de luchtinlaat een grote drukval plaatsvindt. Als we onder een suskamerdruk van 6.0 bar perslucht het trekkanaal inblazen, dan blijkt onder de luchtinlaat maximaal een druk van ± 1.6 bar te worden gemeten. De drukval over de draadinlaat is gigantisch groot. De hoge kosten, die gepaard gaan met het aanleveren van perslucht onder druk van 6.0 bar worden grotendeels in de luchtinlaat verbruikt. Het is met name interessant om in verder onderzoek de luchtstroming in de luchtinlaat te beschouwen. Met meer inzicht in de stroming in de luchtinlaat kunnen we misschien aanduiden op welke andere wijze dan via geometrieveranderingen in het trekkanaal kostenreductie kan worden gerealiseerd.

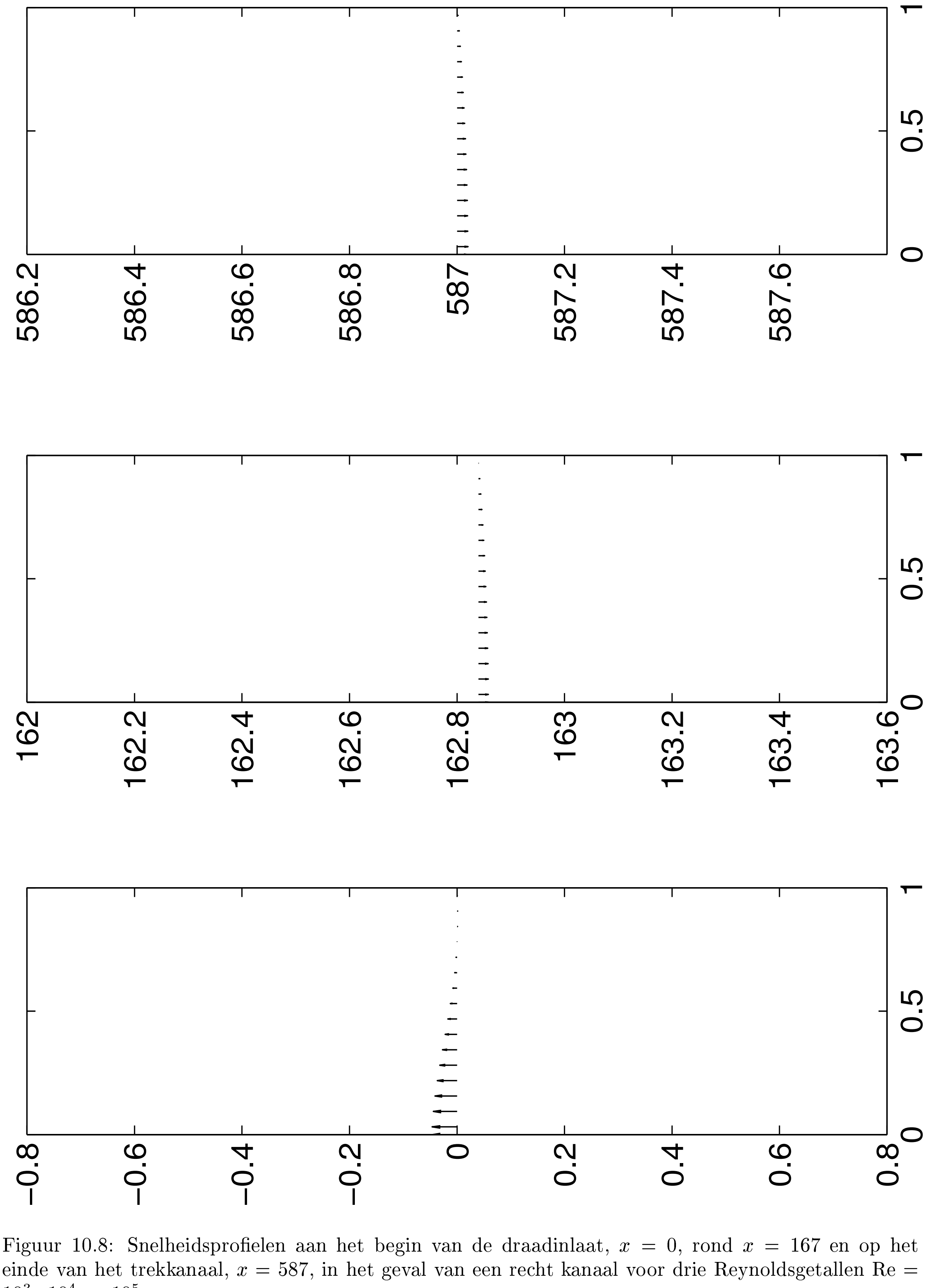


Figuur 10.7: Het Machgetal in het geval van een recht kanaal voor drie Reynoldsgetallen Re $= 10^3,\ 10^4$ en 10^5.

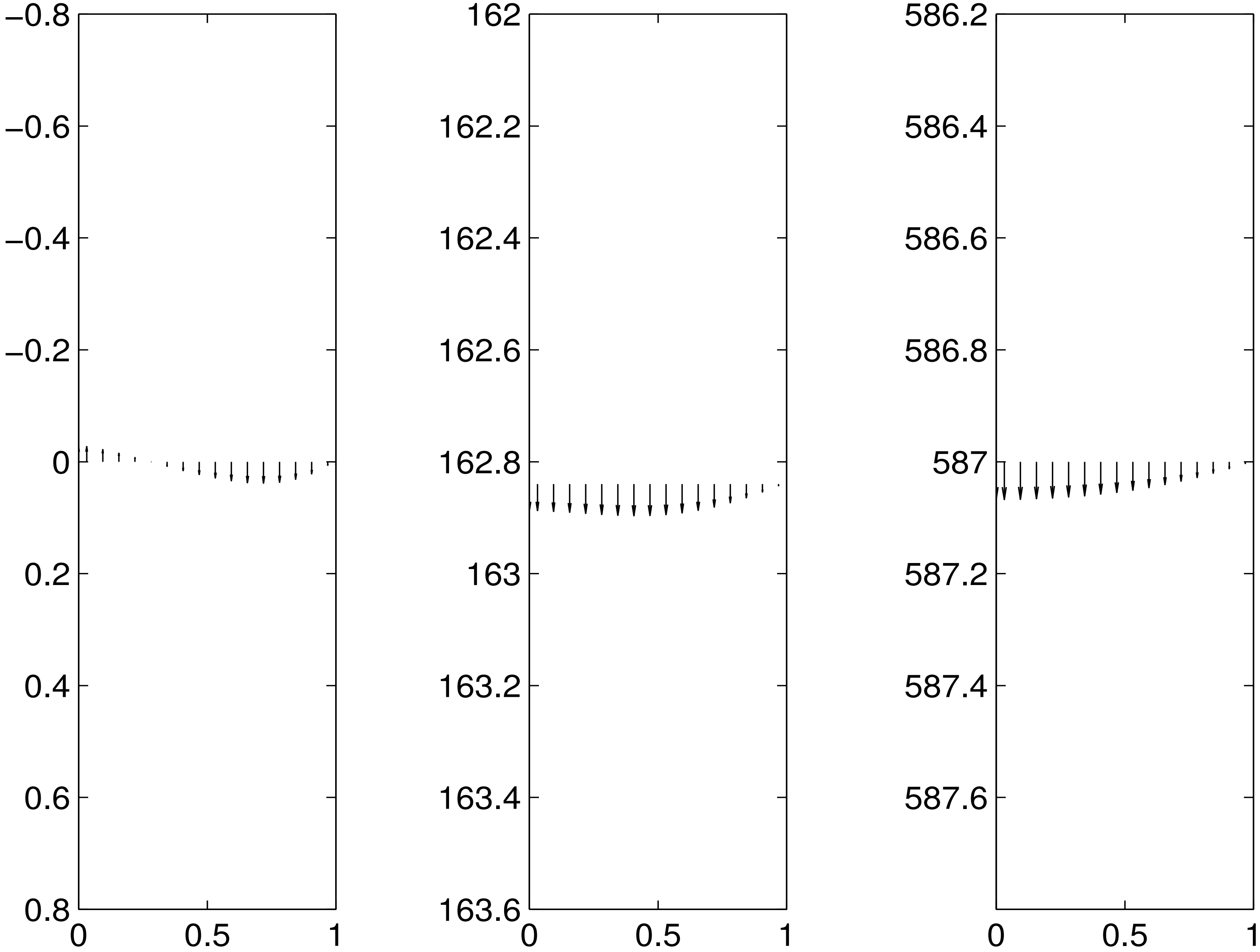


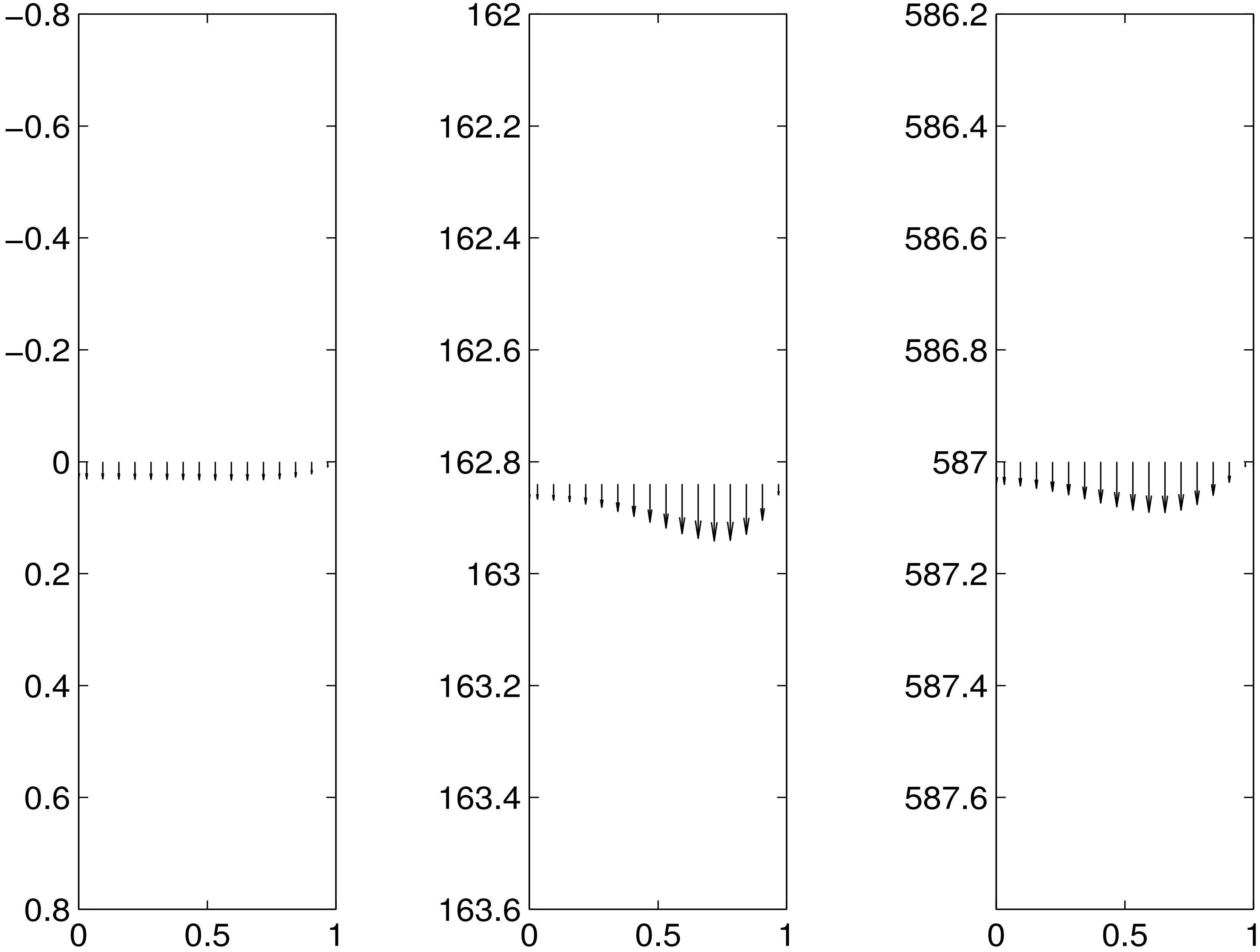
0
100
200
x
300
400
500
0
0.5
1
y
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0


0
100
200
300
400
500
x
0
0.5
1
y
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0

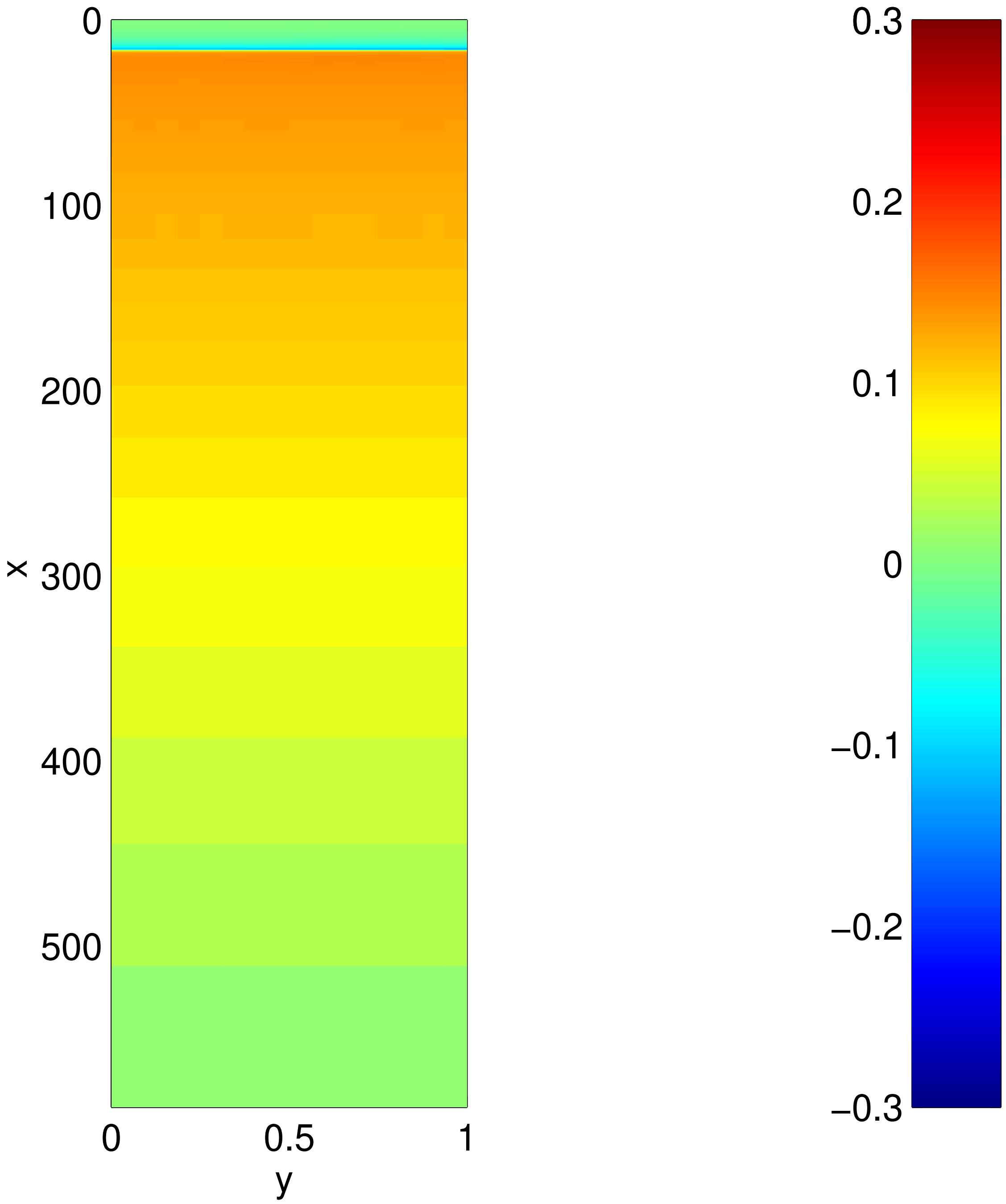


Figuur 10.8: Snelheidsprofielen aan het begin van de draadinlaat, $x = 0$, rond $x = 167$ en op het einde van het trekkanaal, $x = 587$, in het geval van een recht kanaal voor drie Reynoldsgetallen Re $= 10^3,\ 10^4$ en 10^5.

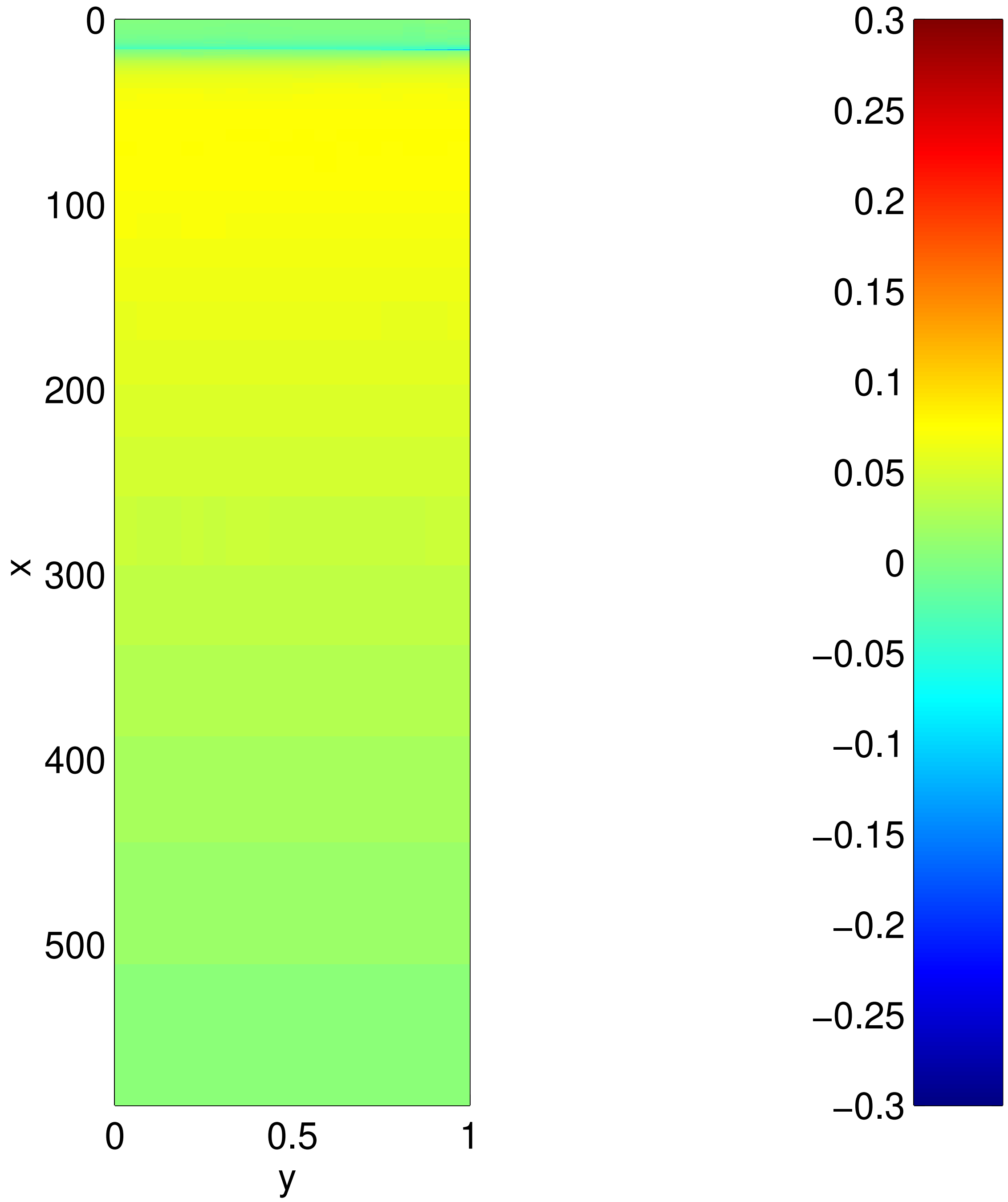

−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
162
162.2
162.4
162.6
162.8
163
163.2
163.4
163.6
586.2
586.4
586.6
586.8
587
587.2
587.4
587.6
0
0.5
1

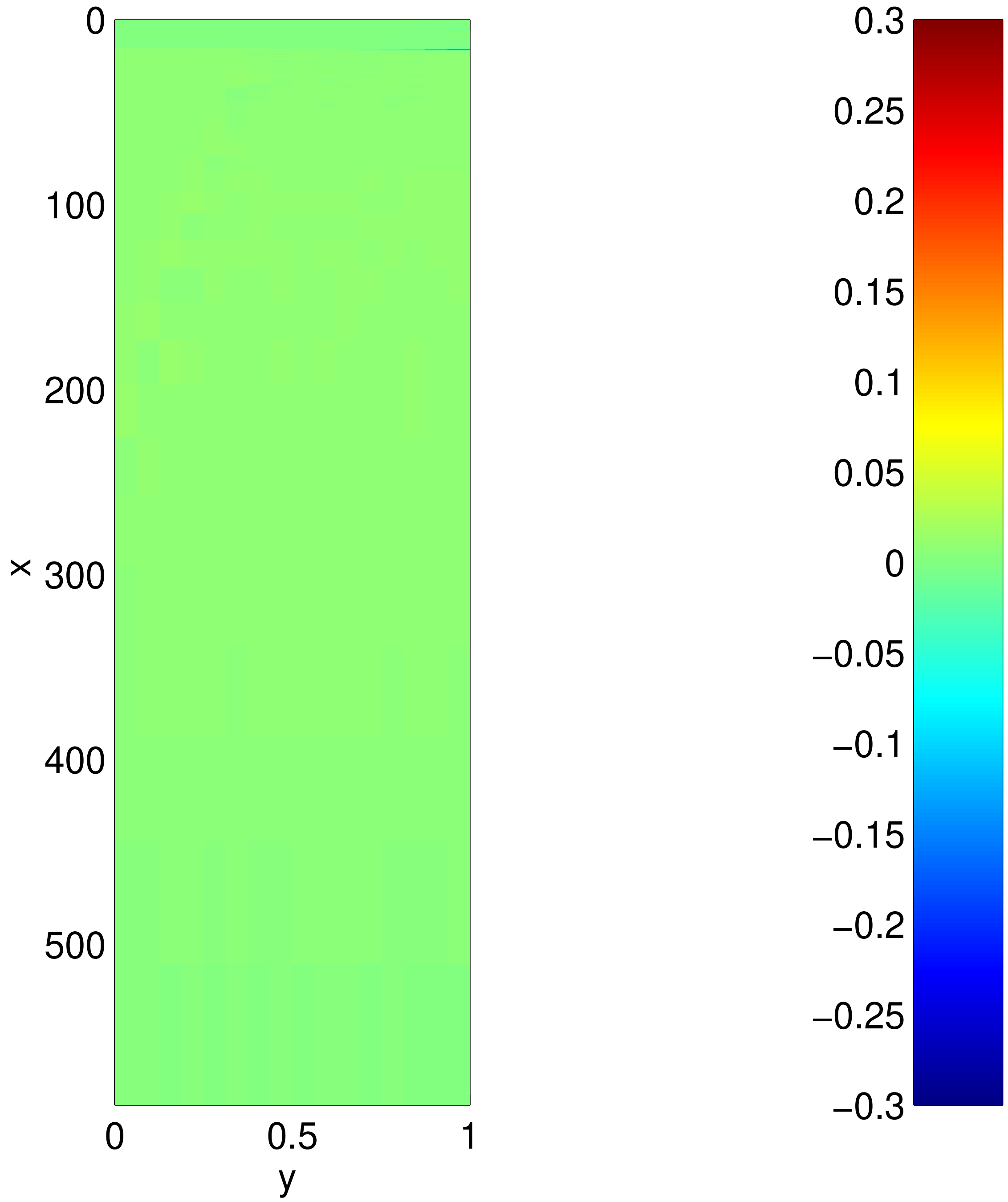


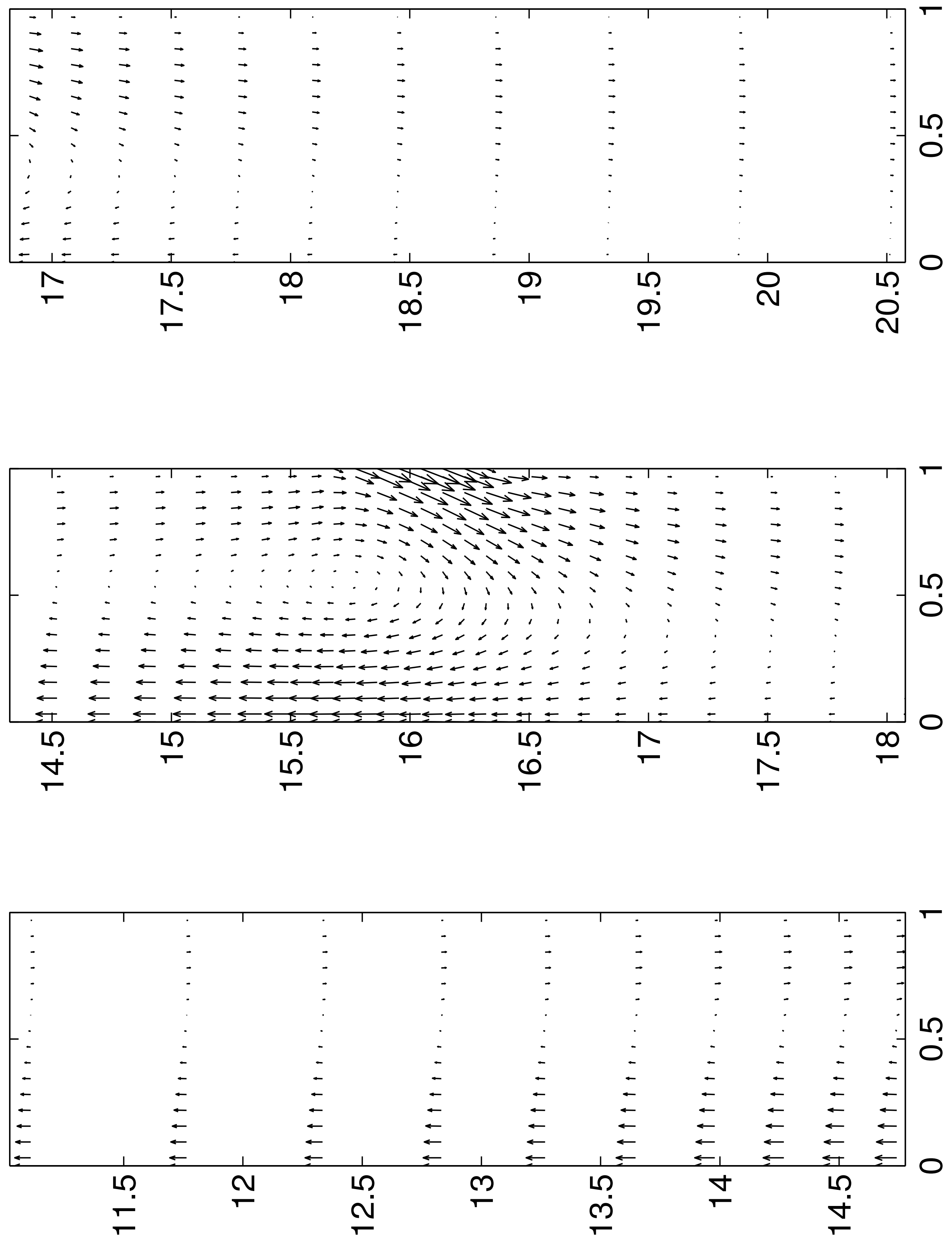
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
0
0.5
1
162
162.2
162.4
162.6
162.8
163
163.2
163.4
163.6
0
0.5
1
586.2
586.4
586.6
586.8
587
587.2
587.4
587.6
0
0.5
1



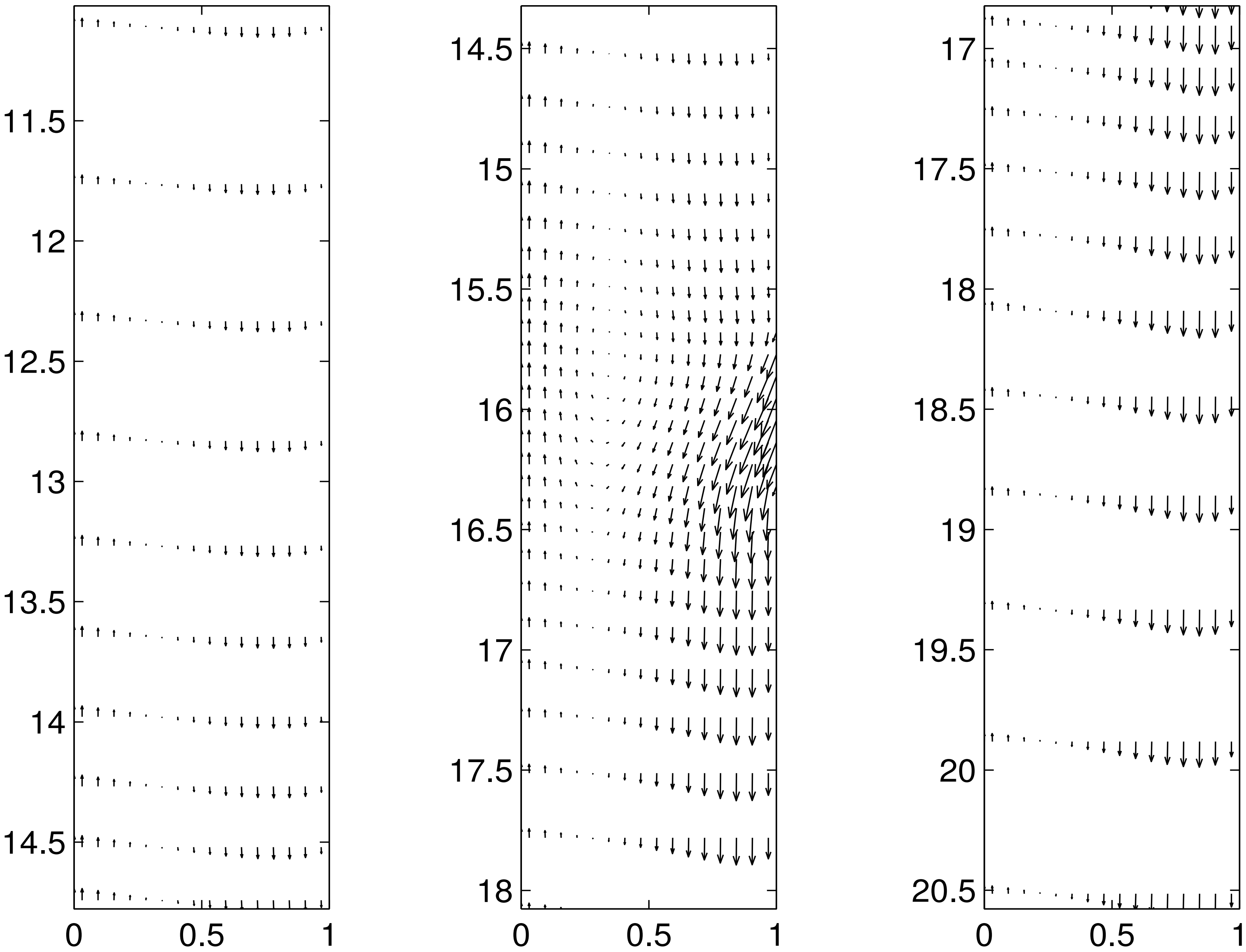
Figuur 10.9: Drukcoëfficiënt $(p - p_{\mathrm{omgeving}})/p_{\mathrm{omgeving}}$ in het geval van een recht kanaal voor drie Reynoldsgetallen $\mathrm{Re} = 10^3,\ 10^4$ en 10^5.

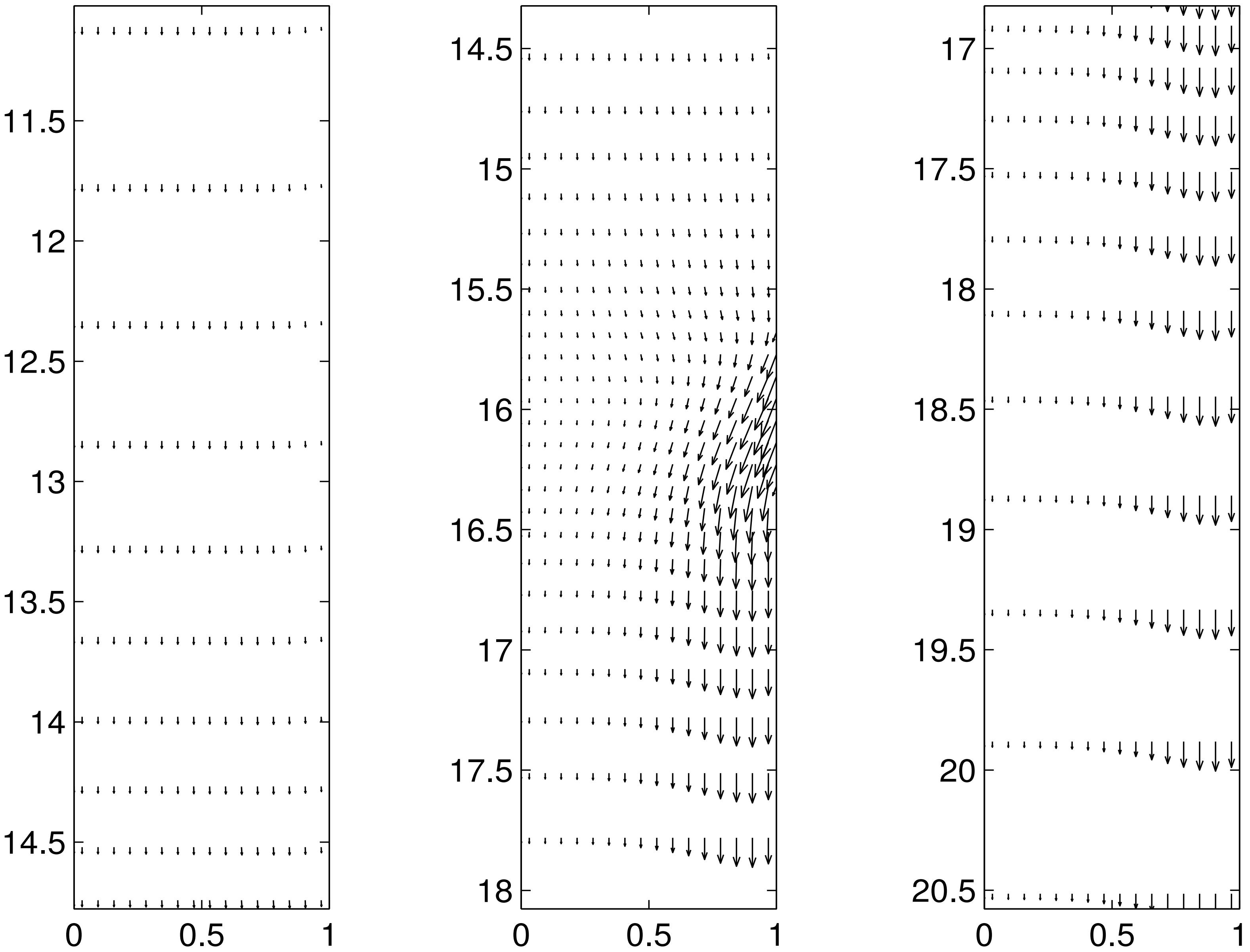

0
100
200
300
400
500
x
0
0.5
1
y
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
−0.05
−0.1
−0.15
−0.2
−0.25
−0.3

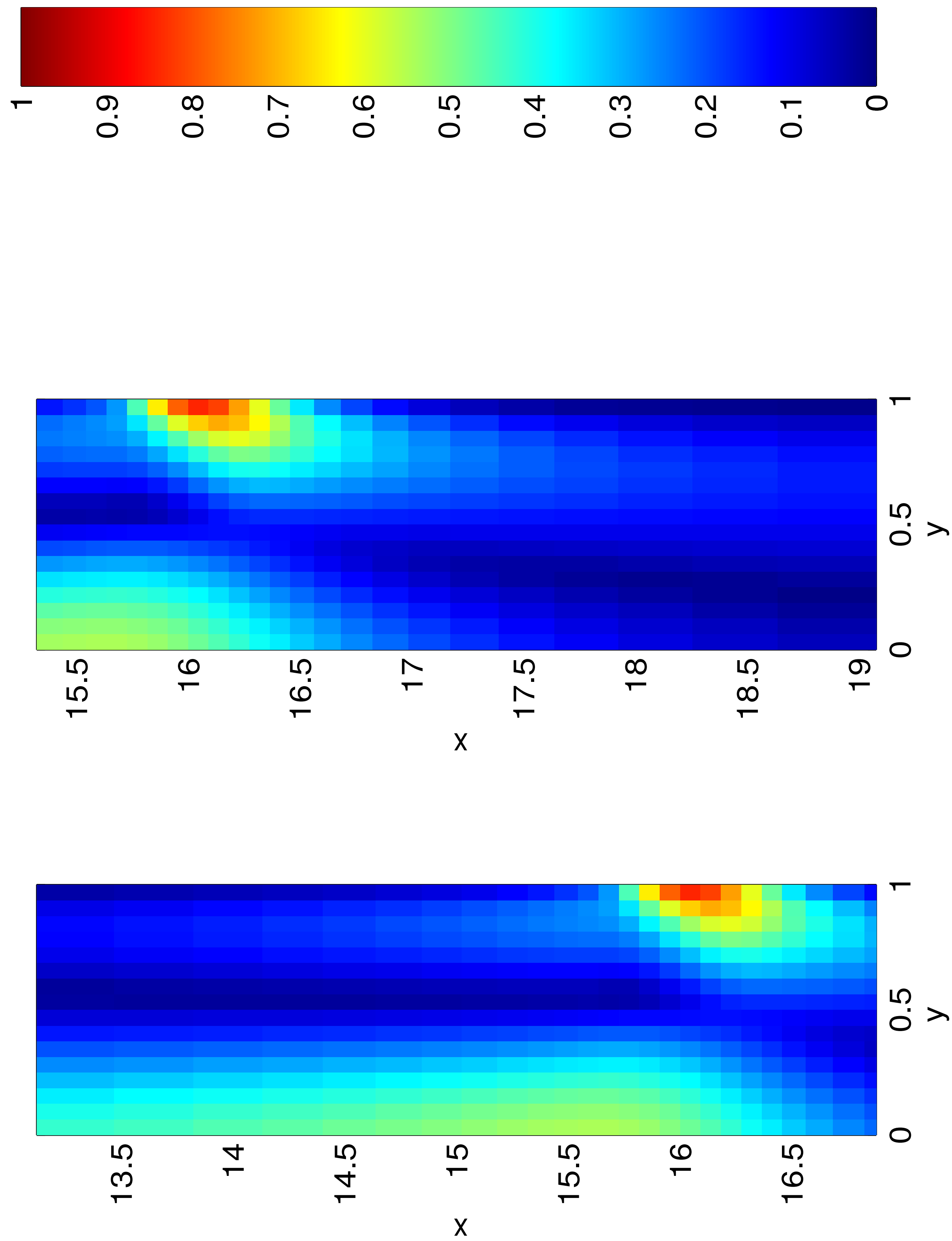

0
100
200
300
400
500
x
0
0.5
1
y
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
−0.05
−0.1
−0.15
−0.2
−0.25
−0.3



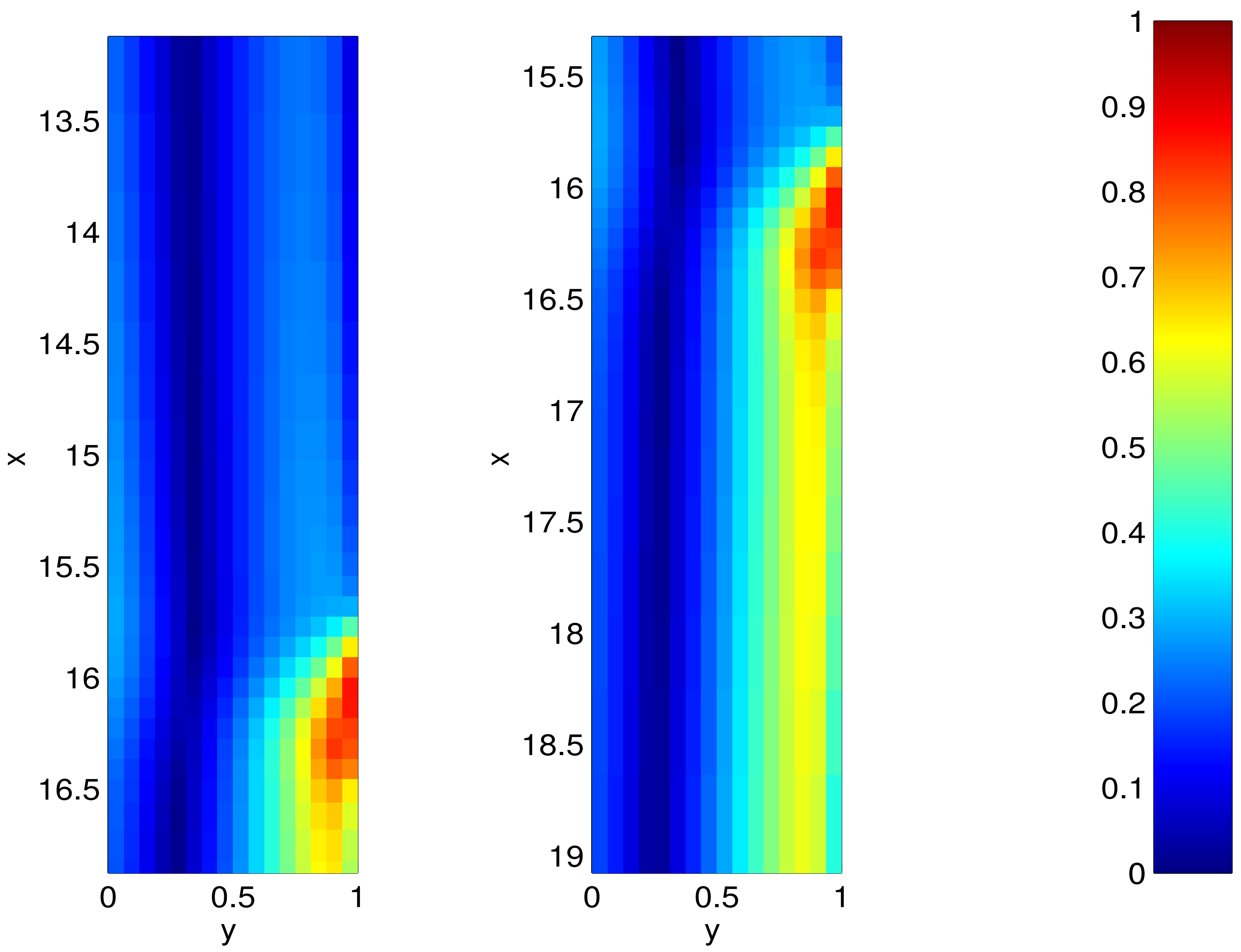
Figuur 10.10: Snelheidsveld rond de luchtinlaat tussen $x = 11.5$ en $x = 20.5$ in een recht kanaal voor drie Reynoldsgetallen $\mathrm{Re} = 10^3,\ 10^4$ en 10^5.

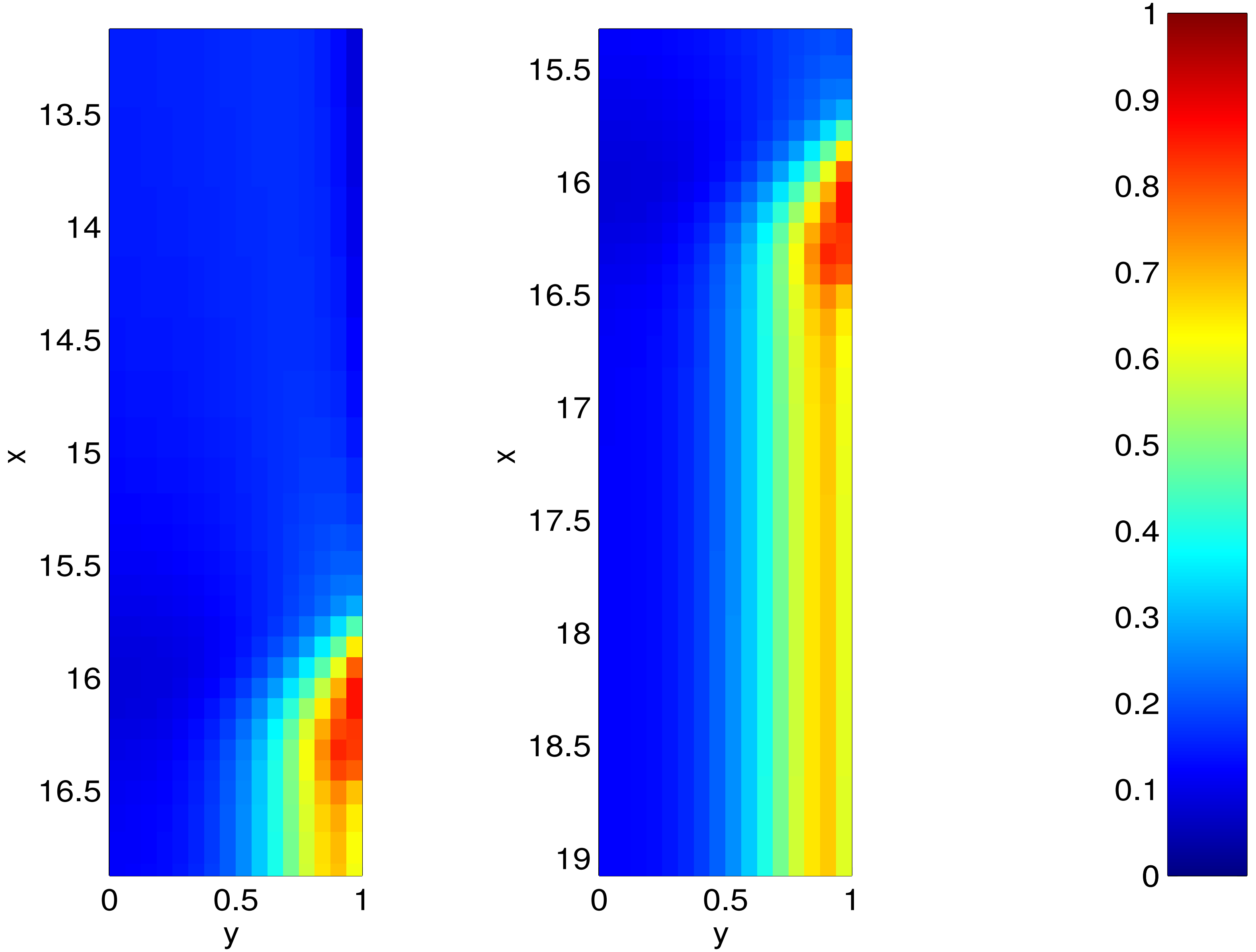

11.5
12
12.5
13
13.5
14
14.5
14.5
15
15.5
16
16.5
17
17.5
18
17
17.5
18
18.5
19
19.5
20
20.5
0
0.5
1


11.5
12
12.5
13
13.5
14
14.5
0
0.5
1
14.5
15
15.5
16
16.5
17
17.5
18
0
0.5
1
17
17.5
18
18.5
19
19.5
20
20.5
0
0.5
1

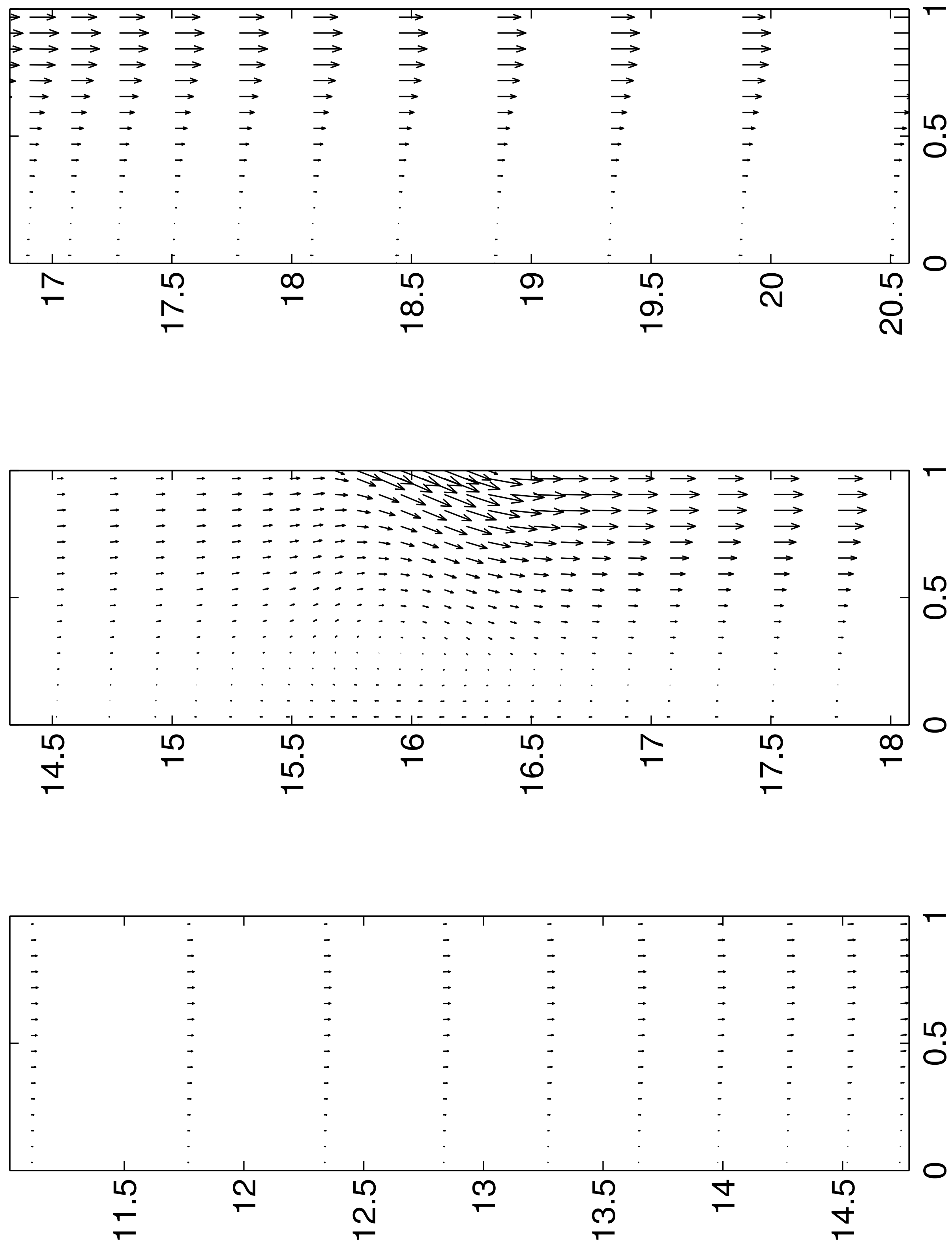


Figuur 10.11: Detail van het Machgetal rond de luchtinlaat tussen $x = 13.5$ en $x = 19$ in een recht kanaal voor drie Reynoldsgetallen $\mathrm{Re} = 10^3,\ 10^4$ en 10^5.

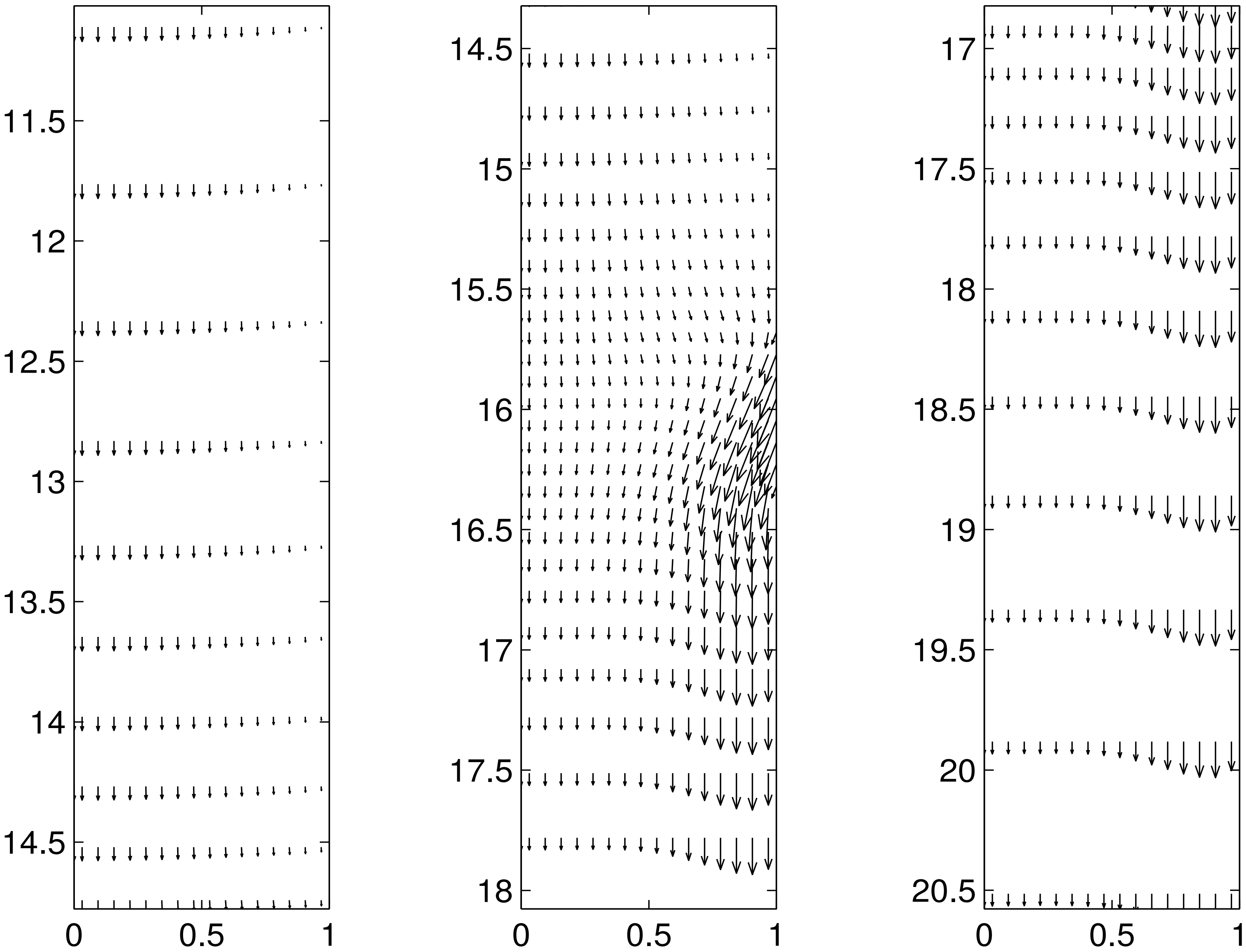

x
13.5
14
14.5
15
15.5
16
16.5
0
0.5
1
y
x
15.5
16
16.5
17
17.5
18
18.5
19
0
0.5
1
y
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0

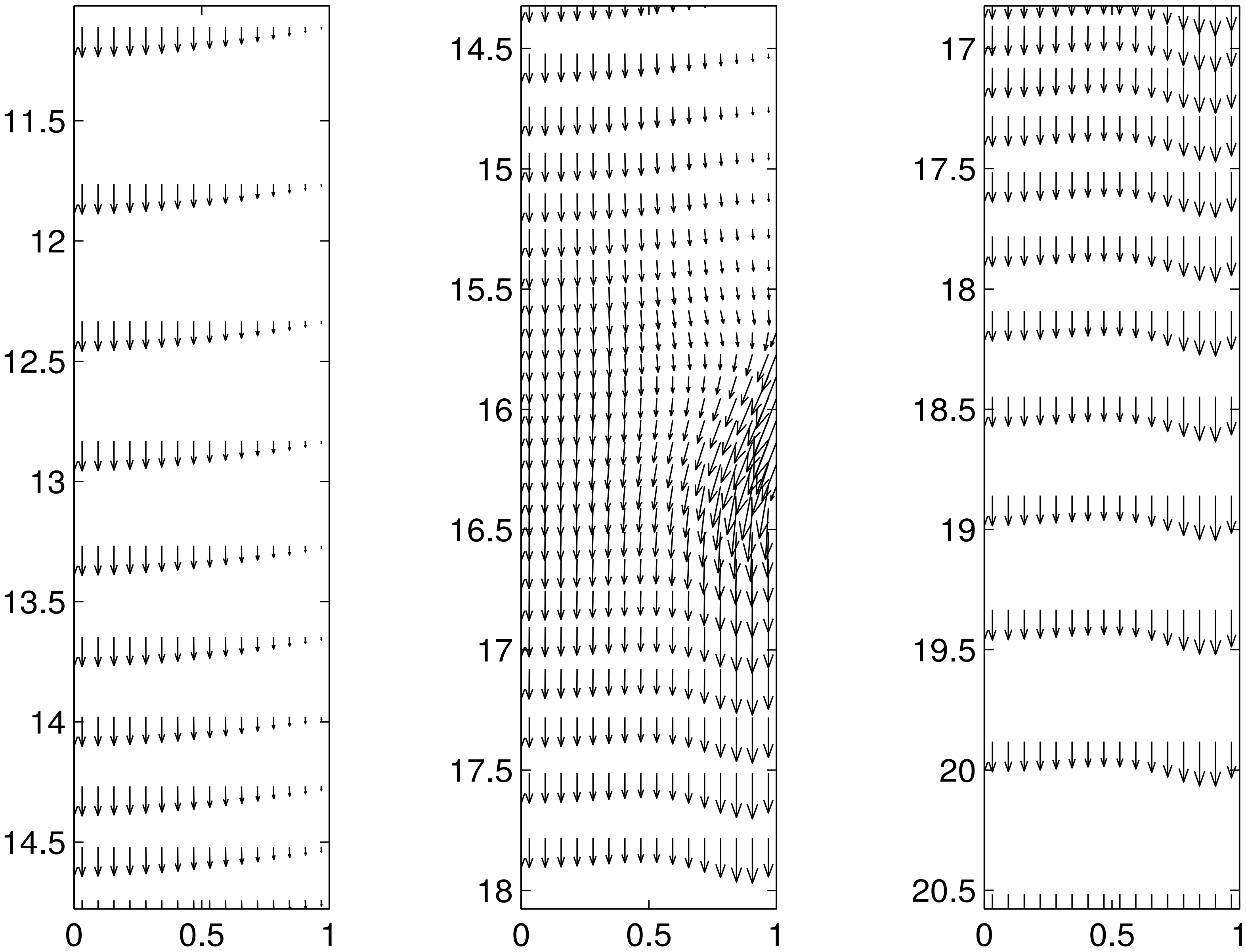


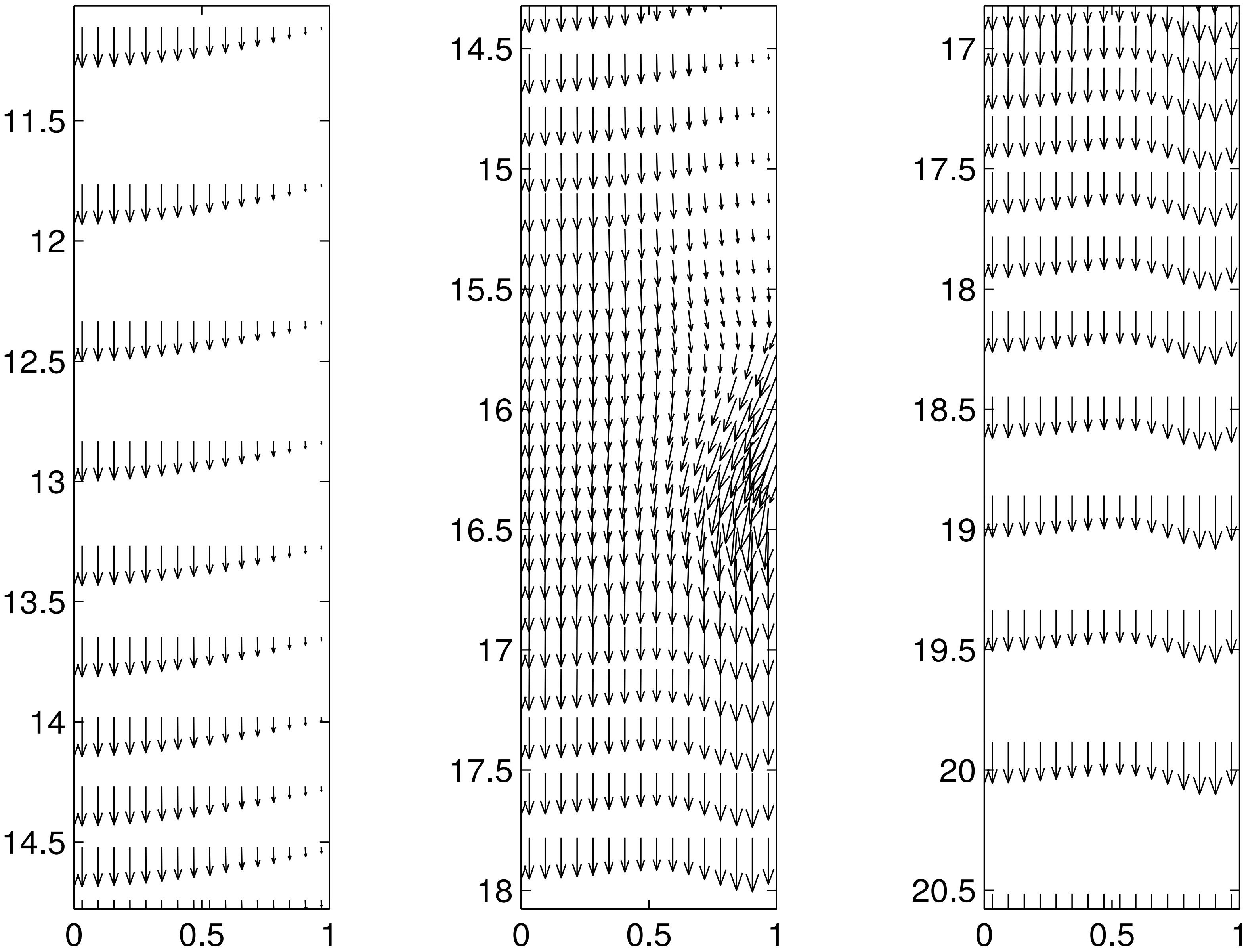
13.5
14
14.5
15
15.5
16
16.5
x
0
0.5
1
y
15.5
16
16.5
17
17.5
18
18.5
19
x
0
0.5
1
y
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0

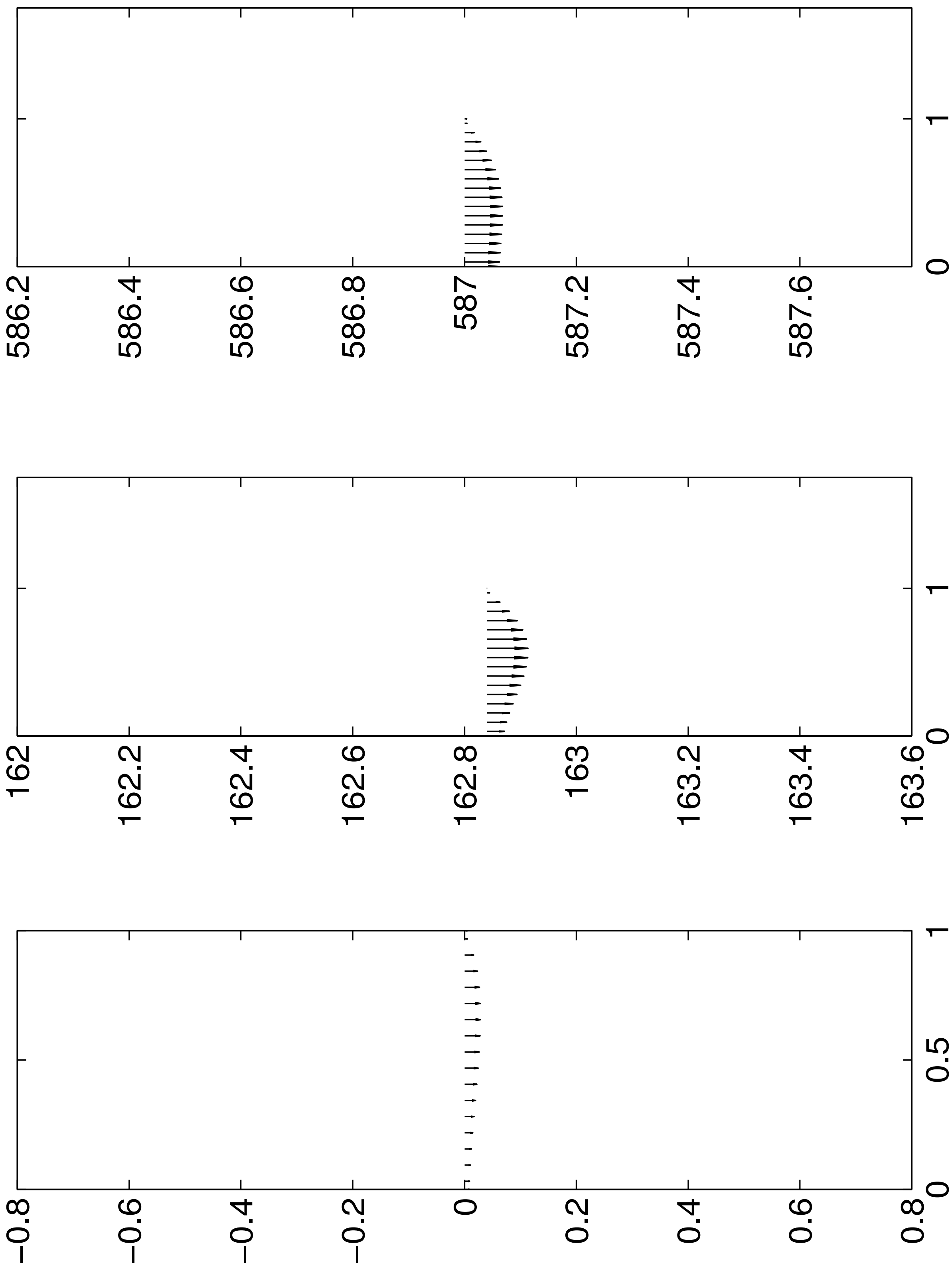


Figuur 10.12: Snelheidsveld rond de luchtinlaat tussen $x = 11.5$ en $x = 20.5$ in een blazergeometrie met een diffusor voor vier diffusorbreedtes hstep $= 0,\ 0.25,\ 0.5$ en 0.75.

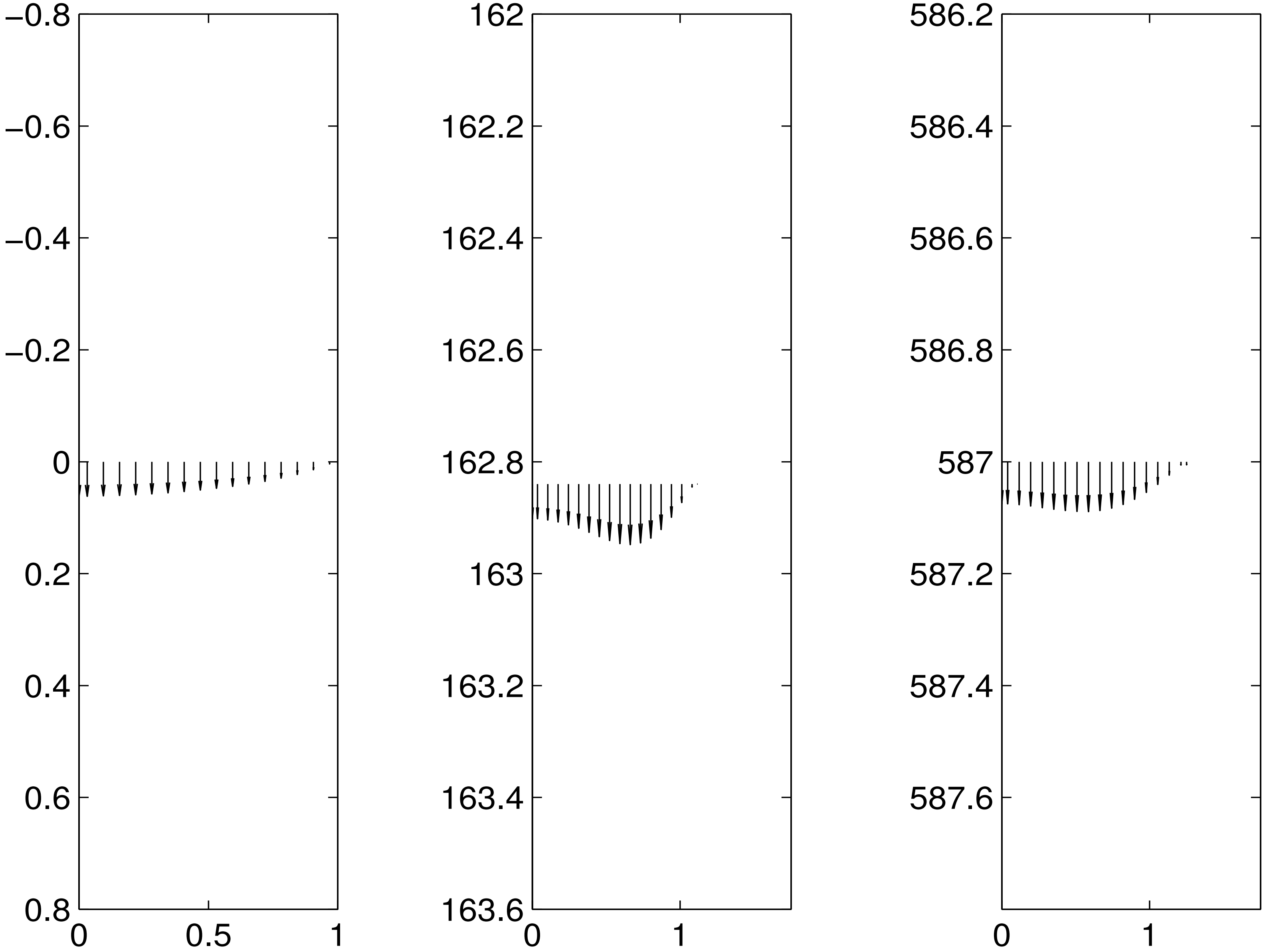

11.5
12
12.5
13
13.5
14
14.5
0
0.5
1
14.5
15
15.5
16
16.5
17
17.5
18
0
0.5
1
17
17.5
18
18.5
19
19.5
20
20.5
0
0.5
1

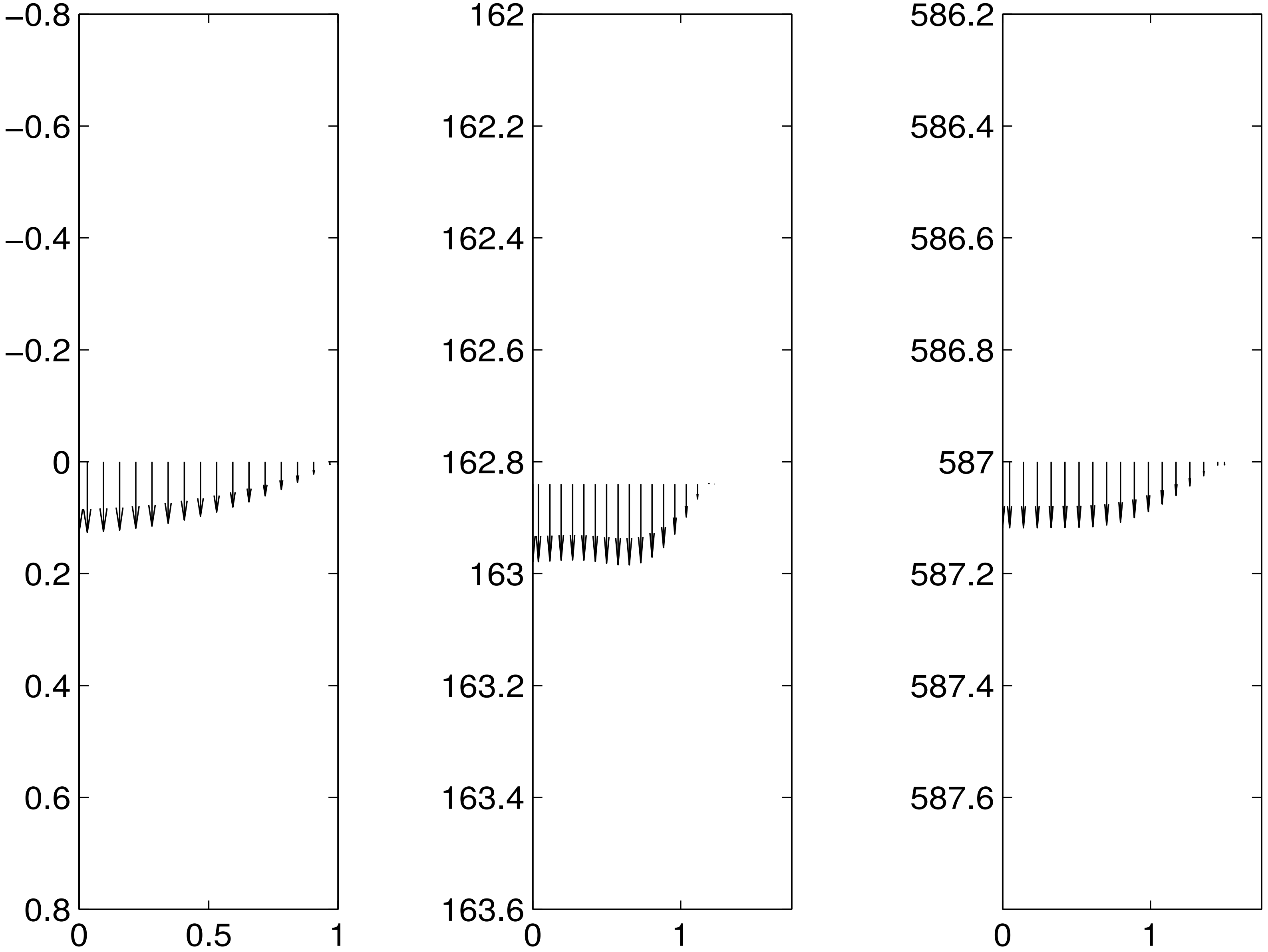

11.5
12
12.5
13
13.5
14
14.5
0
0.5
1
14.5
15
15.5
16
16.5
17
17.5
18
0
0.5
1
17
17.5
18
18.5
19
19.5
20
20.5
0
0.5
1


11.5
12
12.5
13
13.5
14
14.5
0
0.5
1
14.5
15
15.5
16
16.5
17
17.5
18
0
0.5
1
17
17.5
18
18.5
19
19.5
20
20.5
0
0.5
1

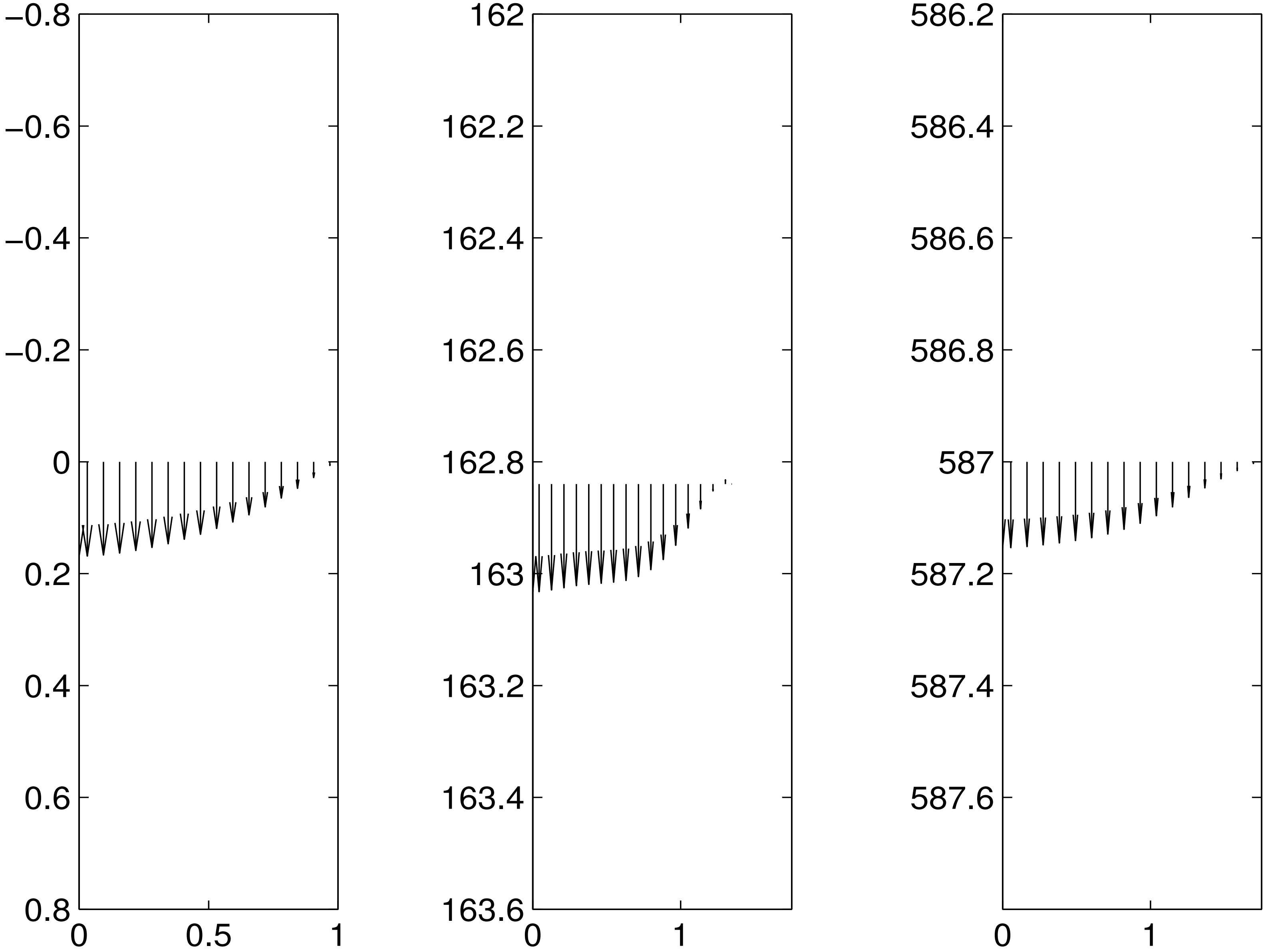


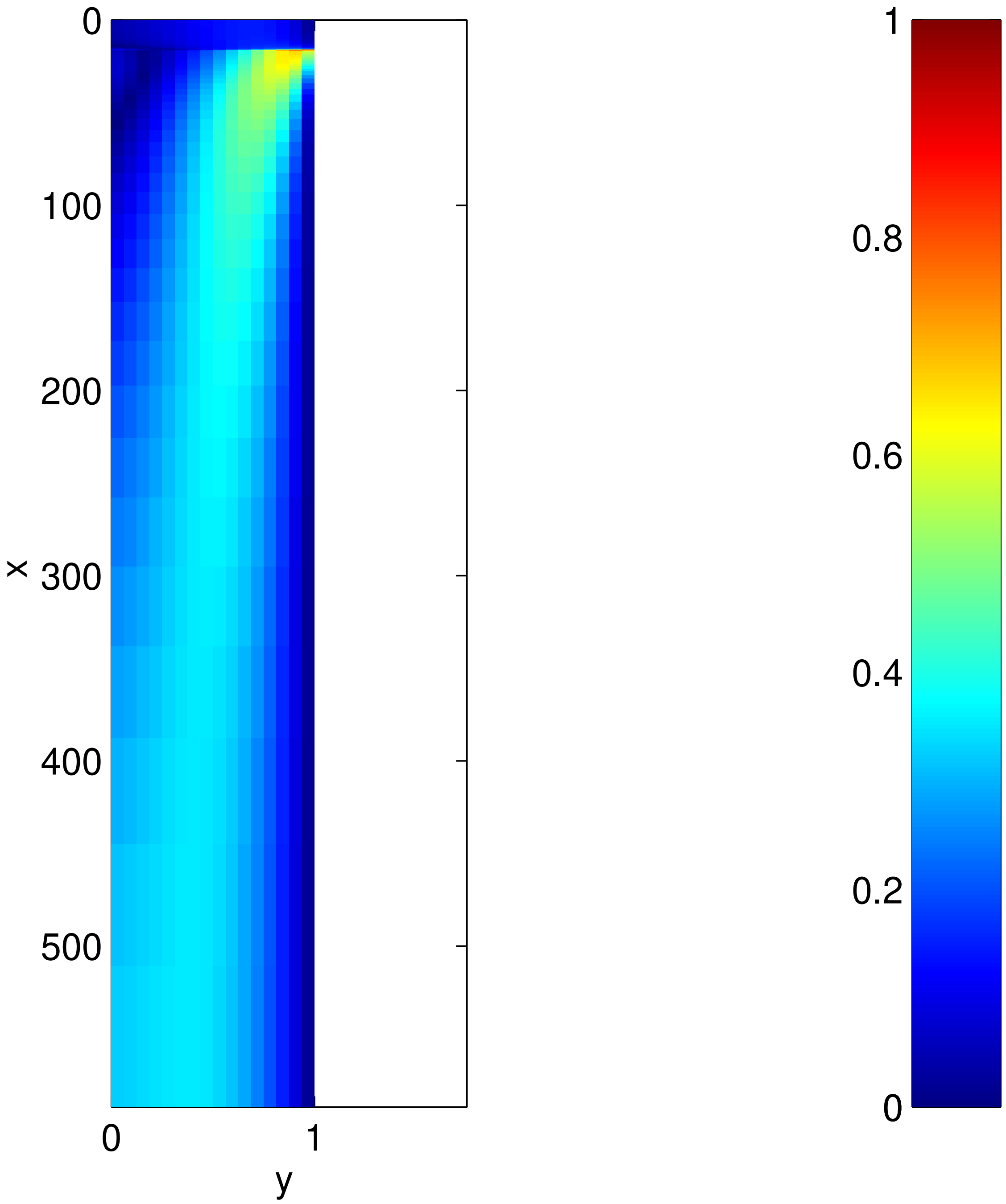
Figuur 10.13: Snelheidsprofiel aan de draadinlaat, $x = 0$, rond $x = 167$ en aan het einde van het trekkanaal, $x = 587$, in een blazergeometrie met een diffusor voor vier diffusorbreedtes hstep $=$ $0,\ 0.25,\ 0.5$ en 0.75.


−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
0
0.5
1
162
162.2
162.4
162.6
162.8
163
163.2
163.4
163.6
0
1
586.2
586.4
586.6
586.8
587
587.2
587.4
587.6
0
1

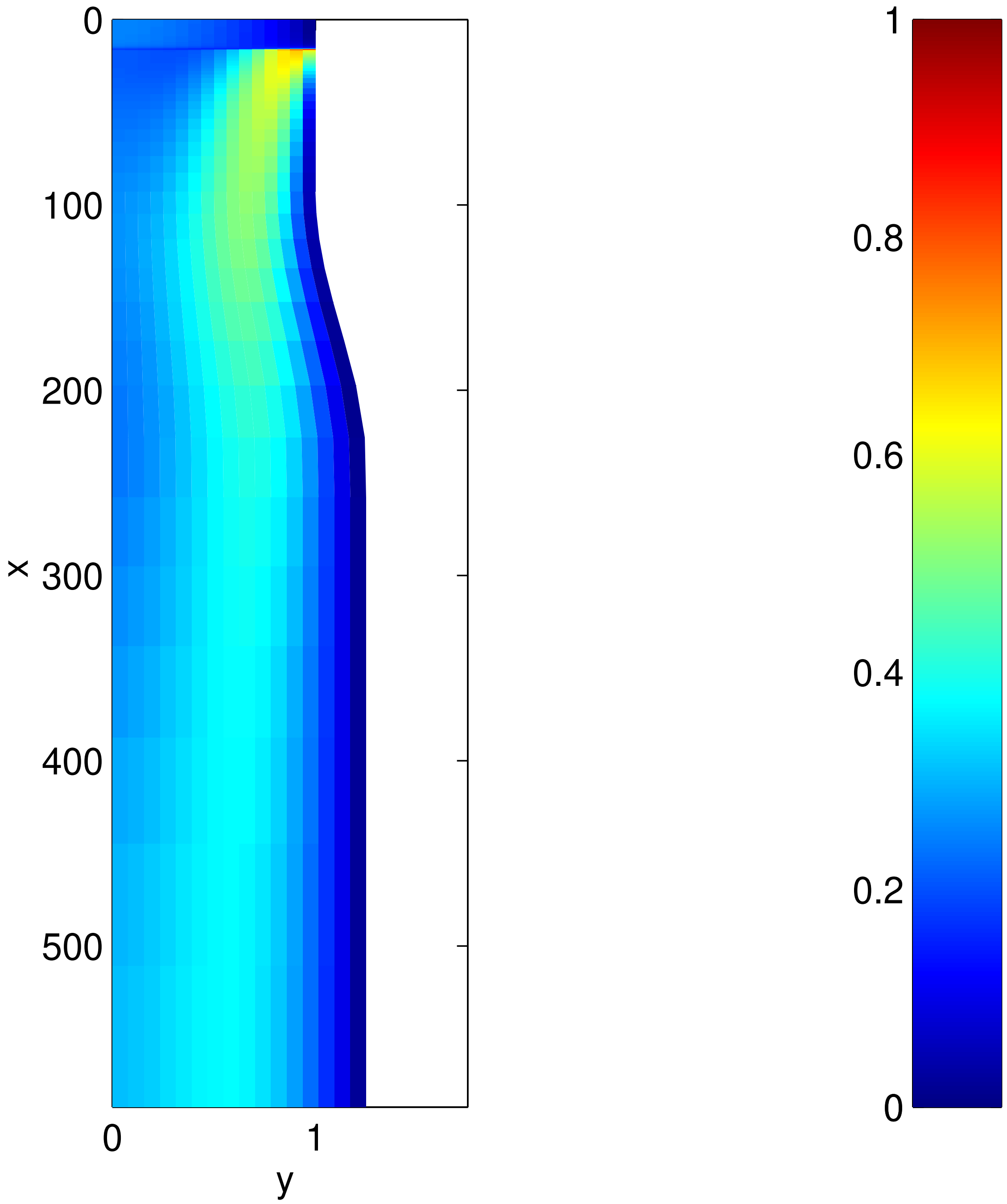


−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
0
0.5
1
162
162.2
162.4
162.6
162.8
163
163.2
163.4
163.6
0
1
586.2
586.4
586.6
586.8
587
587.2
587.4
587.6
0
1

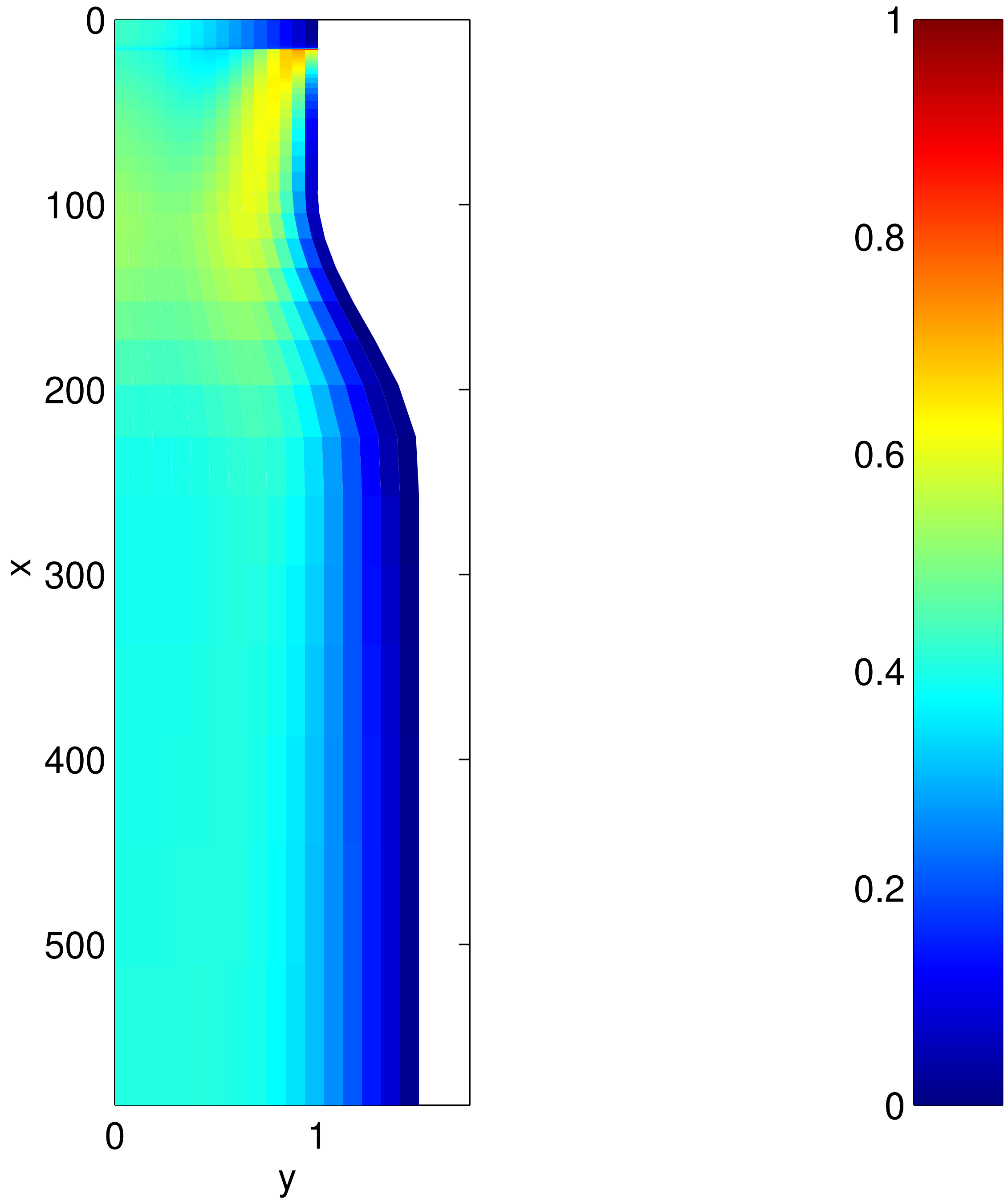

−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
0
0.5
1
162
162.2
162.4
162.6
162.8
163
163.2
163.4
163.6
0
1
586.2
586.4
586.6
586.8
587
587.2
587.4
587.6
0
1



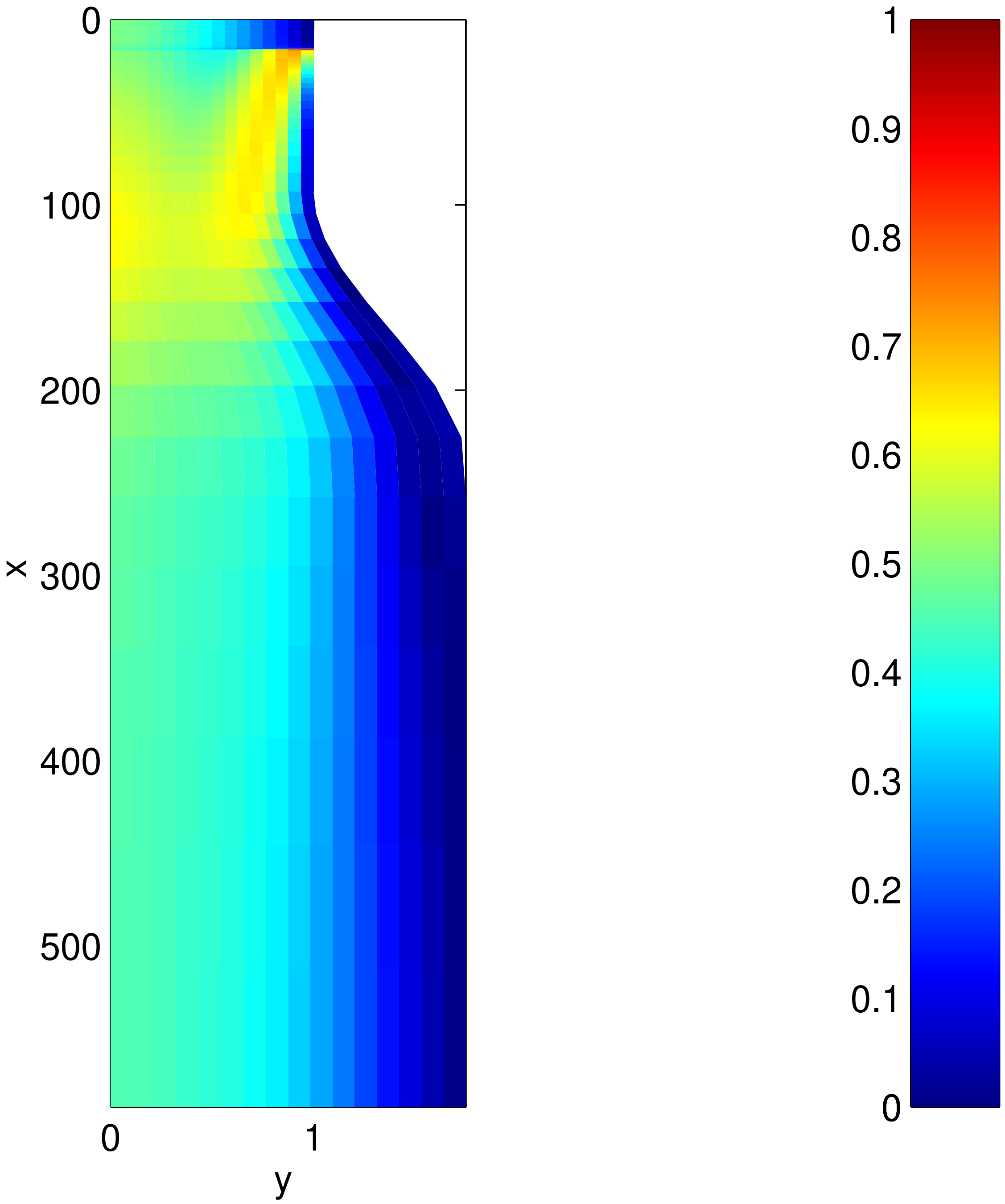
Figuur 10.14: Het Machgetal in het geval van een blazergeometrie met een diffusor voor vier diffusorbreedtes hstep $= 0,\ 0.25,\ 0.5$ en 0.75.



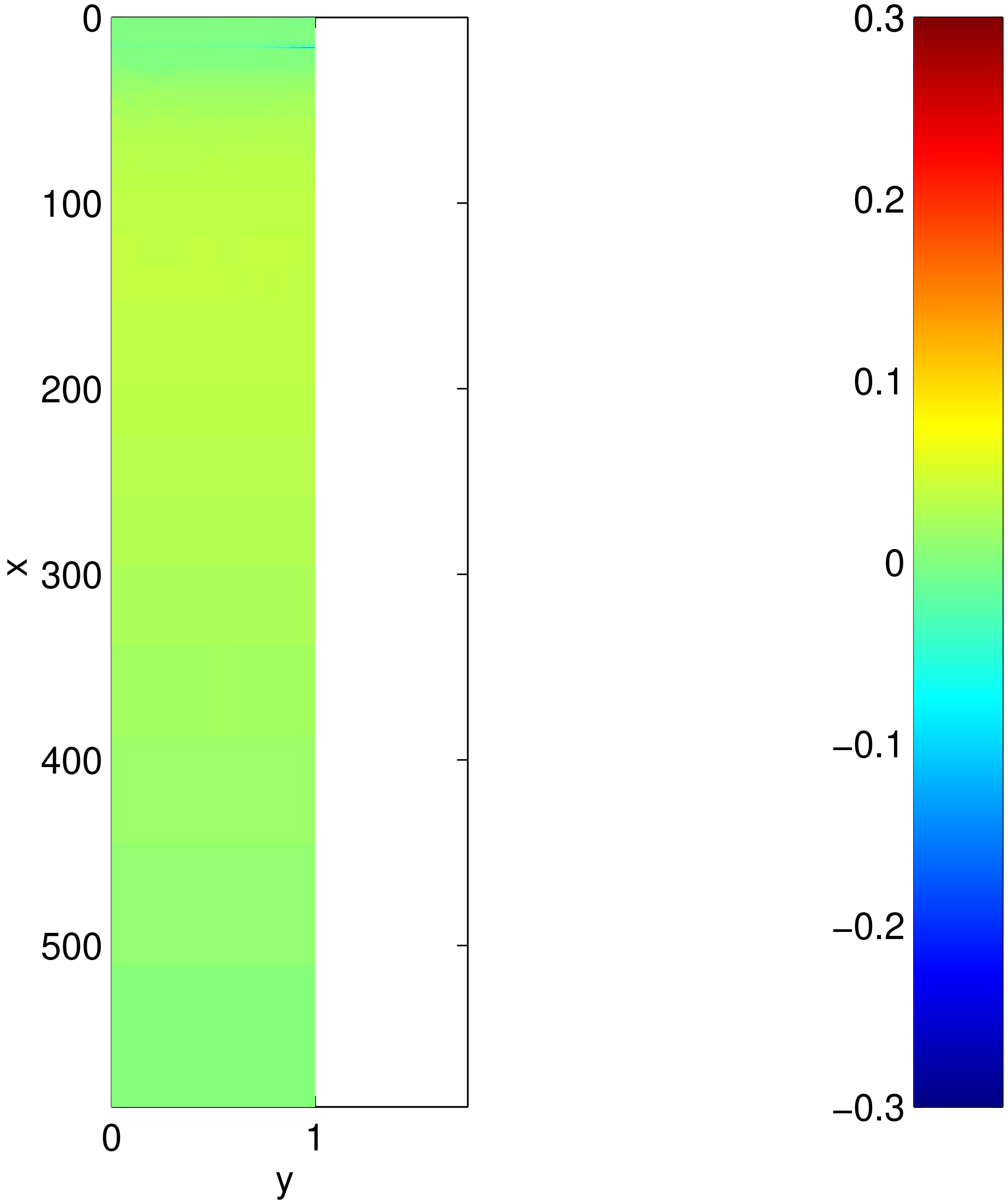
0
100
200
300
400
500
x
0
1
y
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0



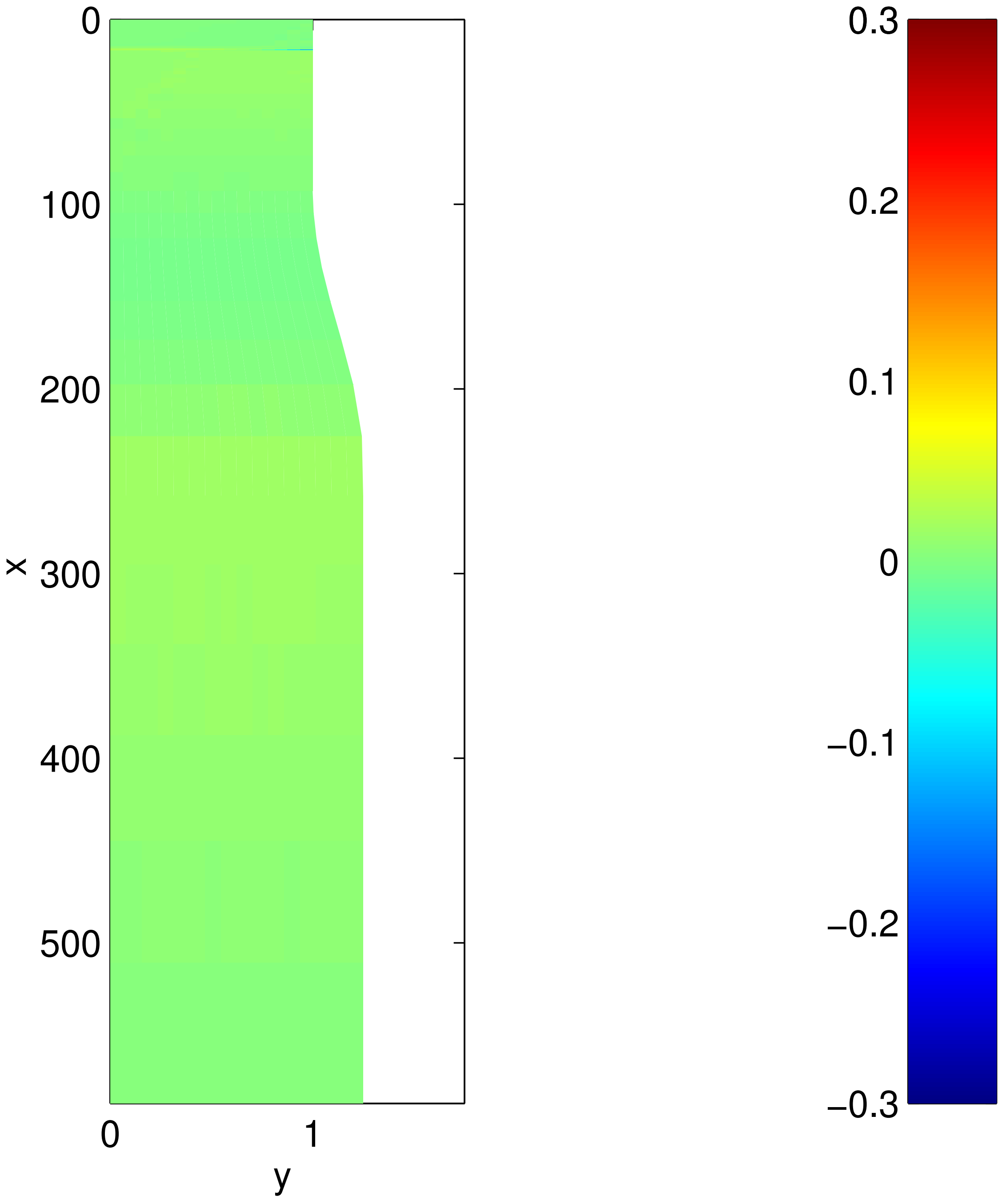
0
100
200
300
400
500
x
0
1
y
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0



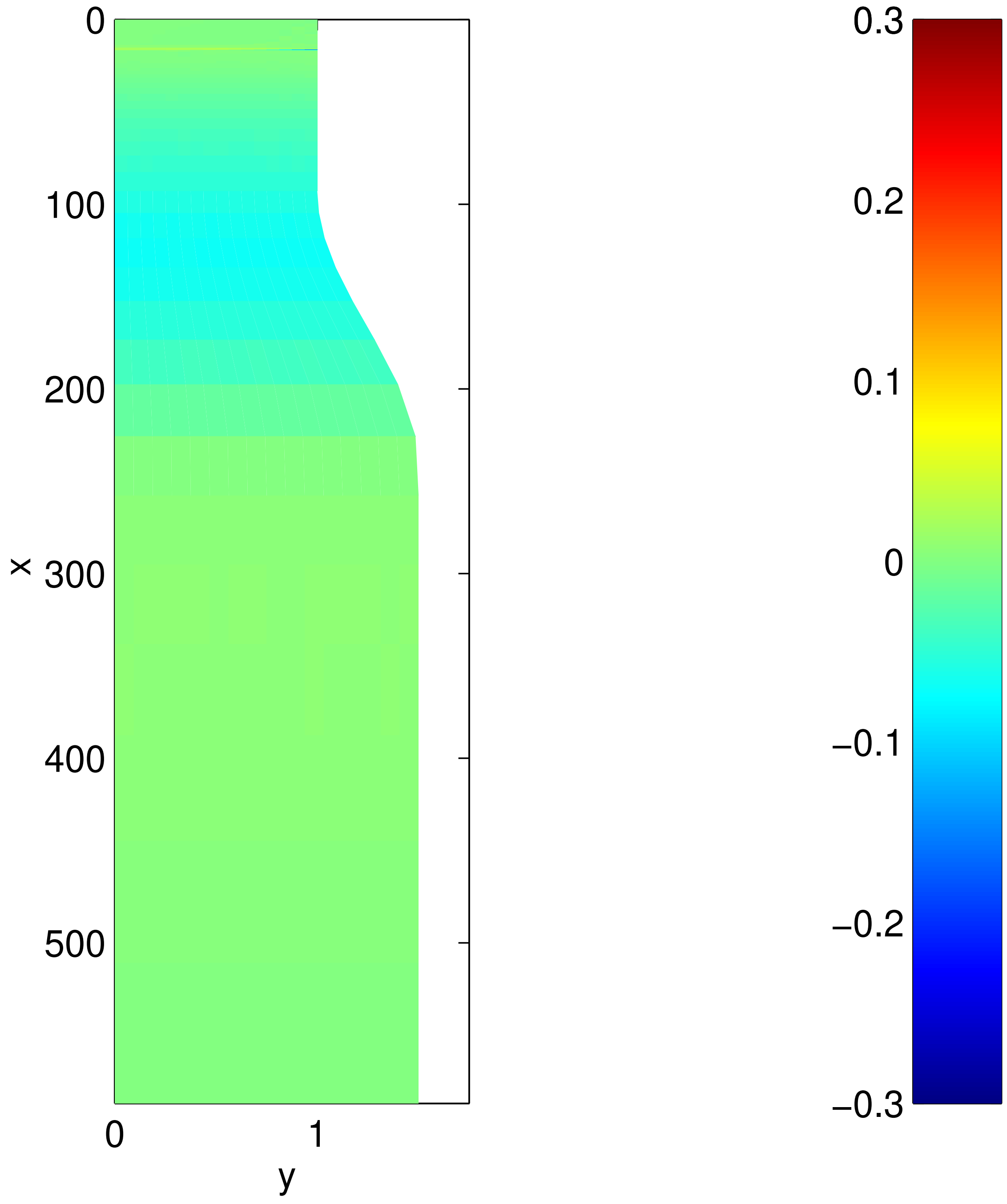
0
100
200
300
400
500
x
0
1
y
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0

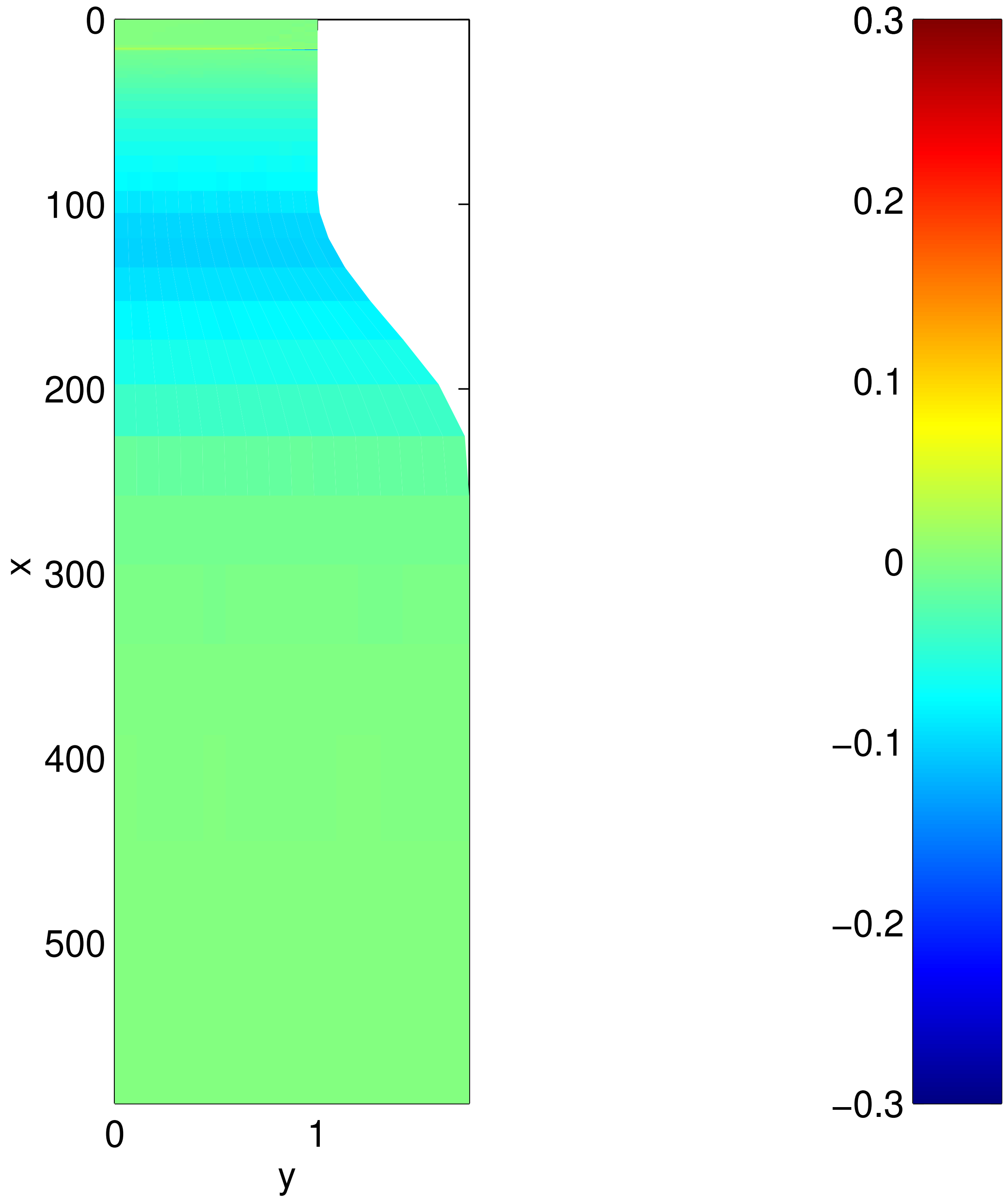


Figuur 10.15: Drukcoëfficiënt $(p - p_{\text{omgeving}})/p_{\text{omgeving}}$ in het geval van een blazergeometrie met een diffusor voor vier diffusorbreedtes hstep $= 0,\ 0.25,\ 0.5$ en 0.75.

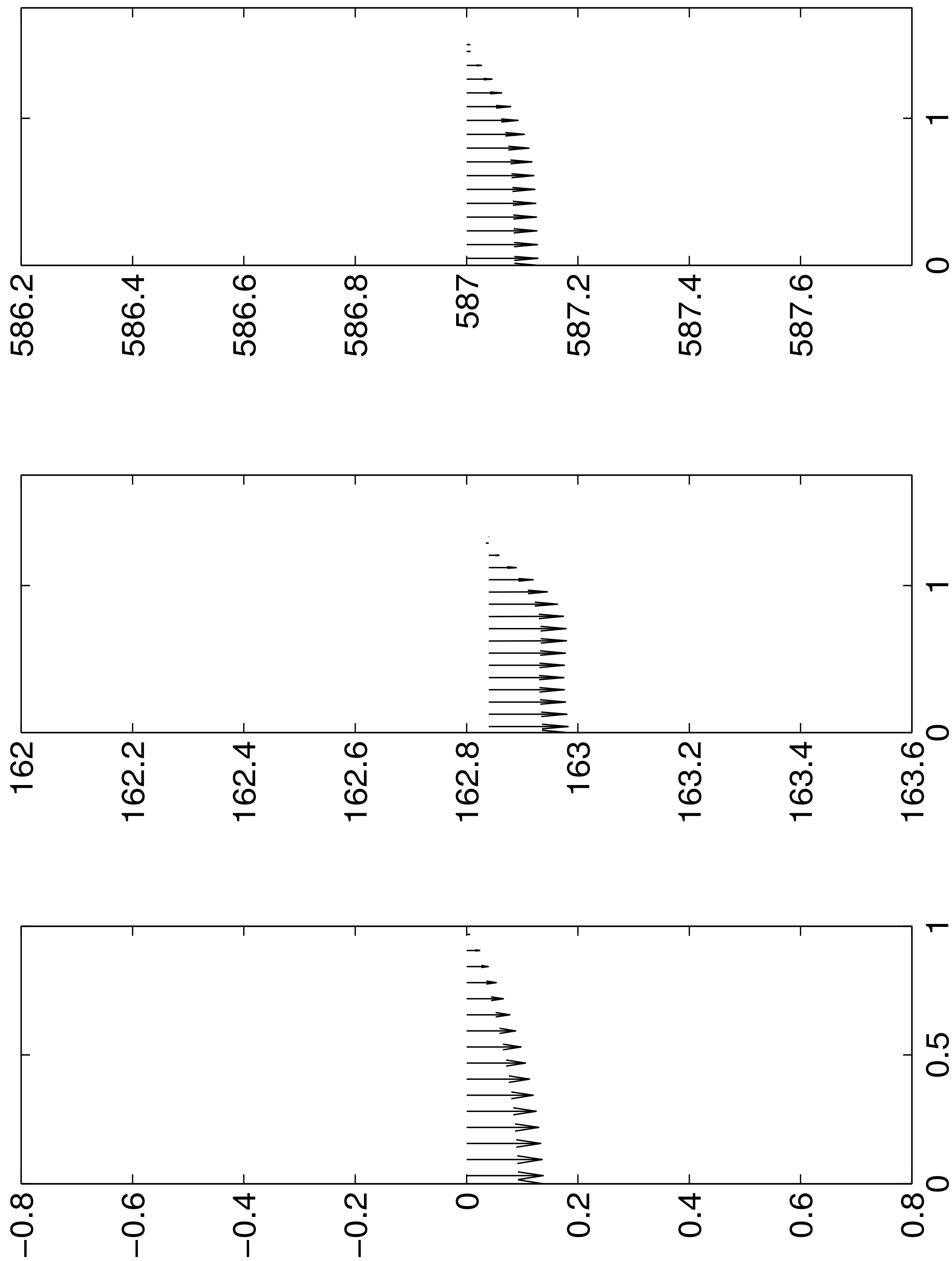


0
100
200
300
400
500
x
0
1
y
0.3
0.2
0.1
0
−0.1
−0.2
−0.3

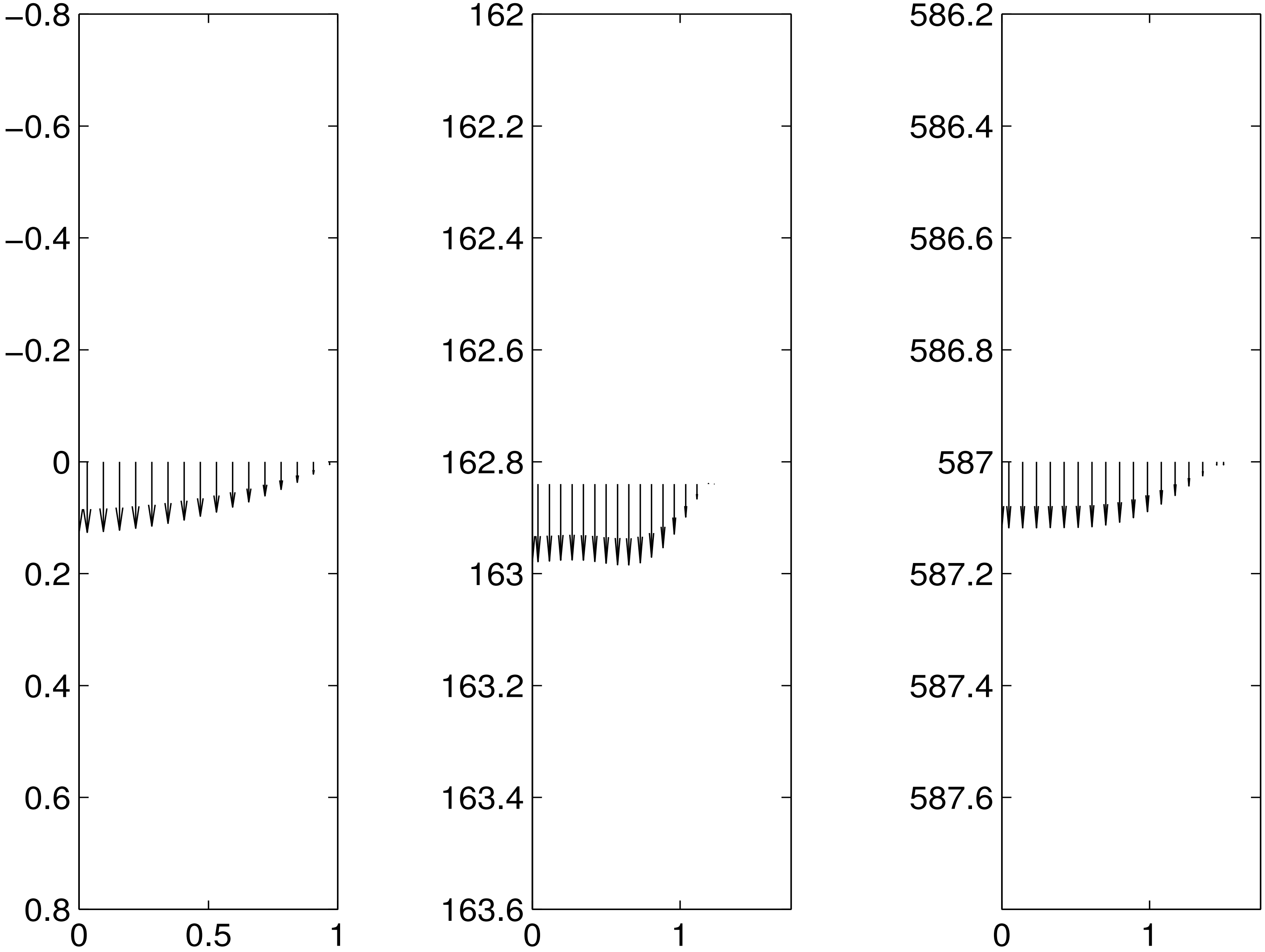

0
100
200
300
400
500
x
0
1
y
0.3
0.2
0.1
0
−0.1
−0.2
−0.3



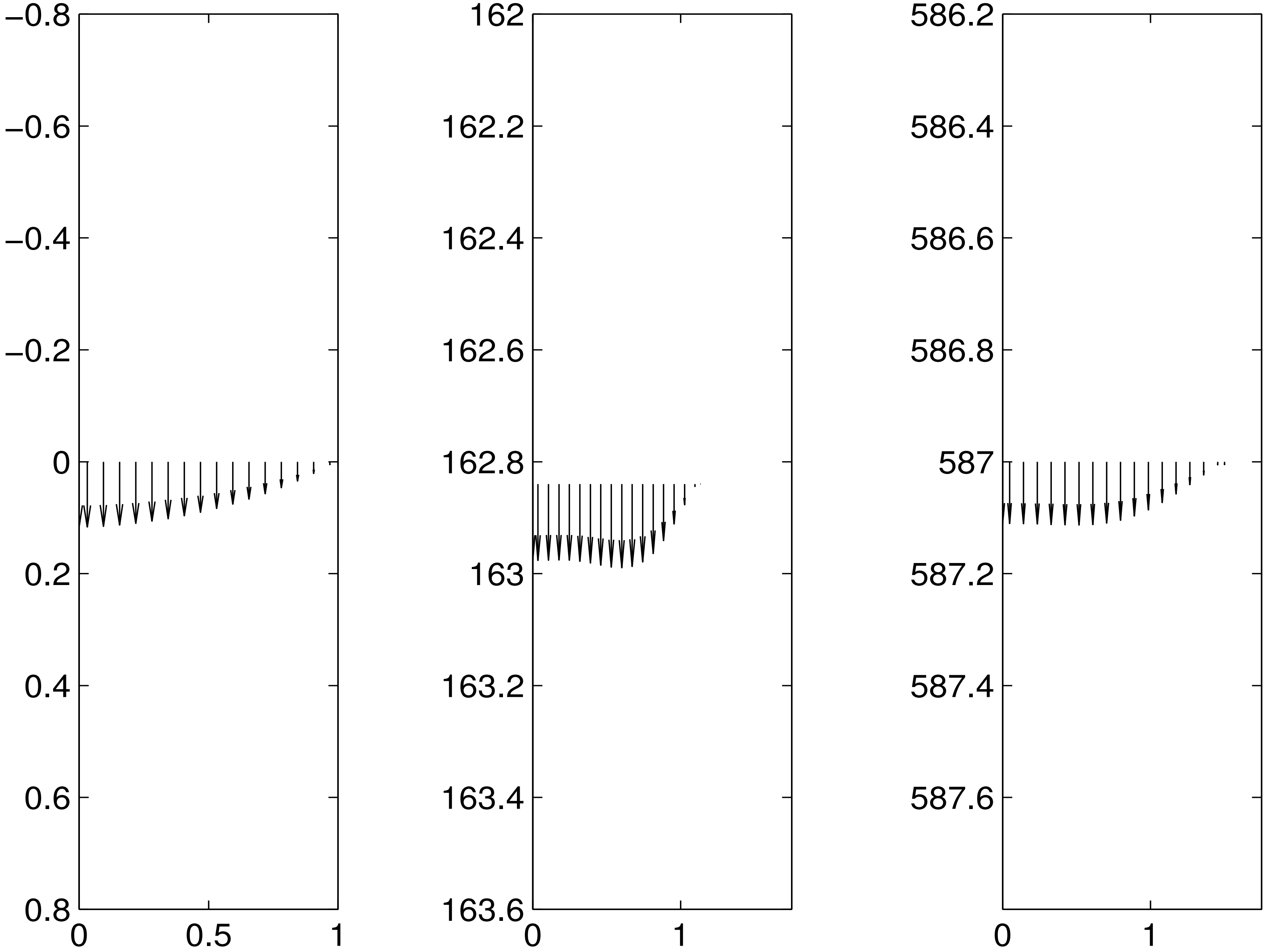
0
100
200
300
400
500
x
0
1
y
0.3
0.2
0.1
0
−0.1
−0.2
−0.3

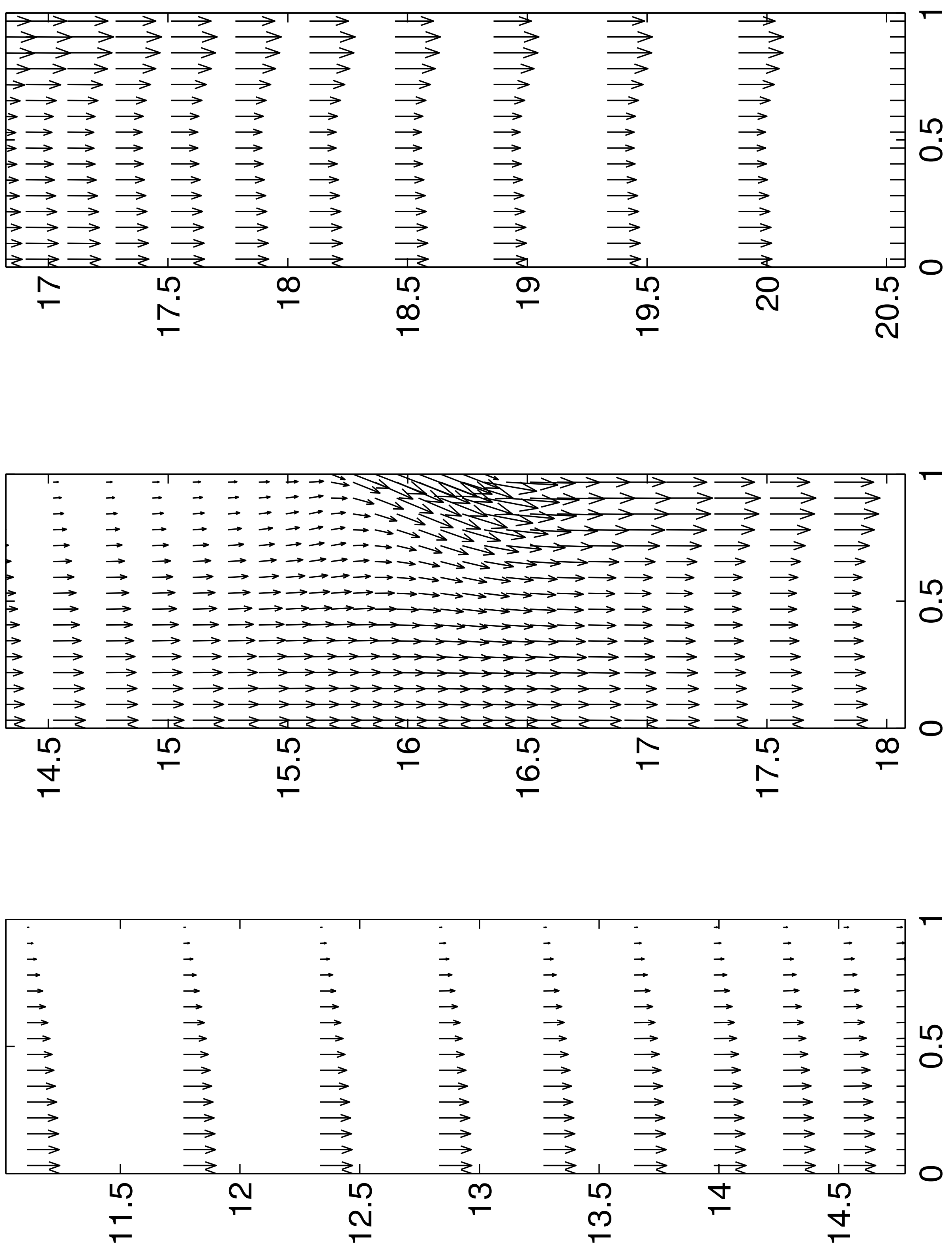


Figuur 10.16: Snelheidsprofiel aan de draadinlaat, $x = 0$, rond $x = 167$ en aan het einde van het trekkanaal, $x = 587$, in een blazergeometrie met een diffusor voor drie diffusorhoogtes xupstep = 71, 91 en 111.

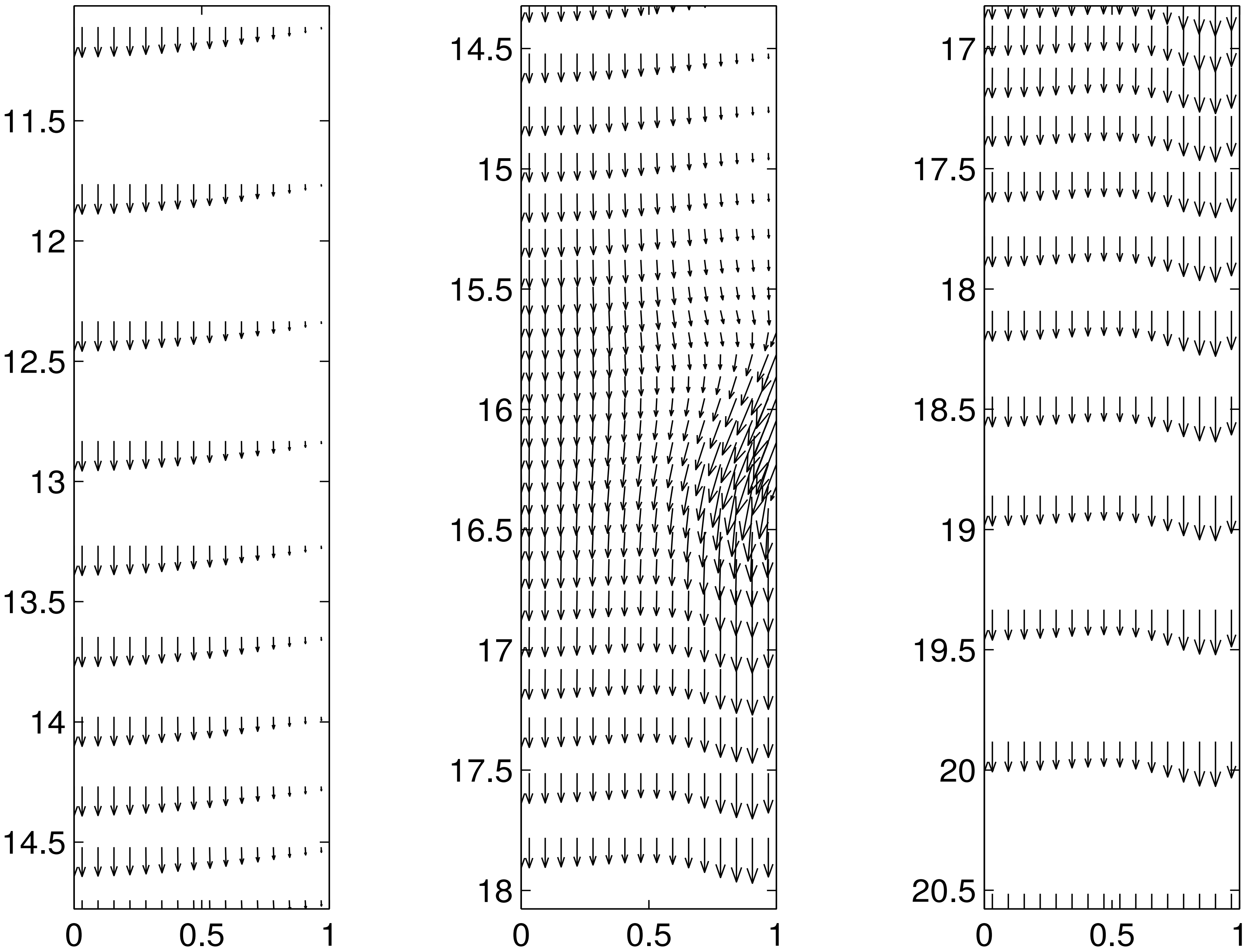


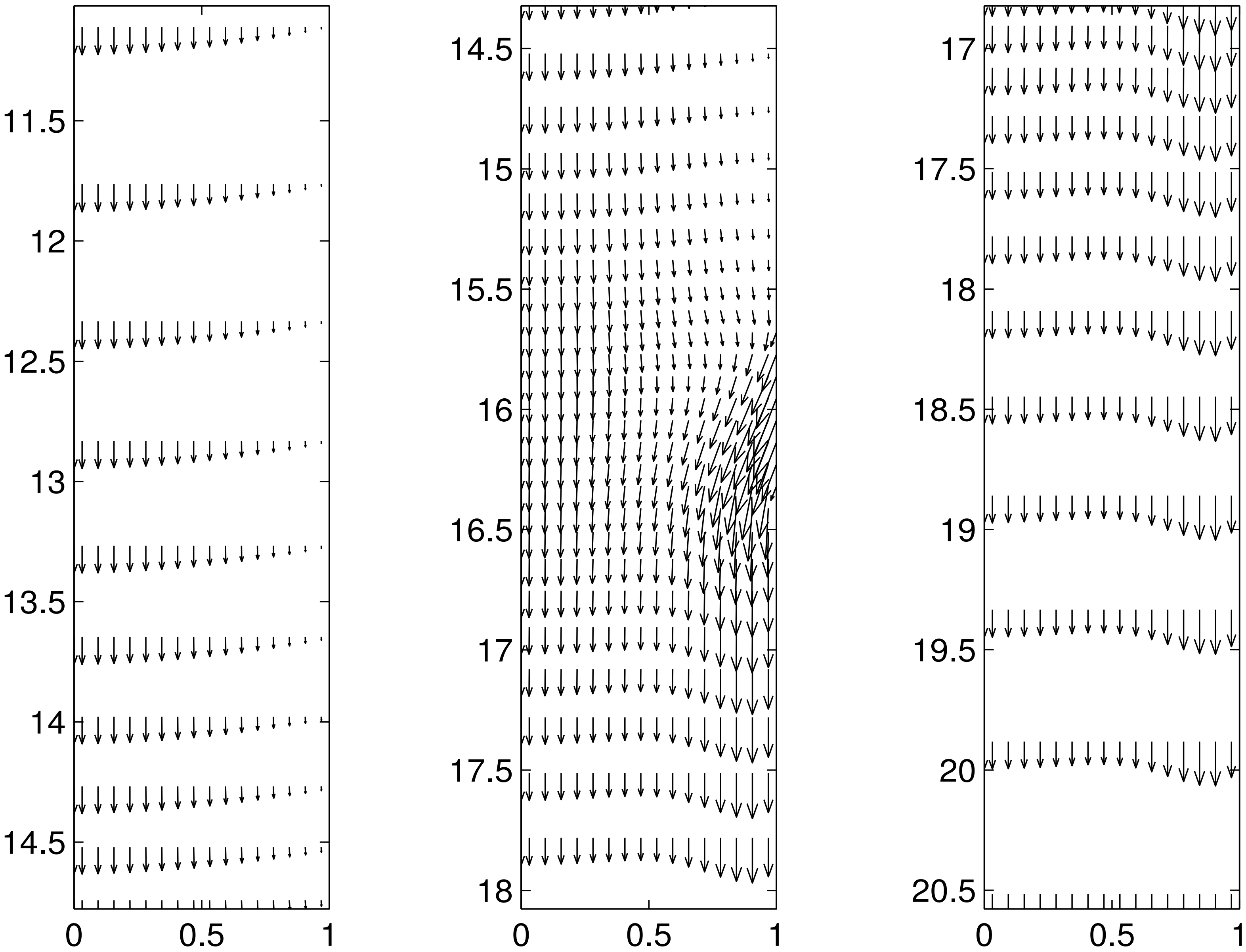
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
0
0.5
1
162
162.2
162.4
162.6
162.8
163
163.2
163.4
163.6
0
1
586.2
586.4
586.6
586.8
587
587.2
587.4
587.6
0
1

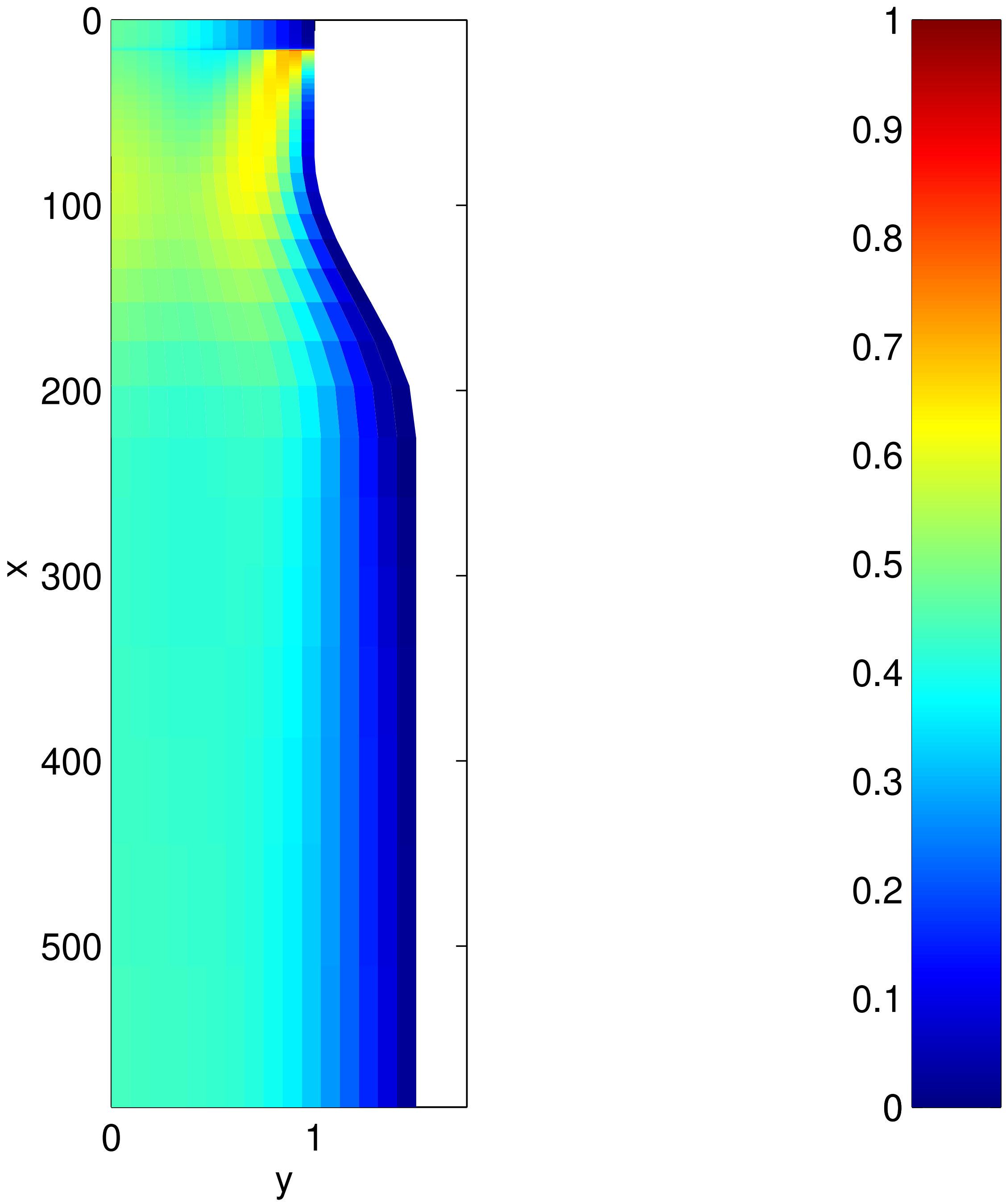

−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
0
0.5
1
162
162.2
162.4
162.6
162.8
163
163.2
163.4
163.6
0
1
586.2
586.4
586.6
586.8
587
587.2
587.4
587.6
0
1



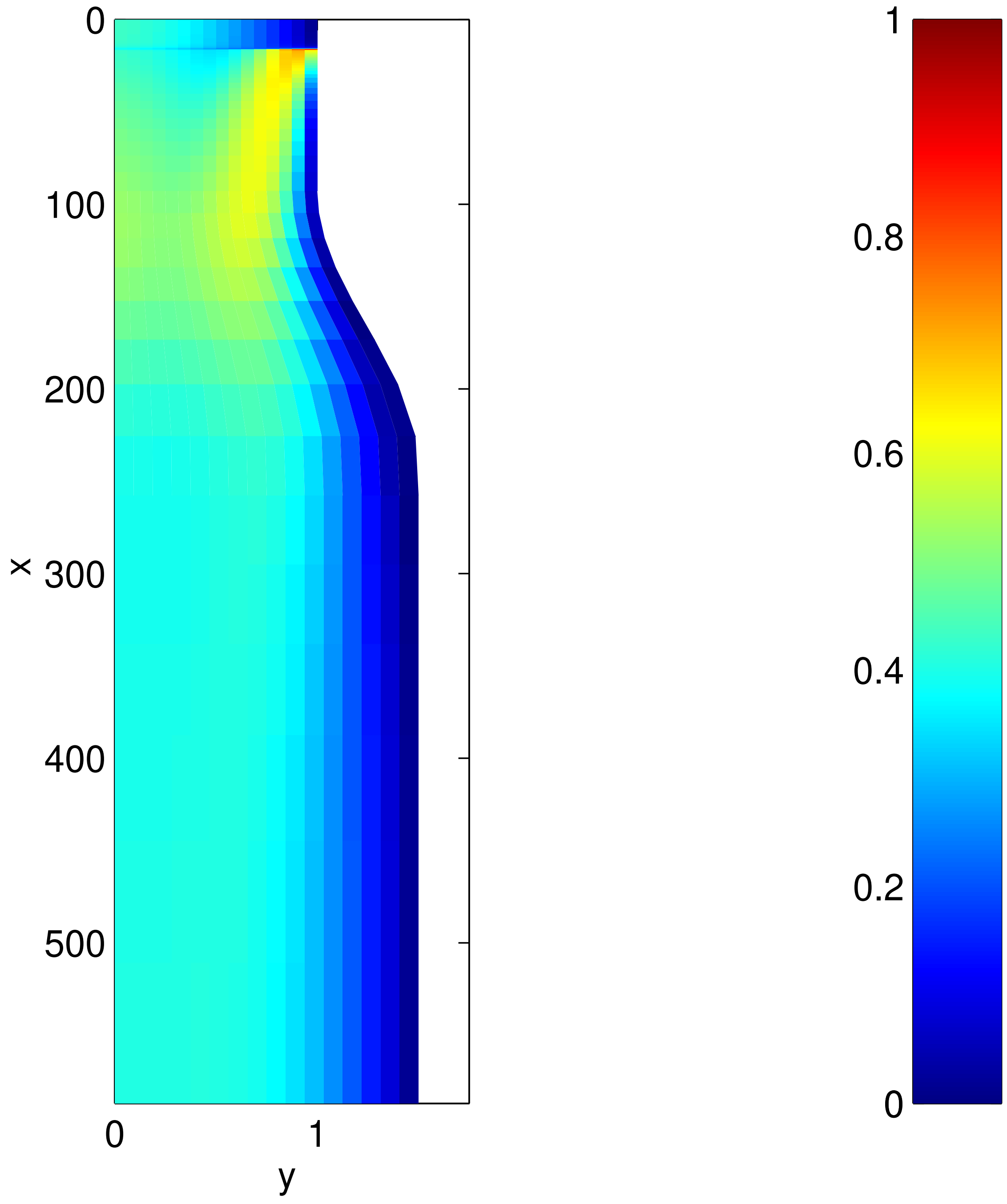
Figuur 10.17: Snelheidsveld rond de luchtinlaat tussen $x = 11.5$ en $x = 20.5$ in een blazergeometrie met een diffusor voor drie diffusorhoogtes xupstep $= 71,\ 91$ en 111.


11.5
12
12.5
13
13.5
14
14.5
0
0.5
1
14.5
15
15.5
16
16.5
17
17.5
18
0
0.5
1
17
17.5
18
18.5
19
19.5
20
20.5
0
0.5
1

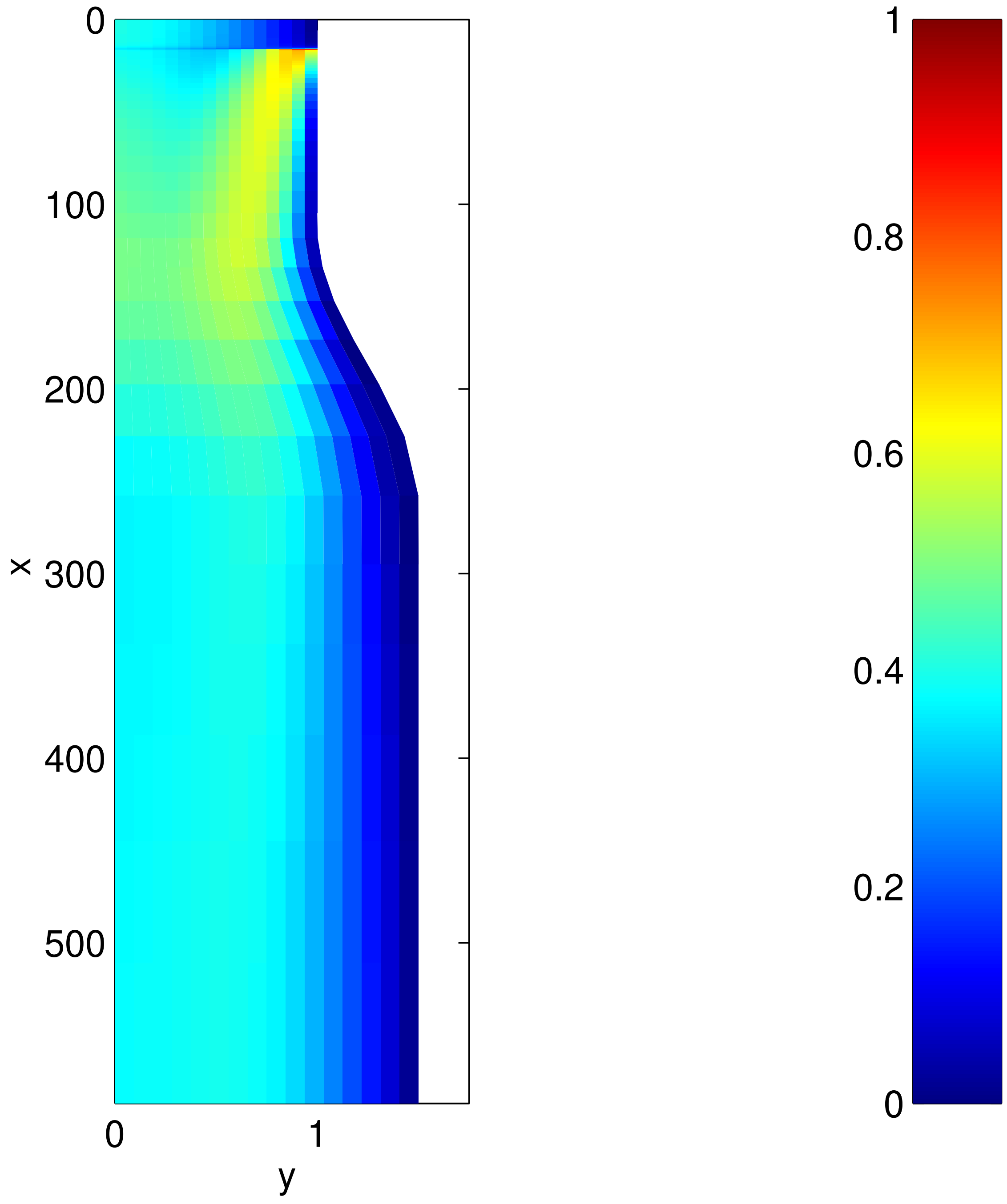

11.5
12
12.5
13
13.5
14
14.5
0
0.5
1
14.5
15
15.5
16
16.5
17
17.5
18
0
0.5
1
17
17.5
18
18.5
19
19.5
20
20.5
0
0.5
1

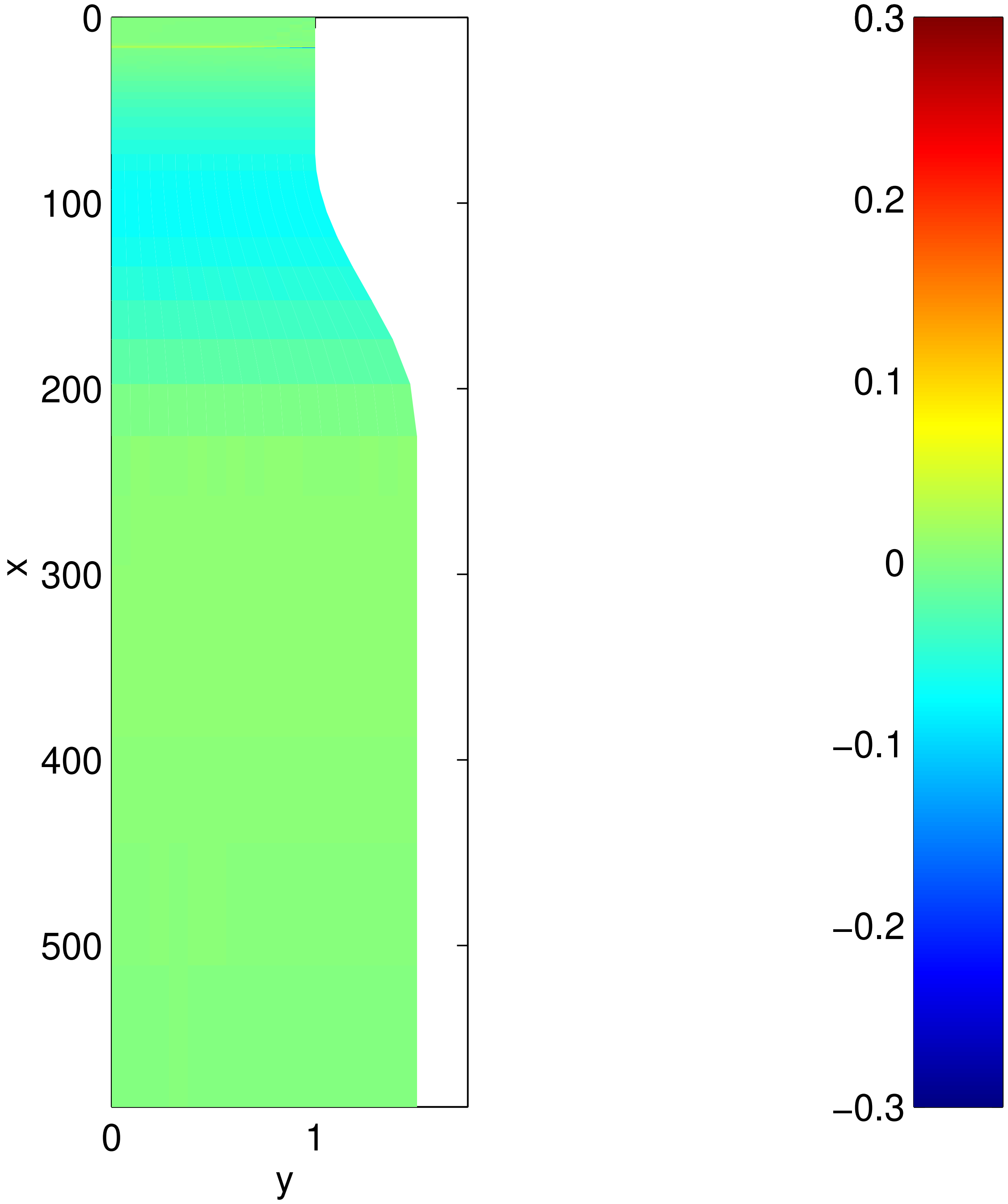


Figuur 10.18: Het Machgetal in het geval van een blazergeometrie met een diffusor voor drie diffusorhoogtes xupstep = 71, 91 en 111.

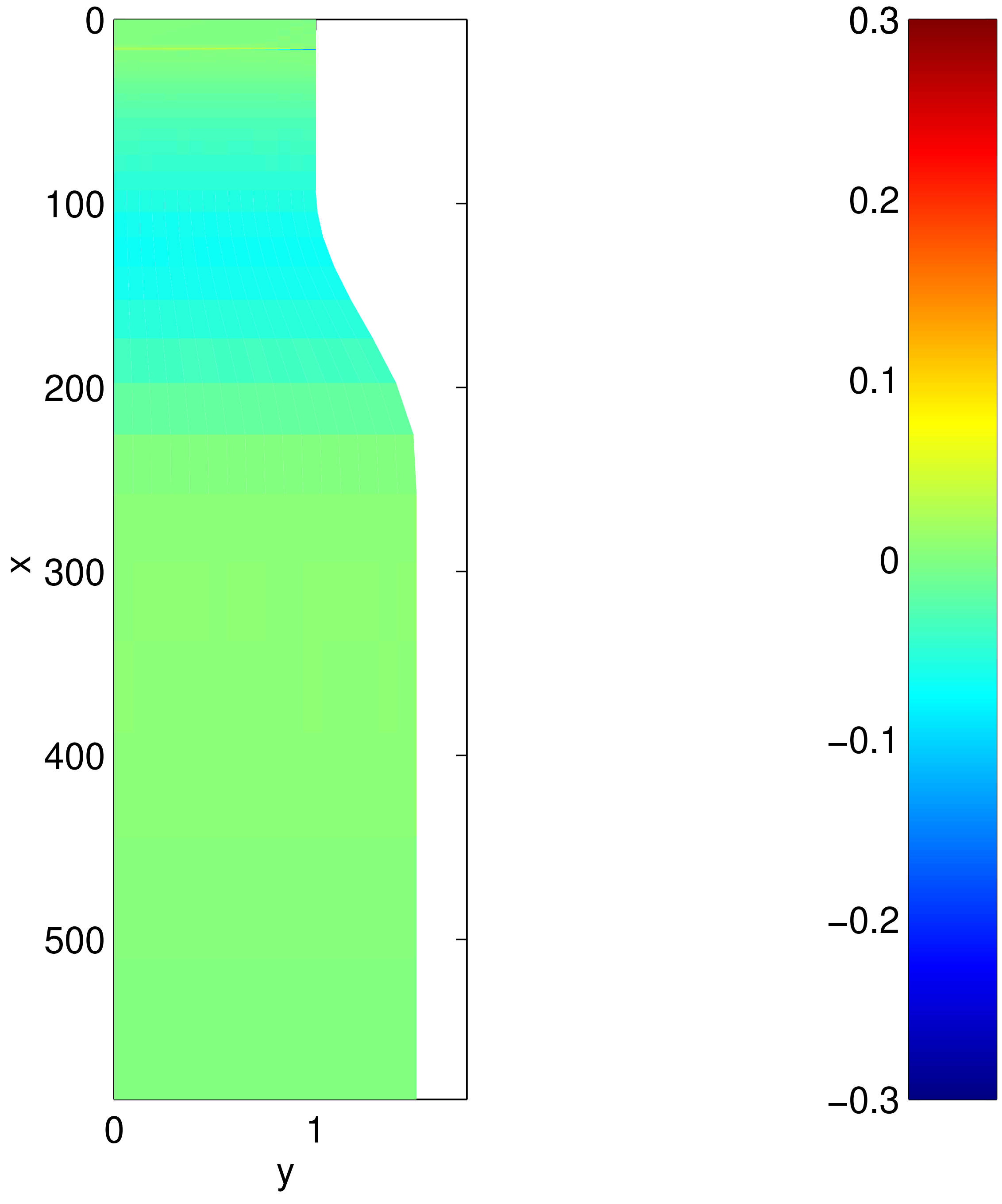


0
100
200
300
400
500
x
0
1
y
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0

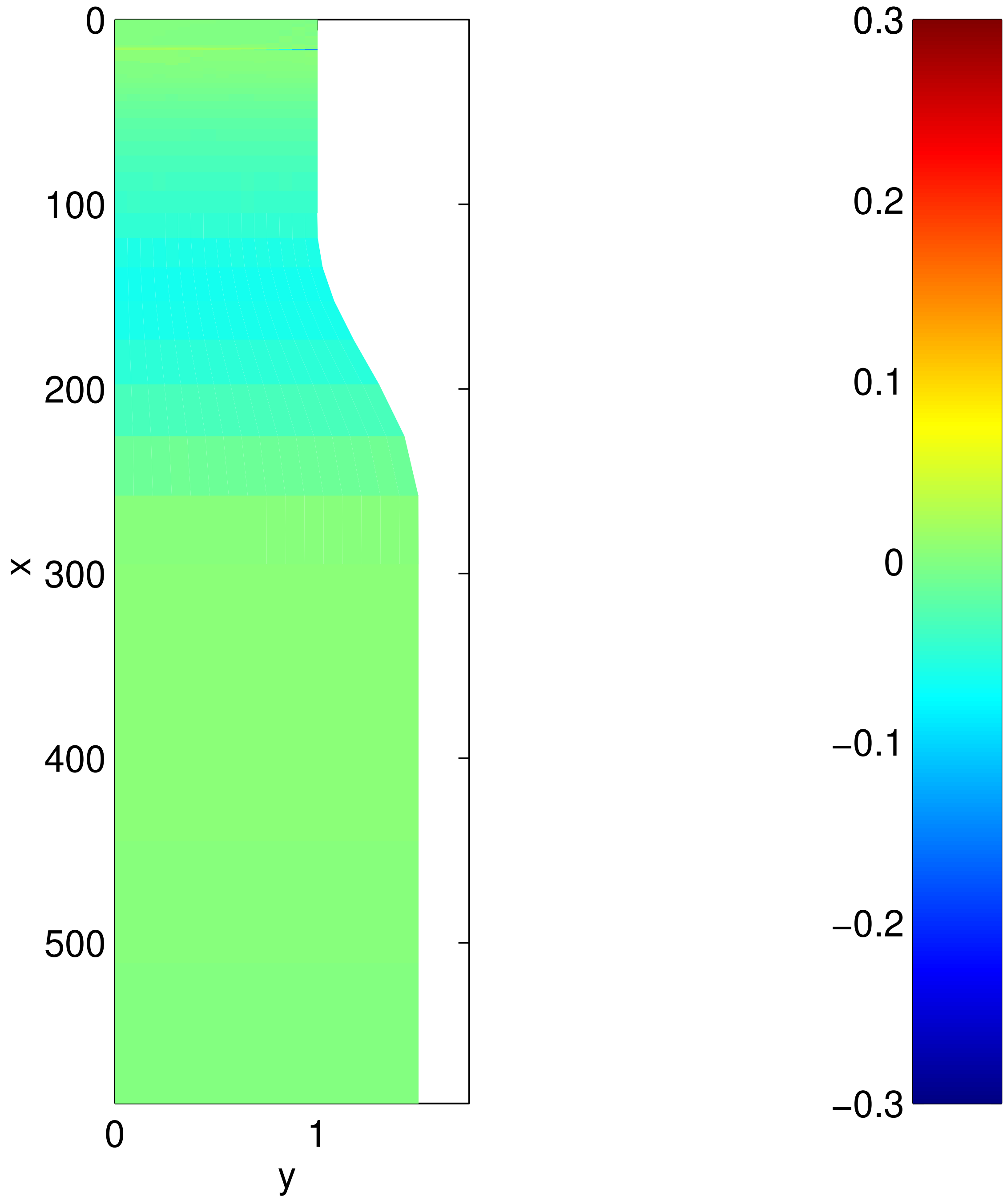

0
100
200
300
400
500
x
0
1
y
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0



Figuur 10.19: Drukcoëfficiënt $(p - p_{\text{omgeving}})/p_{\text{omgeving}}$ in het geval van een blazergeometrie met een diffusor voor drie diffusorhoogtes xupstep $= 71,\ 91$ en 111.



0
100
200
300
400
500
x
0
1
y
0.3
0.2
0.1
0
−0.1
−0.2
−0.3


0
100
200
300
400
500
x
0
1
y
0.3
0.2
0.1
0
−0.1
−0.2
−0.3

Hoofdstuk 11

Conclusies en aanbevelingen

11.1 De belangrijkste conclusies

In het smeltspinproces dat bij Akzo Nobel wordt toegepast in een proefmachine voor de produktie van nonwovens vervult de spleetblazer een belangrijke rol. Zijn functie betreft de generatie van trekkracht voor het verstrekken en transporteren van de filamenten door het produktieproces. De trekkrachtgeneratie vindt plaats doordat perslucht vanuit de suskamer onder hoge snelheid langs de filamenten wordt geblazen. Dankzij het snelheidsverschil tussen de filamenten en de perslucht worden de benodigde schuifspanningen gecreëerd. In de huidige blazergeometrie naar Japans ontwerp bevindt zich een verbreding in het trekkanaal, welke bekend staat om zijn trekkrachtverhogende werking. In dit afstudeerwerk hebben we getracht door onderzoek aan de luchtstroming meer zicht te verkrijgen op de interactie tussen luchtstroming, blazergeometrie en trekkrachtgeneratie. De belangrijkste conclusies, die naar aanleiding van ons werk zijn geresulteerd, laten we in deze paragraaf de revue paseren.

- Naar aanleiding van de Reynoldsvariaties in een recht trekkanaal blijkt zich tussen $\mathrm{Re} = 10^4$ en $\mathrm{Re} = 10^5$ een Reynoldsgetal te bevinden, waarvoor de trekkrachtgeneratie optimaal is. Dit optimale Reynoldsgetal moet zodanig worden ingesteld, dat het groot genoeg is om de weerstand in het trekkanaal in te perken, opdat terugstroming wordt voorkomen. Daarnaast moet voldoende diffusie zijn toegestaan om de straal in een beperkte mate over de breedte van het trekkanaal te diffunderen. Het Reynoldsgetal dat van toepassing is op de huidige blazergeometrie bevindt zich in het optimale Reynoldsgebied. Reynolds variaties zijn te realiseren door variaties in de geluidssnelheid van de perslucht in de suskamer, ofwel in de thermodynamica van de suskamer, of door variaties in de viscositeit van het gebruikte persmedium in de blazer, of door variaties in de karakteristieke breedte van het trekkanaal, die is gedefinieerd als de halfbreedte van het trekkanaal direct onder de luchtinlaat.

- Kanaalverbreding in een diffusorgeometrie resulteert in een spectaculaire toename in de gegeneerde trekkracht. Naast extra aanzuiging van omgevingslucht van boven de blazer treedt in het trekkanaal een extra expansie van de perslucht op. De trekkrachtverhoging lijkt vooralsnog te ontstaan ten gevolge van weerstandreductie in het trekkanaal. De mogelijkheden van kanaalverbreding uit het oogpunt van trekkrachtgeneratie zijn niet onuitputtelijk. Op den duur wordt het trekkanaal te breed, waardoor de snelheden in het trekkanaal afnemen. Vooralsnog zijn we voor ons geteste blazerprobleem met een Reynoldsgetal gebaseerd op de huidige blazergeometrie met een kanaalverbreding van 75% nog niet op het punt aangeland, waarbij kanaalverbreding geen trekkrachtverhoging meer oplevert.

- Variatie in de plaats van de verbreding in de blazergeometrie speelt eveneens een rol in de trekkrachtgeneratie. Met een verschuiving van de diffusor in de richting van de luchtinlaat wordt een hogere trekkracht gegeneerd. Opnieuw reduceren we op deze wijze de weerstand in het trekkanaal. De gesuggereerde verschuiving van de diffusor tot direct onder de luchtinlaat leidt effectief tot een toename in het Reynoldsgetal.

- Uit de numerieke resultaten is gebleken dat de effectiviteit van de blazer op trekkrachtgeneratie hoogstwaarschijnlijk te danken is aan reductie van incompressibele viskeuze verstopping. De verbreding laat een groter doorstroomdebiet in het trekkanaal toe. Naast incompressibele viskeuze verstopping hebben we aandacht besteed aan compressibele niet-viskeuze verstopping. Deze vorm is in de numerieke resultaten niet waargenomen. Op basis van de meetgegevens van Persoon aan een blazergeometrie met backward facing step hebben we echter aangetoond, dat we deze verklaring voor de effectiviteit van de verbreding in de blazergeometrie niet geheel van de lijst met mogelijke verklaringen kunnen schrappen. Daarnaast merken we op dat een blazergeometrie, waarin compressibele niet-viskeuze verstopping zou optreden, tot een zeer gunstige blazergeometrie kan leiden. Als we zo'n geometrie zodanig met de beschreven remedies aanpassen, opdat we dicht tegen compressibele niet-viskeuze verstopping aanzitten, dan liggen de snelheden van de perslucht in het trekkanaal behoorlijk hoog. Dat is gunstig uit het oogpunt van trekkrachtgeneratie.

- In de fysische modellering van de luchtstroming over de blazergeometrie spelen de keuzes van de randvoorwaarden aan de randen van het fysische domein een belangrijke rol. Op basis van de karakteristieken theorie hebben we voor de Euler vergelijkingen laten zien dat het stromingsprobleem correct gesteld is in de zin van Hadamard indien het aantal randvoorwaarden correspondeert met het type stroming aan de rand onder beschouwing. Voor de Navier-Stokes vergelijkingen hebben we aan de randen van het fysisch domein, waar traagheids- en drukkrachten domineren, deze randvoorwaardenaantallen gehandhaafd. De keuze voor de randvoorwaardencombinatie aan de draadinlaat vervult daarbij een bijzondere en essentiële rol. Met het oog op verstopping en aanzuiging kan de rand zowel een subsone in- of uitstroomrand of een combinatie van beiden vormen. Aan een subsone instroomrand moeten we drie randvoorwaarden voorschrijven. We hebben de druk, temperatuur en instroomhoek vastgelegd. Omdat we geen expliciete uitspraak doen over het debiet of de instroomsnelheid staan we aan de draadinlaat in de numerieke oplossing een vrije instelling van in- of uitstroom op basis van de heersende toestanden in het inwendige stromingsdomein toe.

- Van essentieel belang in de multiroostermethode blijkt de toepassing van een preconditionering in het stelsel dat over een eindig volume resulteert ten gevolge van Gauss-Seidel relaxatie en een Newton linearisatiemethode. Zonder toepassing van preconditionering bij het oplossen van dit stelsel divergeert de numerieke oplossing in regionen met een laag Machgetal. Met name in het gebied langs de vaste wand onder de luchtinlaat is dit probleem geconstateerd. Wij hebben de preconditionering, welke op het CWI is ontwikkeld door Koren voor het eerst toegepast op de Navier-Stokes vergelijkingen. De preconditionering was in eerdere stadia alleen getest voor de Euler vergelijkingen.

11.2 Aanbevelingen en suggesties voor verder onderzoek

De suggesties voor verder onderzoek vallen grofweg uiteen in drie categorieën. De eerste categorie beschrijft aanbevelingen en suggesties voor verder onderzoek op het gebied van geometrieveranderingen aan de huidige blazergeometrie. Welke geometrieveranderingen zijn gunstig uit het oogpunt van een verhoging van gegenereerde trekkracht in de blazer? Welke aanpassingen zou men bij Akzo Nobel aan de spleetblazer moeten verrichten en welke mogelijke geometrieaanpassingen zijn interesant voor verder onderzoek? De tweede categorie heeft betrekking op verder onderzoek naar de uitbreiding van de gebruikte fysische modellen in ons werk. De laatste categorie behandelt suggesties voor verder onderzoek aangaande de code op het CWI.

11.2.1 Aanbevelingen en suggesties voor verder onderzoek naar variaties in de blazergeometrie

- Om een blazergeometrie te construeren, waarmee meer trekkracht kan worden gegenereerd, raden we aan de stap in de huidige blazergeometrie te vergroten. Eventueel kan daarnaast de stap in de richting van de luchtinlaat worden geschoven. Op basis van de numerieke resultaten dragen deze beide geometrieveranderingen bij aan trekkrachtverhoging. We moeten wel in de gaten houden dat aan stapverbreding een bovengrens is verbonden.

- Verder is op basis van de numerieke resultaten gebleken dat zich tussen $\mathrm{Re} = 2.4 \cdot 10^4$ en $\mathrm{Re} = 10^5$ een optimaal Reynoldsgetal bevindt. Kanaalverbreding over de volledige lengte van de blazergeometrie kan zodoende eveneens bijdragen aan trekkrachtverhoging. Men moet in de gaten houden, dat de totale kanaalverbreding niet te ver doorslaat, zodat het Reynoldsgetal naar de bovengrens van 10^5 nadert. In dat geval blijft de luchtstraal vanuit de suskamer te veel langs de wand plakken. Verhoging van het Reynoldsgetal kunnen we eveneens realiseren door c_{sus} te verhogen of ν te verlagen.

- De numerieke berekeningen zijn uitgevoerd aan een blazergeometrie met diffusor in plaats van aan een blazergeometrie met backward facing step. De resultaten geven echter een goed beeld van mogelijke model- en geometrie aanpassingen, die kunnen leiden naar een blazergeometrie, waarmee onder de heersende condities maximale trekkracht kan worden gegenereerd. Daarnaast is een diffusor als middel om het trekkanaal te verbreden geschikter dan de backward facing step. In het laatste geval gaat kanaalverbreding gepaard met het nodige verlies aan bewegingsenergie. Het lijkt dus gunstig om een diffusor in het trekkanaal op te nemen. De diffusorvorm en plaats in het trekkanaal staat daarbij nog open voor verder onderzoek. Al moeten we wel de suggesties uit het voorgaande punt respecteren. Onze diffusorvorm had een nadrukkelijk testdoel. Bij variaties in diffusorvorm moeten we in het oog houden dat de voorgeschreven vorm van de blazergeometrie over een toekomstige blazerbreedte van maar liefst 6 m moet worden gerealiseerd. We zullen dus een compromis moeten sluiten tussen een diffusor met een eenvoudige geometrie en een diffusorvorm, welke met zo min mogelijk energieverlies de breedte van het trekkanaal verhoogd. De Japanse producenten van de huidige blazer hebben waarschijnlijk met hun stapsgewijze verbreding de weegschaal naar de eenvoud laten doorslaan.

- Bij Akzo Nobel is men tevens geïnteresseerd in de stroming in de luchtinlaat. Uit metingen van Persoon is gebleken dat de drukval over de luchtinlaat groot is. Het grootste verlies aan vermogen wordt rondom en in de luchtinlaat geleden. Het grote energieverlies treedt met name op als de luchtinlaat verzadigd raakt, ofwel indien choking optreedt. Uit het oogpunt van kostenreductie in de spleetblazer moet naast het vinden van de ideale trekkanaalgeometrie eveneens aandacht worden besteed aan de stroming in de luchtinlaat. Het numeriek doorrekenen van de luchtinlaat geniet aanbeveling.

- De CWI-code is geschikt voor numerieke berekeningen, waarin een tweede orde toestandsinterpolatie is toegepast. Ons numerieke schema wordt in dat geval tweede orde nauwkeurig. Indien gewenst zijn we dus in staat met de CWI-code nauwkeurigere resultaten te produceren. Op deze wijze kunnen we de invloed van geometrieaanpassingen in de luchtstroming nog beter in beeld brengen.

- De interessante vraag voor Akzo Nobel blijft welke blazergeometrie optimaal is voor de generatie van voldoende trekkracht met zo min mogelijk kosten ten gevolge van het verbruikte vermogen om perslucht onder hoge druk vanuit de suskamer naar het trekkanaal te blazen. Met ons huidige onderzoek hebben we reeds aanbevelingen gedaan omtrent geometrieveranderingen, waarmee onder de huidige condities maximale trekkracht kan worden gegenereerd. We zijn echter in staat met de CWI code veel meer berekeningen uit te voeren. Zojuist zijn mogelijkheden voorgesteld voor harde geometrievariatie in de huidige blazergeometrie met diffusor, maar we zouden ook kunnen denken aan variatie in de lengte of breedte van het trekkanaal of in variaties in de breedte van de luchtinlaat. Onderzoek naar nieuwe spleetblazervormen behoort eveneens tot de mogelijkheden. Tevens kan gedacht worden aan variaties in de opgelegde randvoorwaarden aan de luchtinlaat. Variaties in instroomhoek of Machgetal leveren misschien eveneens een nog uitgebreider beeld voor de mogelijkheden tot de generatie van extra trekkracht. In samenwerking met medewerkers van Akzo Nobel is het van belang te zoeken naar de mogelijkheden, welke interessant zijn voor verder onderzoek.

11.2.2 Suggestie voor modeluitbreiding en verder trekkrachtonderzoek

- Het is bijna een schot voor open doel. Het blijft interessant aandacht te besteden aan een goed model voor de trekkracht aan de filamenten. Vooralsnog hebben we een eenvoudige trekkrachtmaat toegepast. Met een betere trekkrachtmaat zouden we misschien de uitspraken omtrent geschikte blazergeometrieën naar aanleiding van onze numerieke berekeningen kunnen nuanceren.

- Zonder direct aan een nieuw trekkrachtmodel of uitgebreide grenslaagtheorie te denken kan de evaluatie van de schuifspanningen op een vlakke plaat ter plaatse van het symmetrievlak een goede suggestie zijn voor het testen van de aangeraden geometrieveranderingen in verband met trekkrachtverhoging. Implementatie van de vaste wand kan in de CWI code plaatsvinden.

- In ons huidige stromingsmodel is aangenomen dat de stroming in de blazer laminair is. Met name rond de luchtinlaat en rond de stap zullen turbulentieëffecten echter ook een rol spelen. Eveneens mag voor stromingen met een hoog Reynoldsgetal de turbulentie niet zonder meer buiten beschouwing worden gelaten. Uit metingen van Persoon blijkt echter dat de relatieve turbulentie intensiteit slechts maximaal 2% bedraagt. Onze aanname, dat de luchtstroming in de spleetblazer laminair is, komt redelijk overeen met de praktijk, maar met uitbreiding van ons model met turbulentie kunnen we echter een nog betere aansluiting maken.

- We sluiten af met een laatste ultieme modeluitbreiding. Het zou ideaal zijn indien we het 3D blazerprobleem in aanwezigheid van de filamenten konden oplossen. Voor alsnog lijkt dat numeriek, laat staan analytisch, een onbegonnen zaak.

11.2.3 Suggesties voor verder onderzoek betreffende de CWI-code

De suggesties geven indicatie voor uitbreidingsmogelijkheden van de code.

- Met het oog op convergentieproblemen biedt de preconditionering in de gediscretiseerde vergelijkingen een uitkomst. Een andere mogelijkheid, welke vaak geschikt is voor de reductie van convergentie problemen, is het oplossen van het instationaire i.p.v. het stationaire probleem. De CWI-code is geschikt voor stationaire problemen. Een uitbreiding van de code, zodat eveneens instationaire problemen kunnen worden aangepakt, is aantrekkelijk. Misschien zijn we in dat geval in staat de code toe te passen op een geometrie, waarin de backward facing step, de harde verbreding, is opgenomen.

- De luchtinlaat is niet in onze geometrie opgenomen. Onderzoek naar de stroming in de luchtinlaat is echter van groot belang. We kunnen op deze wijze misschien meer inzicht verkrijgen in de manier, waarop we de trekkrachtverhoging door geometrieaanpassingen in het trekkanaal kunnen terugkoppelen naar drukreductie in de suskamer. Daarnaast zijn we met onze geometrie genoodzaakt randvoorwaarden voor te schrijven aan het einde van de luchtinlaat. Over de stroming ter plaatse is echter weinig bekend. Onze aanname van choking en instroom onder een hoek van 20° lijkt gerechtvaardigd. Het zou echter gunstiger zijn indien we de geometrie konden uitbreiden. Opties tot toepassing van de CWI-code op een uitgebreidere, moeilijkere geometrie is de uitbreiding van de code met multiblock. De mogelijkheden zijn daartoe aanwezig. Een andere optie is het vinden van een roostergenerator welke geschikt is voor het leggen van een single block over een geometrie met luchtinlaat. We plaatsen bij de uitbreiding wel de kanttekening, dat we met de huidige code op het CWI in staat zijn een willekeurig stromingsprofiel aan de luchtinlaat voor te schrijven. Dit biedt de mogelijkheid onderzoek te doen naar het trekkrachtmechanisme onder invloed van zowel subsone als supersone instroom bij de luchtinlaat.

Bibliografie

[1] J.D. Anderson, Jr. *Modern compressible flow : with historical perspective.* McGraw-Hill, second edition, 1990.

[2] G.K. Batchelor. *An introduction to fluid dynamics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[3] C. Bos. A sublayer description for the air friction acting on thin filaments during melt spinning. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 31(1):167–176, 1988.

[4] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of mathematical physics.* Interscience, New York, 1962.

[5] M.P.A. de Haas and J.F. Boer. Optimization of fiber transport by means of a gasflow(1). Technical Report CDM194002, TU Eindhoven, Akzo NV, Arnhem, 1994.

[6] P. Dutt. Stable boundary conditions and difference schemes for Navier-Stokes equations. *Siam Journal Numerical Analysis*, 25:245–267, 1988.

[7] B. Engquist and S. Osher. Stable and entropy satisfying approximations for transonic flow calculations. *Math. Comp.*, 34:45–75, 1980.

[8] B. Engquist and S. Osher. One-sided difference approximations for nonlinear conservation laws. *Math. Comp.*, 36:321–352, 1981.

[9] S.F.A.H.P. Erdmann. Inleiding supersone aerodynamica. TU Delft, 1997. Diktaat.

[10] B. Gustafsson and A. Sundstrom. Incompletely parabolic problems in fluid dynamics. *Uppsala University*, 1976. Internal report.

[11] W. Hackbusch. *Multi-Grid methods and applications.* Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[12] P.W. Hemker. Eight lectures on discretisation principles and hyperbolic conservation laws. UVA, Amsterdam.

[13] P.W. Hemker and S.P. Spekreijse. Multiple grid and Osher's scheme for the efficient solution of the steady Euler equations. *Appl. Numer. Math.*, 2:475–493, 1986.

[14] C. Hirsch. *Numerical computation of internal and external flows*, volume 1: Fundamentals of numerical discretization. John Wiley & Sons, Chichester, 1988.

[15] C. Hirsch. *Numerical computation of internal and external flows*, volume 2: Computational methods for inviscid and viscous flows. John Wiley & Sons, Chichester, 1990.

[16] B. Koren. Upwind discretization of the steady Navier-Stokes equations. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 11:99–117, 1990.

[17] B. Koren. *Multigrid and defect correction for the steady Navier-Stokes equations application to aerodynamics.* Number 74 in CWI Tracts. CWI, Amsterdam, 1991.

[18] B. Koren. Condition improvement for point relaxation in multigrid subsonic Euler-flow computations. *Appl. Num. Math.*, 16:457–469, 1995.

[19] C. Korving, H.F.M. Corstens, and R. Timman. Mechanica van continue media. TU Delft, 1986.

[20] D. Lanser. Numerieke berekeningen aan een hogesnelheidsluchtstraal in een spleetblazer. Literatuurverslag, dec. 1996.

[21] P.D. Lax. Hyperbolic systems of conservation laws ii. *Comm. Pure Appl. Math.*, 10:537–566, 1957.

[22] H.W. Liepmann and A. Roshko. *Elements of gas dynamics.* John Wiley and Sons, New York, 1957.

[23] S. Osher. Upwind schemes and boundary conditions with applications to Euler equations in general geometries. *Math.Comp.*, 50:447–481, 1983.

[24] S. Osher and F. Solomon. Upwind difference schemes for hyperbolic systems of conservation laws. *Math. Comp.*, 38:339–374, 1982.

[25] H. Schlichting. *Boundary-Layer theory.* Mc Graw-Hill series in mechanical engeneering. Mc Graw-Hill, Inc., New York, 1979.

[26] J.L. Steger. Coefficient matrices for implicit finite difference solution of the inviscid fluid conservation law equations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 13:175–188, 1978.

[27] J.L. Steger and R.F. Warming. Flux vector splitting of the inviscid gas-dynamic equations with applications to finite difference methods. *Journal of computational physics*, 40:263–293, 1981.

[28] R. Temam. *Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis.* North-Holland, 1977.

[29] B. van Leer. Flux-vector splitting for the Euler equations. In *Proceedings of the Eighth International Conference in Numerical Methods in Fluid Dynamics*, Aachen, 1982.

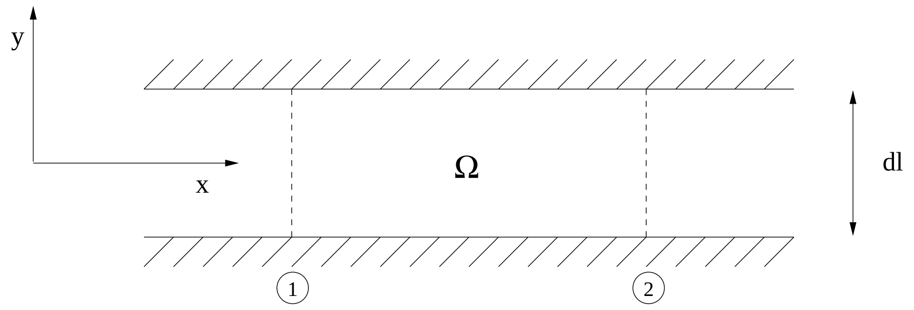
[30] B. van Leer. Flux vector splitting for the 1990's. Technical report, University of Michigan, 1990. invited lecture for the CFD Symposium on aeropropulsion, NASA Lewis.

[31] P. Wesseling. *An introduction to multigrid methods.* John Wiley and Sons, Chichester, 1992.

Appendix A

Een resultaat uit de 1-dimensionale gasdynamica

We beschouwen een één-dimensionale stationaire stroming van een niet-viskeus compressibel medium in een kanaal zonder warmte toevoer, zie figuur A.1.



Figuur A.1: Kanaal met volume Ω

We passen, de continuïteits-, impuls- en energievergelijking, (3.21), (3.22) en (3.24) toe op het aangegeven volume Ω met

$$\Omega(x,y) = \{(x,y) \mid x_1 \leq x \leq x_2,\ -y_1 \leq y \leq y_1\}$$

en rand

$$\partial\Omega = \{x = x_1 \cup y = -y_1 \cup x = x_2 \cup y = y_1\}\,.$$

De volumekrachten worden verwaarloosd.
Continuïteitsvergelijking :

$$\begin{aligned} -\oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS &= 0 \quad \Rightarrow \\ \rho_1 u_1 d\ell &= \rho_2 u_2 d\ell. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Impulsvergelijking in de x-richting:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} \rho\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\, u\, dS &= -\oint_{\partial\Omega} p n_x\, dS \quad \Rightarrow \\ -\rho_1 u_1^2 d\ell + \rho_2 u_2^2 d\ell &= p_1 d\ell - p_2 d\ell. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Energievergelijking:

$$-\oint_S p\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dS = \oint_S \rho \left(e + \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{2}\right) \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, dS \quad \Rightarrow$$

$$
\begin{aligned}
p_1 u_1 d\ell - p_2 u_2 d\ell &= -\rho_1 \left(e_1 + \frac{u_1^2}{2} \right) u_1 d\ell + \rho_2 \left(e_1 + \frac{u_2^2}{2} \right) u_2 d\ell \quad \Rightarrow \\
\frac{p_1}{\rho_1} + e_1 + \frac{u_1^2}{2} &= \frac{p_2}{\rho_2} + e_2 + \frac{u_2^2}{2}. \qquad \text{(A.3)}
\end{aligned}
$$

De grootheden ρ_1,u_1,p_2 ect. zijn grootheden op respectievelijk de doorsnede $x = x_1$ en $x = x_2$. Samengevat resulteren bovenstaande balansen in het onderstaande stelsel

$$
\begin{aligned}
\rho_1 u_1 &= \rho_2 u_2, \qquad \text{(A.4)} \\
p_1 + \rho_1 u_1^2 &= p_2 + \rho_2 u_2^2, \qquad \text{(A.5)} \\
h_1 + \frac{u_1^2}{2} &= h_2 + \frac{u_2^2}{2}. \qquad \text{(A.6)}
\end{aligned}
$$

Hierbij is gebruik gemaakt van vergelijking (3.7).

We beschouwen de energievergelijking (A.6). Als we aannemen dat het medium calorisch ideaal is, dan volgt via vergelijking (3.12)

$$
c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = c_p T_2 + \frac{u_2^2}{2}. \qquad \text{(A.7)}
$$

Uit deze variant op de energievergelijking kunnen we een relatie afleiden tussen de temperatuur T en de totale temperatuur T_0 in een punt.
Stel punt 1 correspondeert met punt A uit de definitie van de totaal condities, zie paragraaf 3.2.5. Punt 2 laten we vervolgens corresponderen met de toestand waarin het vloeistofelement in punt A isentropisch is teruggebracht tot een snelheid nul, ofwel $T_1 = T,\ u_1 = u$ en $T_2 = T_0,\ u_2 = 0$. Uit vergelijking (A.7) volgt dan

$$
\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{u^2}{2 c_p T}.
$$

Via vergelijking (3.14) en vergelijking (3.20) voor de geluidssnelheid geldt vervolgens

$$
\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2. \qquad \text{(A.8)}
$$

Met behulp van de isentrope relaties, vergelijking (3.17) kunnen we hieruit soortgelijke relaties afleiden m.b.t. de druk, dichtheid en geluidssnelheid in een punt

$$
\begin{aligned}
\frac{p_0}{p} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}, \qquad \text{(A.9)} \\
\frac{\rho_0}{\rho} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}, \qquad \text{(A.10)} \\
\frac{c_0}{c} &= \sqrt{\frac{\frac{p_0}{\rho_0}}{\frac{p}{\rho}}} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \qquad \text{(A.11)}
\end{aligned}
$$

Appendix B

Dimensieloos maken van de Navier-Stokes vergelijkingen

We beschouwen het stelsel

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = 0, \tag{B.1}$$

met

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho E u + pu - \tau_{xx} u - \tau_{yx} v - k\frac{\partial T}{\partial x} \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho v^2 + pv - \tau_{yy} \\ \rho E v + pv - \tau_{xy} u - \tau_{yy} v - k\frac{\partial T}{\partial y} \end{pmatrix},$$

waarin

$$\tau_{xx} = \mu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial y}\right), \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad \tau_{yy} = \mu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Om de bovenstaande vergelijkingen dimensieloos te maken voeren we onderstaande dimensieloze grootheden in. We kiezen daarbij drie onafhankelijke grootheden, in dit geval, l, U, ρ_{ref}, waarmee we alle grootheden in het probleem dimensieloos kunnen maken.

$$\overline{x} = \frac{x}{l}, \quad \overline{u} = \frac{u}{U}, \quad \overline{\mu} = \frac{\mu}{\mu_{\text{ref}}}, \quad \overline{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{\text{ref}}}, \quad \overline{E} = U^2 E, \quad \overline{R} = 1 = \frac{R}{R_{\text{ref}}}, \tag{B.2}$$

$$\overline{y} = \frac{y}{l}, \quad \overline{v} = \frac{v}{U}, \quad \overline{k} = \frac{k}{k_{\text{ref}}}, \quad \overline{p} = \frac{p}{\rho_{\text{ref}} U^2}, \quad \overline{T} = \frac{U^2}{R_{\text{ref}}} \frac{\overline{p}}{\overline{R}\overline{\rho}} = \frac{U^2}{R} \frac{\overline{p}}{\overline{\rho}}. \tag{B.3}$$

l, U en ρ_{ref} zijn karakteristieke grootheden van de stroming. De μ_{ref}, k_{ref} en R_{ref} zijn referentie constantes voor respectievelijk μ, k en R. De dimensieloze grootheden uit vergelijking (B.2) introduceren we vervolgens in het stelsel (B.1). Voor notatie gemak laten we de streepjes boven de dimensieloze grootheden weg.
Voor de continuïteitsvergelijking volgt

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{\text{ref}} U}{l} \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\rho_{\text{ref}} U}{l} \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0 \quad \Rightarrow \\ \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \tag{B.4}$$

De impulsvergelijking in x-richting geeft

$$\frac{\rho_{\text{ref}} U^2}{l} \frac{\partial \left(p + \rho u^2\right)}{\partial x} - \frac{\mu_{\text{ref}} U}{l^2} \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right) +$$

$$+\frac{\rho_{\mathrm{ref}}U^2}{l}\frac{\partial(\rho uv)}{\partial y}-\frac{\mu_{\mathrm{ref}}U}{l^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p+\rho u^2\right)+\frac{\partial(\rho uv)}{\partial y}-\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right)-\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right) = 0, \quad \text{(B.5)}$$

met

$$\mathrm{Re}=\frac{\rho_{\mathrm{ref}}Ul}{\mu_{\mathrm{ref}}}, \quad \text{(B.6)}$$

als het kengetal van Reynolds.
Op dezelfde wijze volgt voor de impulsvergelijking in de y-richting

$$\frac{\partial(\rho uv)}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(p+\rho v^2\right)-\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)-\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)=0. \quad \text{(B.7)}$$

Voor de energievergelijking volgt

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho_{\mathrm{ref}}U^3}{l}\frac{\partial(\rho Eu+pu)}{\partial x}-\frac{\mu_{\mathrm{ref}}U^2}{l^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu u\left(\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\mu v\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)+\\
&+\frac{\rho_{\mathrm{ref}}U^3}{l}\frac{\partial(\rho Ev+pv)}{\partial y}-\frac{\mu_{\mathrm{ref}}U^2}{l^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu u\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\mu v\left(\frac{4}{3}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)+\\
&-\frac{k_{\mathrm{ref}}U^2}{l^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\frac{p}{\rho}\right)\right)-\frac{k_{\mathrm{ref}}U^2}{l^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R}\frac{p}{\rho}\right)\right)=0 \qquad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(\rho Eu+pu)}{\partial x}-\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu u\left(\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\mu v\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)+\\
&\frac{\partial(\rho Ev+pv)}{\partial y}-\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu u\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\mu v\left(\frac{4}{3}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)+\\
&-\frac{1}{Re}\frac{1}{(\gamma-1)}\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial c^2}{\partial x}\right)-\frac{1}{Re}\frac{1}{(\gamma-1)}\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial c^2}{\partial y}\right) = 0.
\end{aligned} \quad \text{(B.8)}$$

We hebben daarbij gebruik gemaakt van vergelijking (3.19) voor de geluidssnelheid, c en vergelijking (3.14) voor de specifieke warmte bij constante druk, c_p.
Het Prandtlgetal, Pr, is gedefinieerd als

$$\mathrm{Pr}=\frac{\mu_{\mathrm{ref}}c_p}{k_{\mathrm{ref}}}. \quad \text{(B.9)}$$

Samengevat luiden de dimensieloze stationaire NS-vergelijkingen

$$\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x}+\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial y}-\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}+\frac{\partial\mathbf{s}}{\partial y}\right)=0, \quad \text{(B.10)}$$

met

$$\mathbf{f}=\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ \rho u\left(E+\frac{p}{\rho}\right)\end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{g}=\begin{pmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ \rho v\left(E+\frac{p}{\rho}\right)\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{r}=\begin{pmatrix}0\\ \tau_{xx}\\ \tau_{xy}\\ u\tau_{xx}+v\tau_{xy}+\frac{1}{(\gamma-1)}\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial c^2}{\partial x}\end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{s}=\begin{pmatrix}0\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yy}\\ u\tau_{xy}+v\tau_{yy}+\frac{1}{(\gamma-1)}\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial c^2}{\partial y}\end{pmatrix},$$

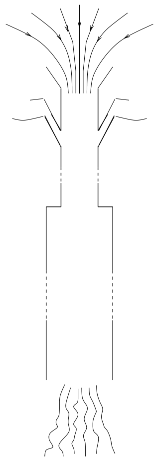
waarin

$$\tau_{xx}=\mu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial y}\right), \quad \tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad \tau_{yy}=\mu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Appendix C

De chimney-conditie

Bij benadering vatten we de stroming boven de blazer en aan het begin van de draadinlaat op als een potentiaalstroming. Aan de uitstroomzijde van het trekkanaal ontstaat een zoggebied, zie figuur C.1.



Figuur C.1: Verwacht stroomlijnenprofiel boven en onder de blazer

Op een potentiaalstroming is de wet van Bernoulli voor incompressibele stromingen toepasbaar. Deze resulteert voor twee willekeurige toestanden uit het potentiaalstromingsgebied in de voorwaarde

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 \quad \text{met} \quad V = \|\mathbf{v}\|. \tag{C.1}$$

We passen Bernoulli toe tussen de toestand op de rand $\partial\Omega_1$ en de heersende toestand op oneindige afstand van de blazer. Ver weg van de blazer staat de lucht stil. Daar geldt $u = v = 0$ en $p = p_{\mathrm{omg}}$. Op de rand $\partial\Omega_1$ nemen we aan dat geldt $v = 0$. Voor deze beide toestanden gaat vergelijking (C.1) over in

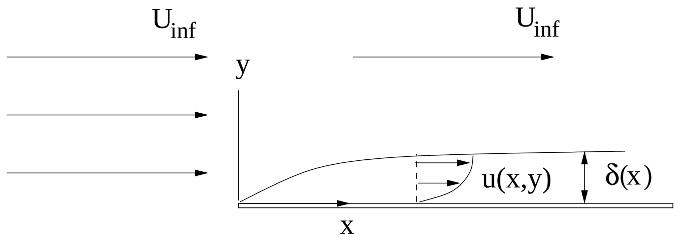
$$p_{\partial\Omega_1}(y) + \frac{1}{2}\rho u_{\partial\Omega_1}^2(y) = p_{\mathrm{omg}}. \tag{C.2}$$

Het principe van de chimney conditie werkt nu als volgt. We leggen op de rand $\partial\Omega_1$ de druk, dichtheid en instroomhoek δ vast. De druk bepalen we daarbij uit vergelijking (C.2) na een aanname te hebben gedaan over het snelheidsprofiel $u(y)$ op de rand. We nemen aan dat de omgevingsgrootheden bekend zijn. Vervolgens lossen we met onze iteratieve numerieke oplosmethode de NS-vergelijkingen op, zoals beschreven in paragraaf 8.5. Tijdens dit proces wordt het snelheidsprofiel $u(y)$ op de rand bij iedere iteratie aangepast n.a.v. de stroming in het binnengebied en de voorgeschreven randvoorwaarden δ, p en ρ. Met het gevonden snelheidsprofiel $u(y)$ leggen we na elke iteratie opnieuw de randvoorwaarden δ, p en ρ op, waarbij de druk is aangepast via vergelijking (C.2). Op deze wijze varieert de drukvoorwaarde dus tijdens het iteratieve numerieke oplosproces van de NS-vergelijkingen. Men neemt aan dat, op die manier uiteindelijk een goede aanname wordt gemaakt voor de druk op de rand $\partial\Omega_1$.

Appendix D

Een afschatting voor de dikte van de grenslaag op een vlakke plaat

We beschouwen een vlakke plaat met een oneindig dunne afmeting. De plaat wordt onder een hoek van nul graden aangestroomd door een parallel stroming met snelheid U_∞. Voor stromingen met een hoog Re-getal blijft de invloed van viscositeit beperkt tot een dunne laag in de buurt van de plaat, de grenslaag. In figuur D.1 staat de situatie geschetst.



Figuur D.1: Grenslaagvorming voor een stroming langs een vlakke plaat

We nemen aan dat het medium incompressibel is. De stroming is stationair. Naar de beschreven situatie heeft Blasius uitgebreid onderzoek gedaan. Blasius heeft een exacte uitdrukking gevonden voor de dikte van de grenslaag afhankelijk van de afstand tot de voorkant van de plaat, $\delta(x)$. Voor een wiskundige afleiding van deze grenslaagdikte verwijzen we naar Schlichting [25, blz.135–148]. Wij volgen zijn redenering aan de hand van een intuïtieve orde afleiding van de grenslaagdikte. Voor ons is slechts deze orde afschatting van belang.

Stel de grenslaag is niet van de vaste wand losgelaten. Voor een beschrijving van het principe van loslating verwijzen we naar Schlichting [25, blz.28–38]. Het stromingsgebied boven de plaat bestaat dan uit twee regionen. In de zone boven de grenslaag spelen viskeuze effecten geen rol en wordt de stroming volledig bepaald door de traagheidskrachten. In de grenslaag spelen wrijvingskrachten, de schuifspanningen, naast de traagheidskrachten een belangrijke rol. De traagheidskracht per volume eenheid bedraagt

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x}.$$

De wrijvingskracht per volume eenheid bedraagt

$$\frac{\partial \tau}{\partial y}.$$

Onder de aanname dat de stroming laminair is, geldt $\frac{\partial \tau}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. De beschreven krachten zijn af te leiden uit de integraalbalansen voor de impulsvergelijking in de x-richting.

We gaan de beide belangrijkste krachten in de grenslaag afschatten. We passen daarbij de volgende afschattingen toe, $u = O(U_\infty)$, $x = O(\ell)$ en $y = O(\delta)$. δ beschrijft de ordegrootte van de grenslaagdikte langs de plaat. ℓ is de lengte van de plaat. Wegens de voorwaarde dat in de grenslaag de traagheidskrachten en schuifkrachten een even grote rol spelen, volgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad &\sim \quad \rho u \frac{\partial u}{\partial x} \quad \Rightarrow \\ \mu \frac{U_\infty}{\delta^2} \quad &\sim \quad \rho \frac{U_\infty^2}{\ell}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu \ell}{U_\infty}}.$$

Het Reynoldsgetal voor de plaatstroming definieerde Blasius als

$$\mathrm{Re}_{\ell_{\mathrm{plaat}}} = \frac{U_\infty \ell}{\nu}.$$

Op deze wijze is de grenslaagdikte over onze vlakke plaat af te schatten als

$$\frac{\delta}{\ell} \sim \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}_{\ell_{\mathrm{plaat}}}}}.$$

Blasius leidde af

$$\frac{\delta(x)}{x} = \frac{5}{\sqrt{\mathrm{Re}_{x_{\mathrm{plaat}}}}}.$$

Hierin is de lengte van de plaat ℓ vervangen door de afstand x, als de afstand tussen het huidig punt en de voorkant van de plaat. Blasius defineerde daarbij de grenslaagdikte als de afstand $\delta(x)$ tot de plaat, waar de snelheid $u(x,y)$ 99% van de de ongestoorde snelheid U_∞ bedroeg. De dikte van de grenslaag neemt met de afstand x toe. Re_x is gedefinieerd als

$$\mathrm{Re}_{x_{\mathrm{plaat}}} = \frac{U_\infty x}{\nu}.$$

Op basis van deze uitdrukking zullen we in de toekomst met de orde afschatting $\frac{\delta(x)}{x} \sim \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$ gaan werken.

Voor een viskeuze, laminaire, incompressibele, parallel stroming langs een vlakke plaat heeft Blasius een afschatting gemaakt voor de grenslaagdikte. Wij passen zijn afschatting toe langs de vaste wanden van de blazer, waarbij we aannemen dat we ons in een recht trekkanaal bevinden. De afschatting is voor de blazerwanden uitermate grof. Onze stroming in het kanaal is compressibel, maar in de loop van het kanaal worden de dichtheidsvariaties kleiner. Daarnaast is in ons geval niet echt sprake van een vrije stroming langs een vlakke plaat. We bevinden ons in een kanaal. De grenslagen welke aan beide wanden worden opgebouwd kunnen onderling interactie vertonen. Voor stromingen met een hoog Reynoldsgetal kunnen we de theorie redelijkerwijs toepassen. Voor de grenslaagdikte volgt met Blasius

$$\frac{\delta_{\mathrm{grenslaag}_{\mathrm{wand}}}}{x} \sim \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}.$$

Het Reynoldsgetal in deze formule is het Reynoldsgetal, welke door Blasius is gedefinieerd als

$$\mathrm{Re}_x = \frac{Ux}{\nu}.$$

U beschrijft een karakteristieke snelheid in de stroming. In het geval van een parallel stroming langs een vlakke plaat nemen we voor deze snelheid, de snelheid in het buitengebied. In ons geval kiezen we voor deze karakteristieke snelheid de geluidssnelheid in de suskamer. Om de grenslaagdikte te relateren aan onze definitie van het Reynoldsgetal passen we een schaling toe. De grenslaagdikte schatten we langs de wand af als

$$\frac{\delta_{\mathrm{grenslaag}_{\mathrm{wand}}}}{x} \sim \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{\ell}} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}. \tag{D.1}$$

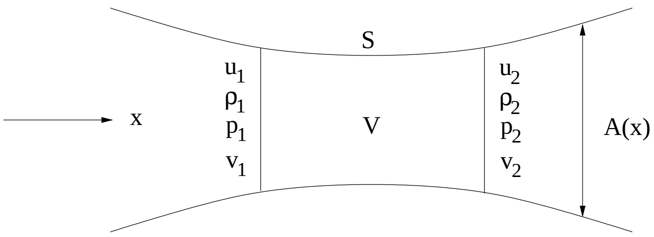
Daarbij is gebruik gemaakt, dat geldt $\mathrm{Re}_x \sim \mathrm{Re} \cdot \frac{\ell}{l}$. ℓ is de lengte van het trekkanaal. l is de breedte van het trekkanaal aan de draadinlaat betrokken op het halfprobleem. Re beschrijft het Reynoldsgetal naar aanleiding van de dimensieloosmaking welke wij in het kanaal hebben toegepast, zie paragraaf 8.4.

Appendix E

Een aantal resultaten uit de quasi-één-dimensionale gasdynamica

E.1 De oppervlakte-snelheid relatie

We beschouwen een 2D quasi-één-dimensionale stationaire stroming door een stroombuis met variërende doorsnede $A(x)$. Het medium is niet-viskeus. Voor zo'n stroming geldt voor de druk, de dichtheid en snelheidscomponenten $p = p(x),\ \rho = \rho(x),\ u = u(x),\ v = 0$ en $A = A(x)$. In figuur E.1 staat de situatie geschetst.



Figuur E.1: Situatieschets van een quasi-één-dimensionale stroming

We passen de integraalbalansen (3.21), (3.22) en (3.24) toe op het controle volume V uit figuur E.1. Op de randen heersen de aangegeven toestanden. Er volgt

$$\begin{array}{llll} \text{cont.verg.} & : & \rho_1 u_1 A_1 & = \rho_2 u_2 A_2, \\ \text{im.verg. in x} - \text{richting} & : & p_1 A_1 + \rho_1 u_1^2 A_1 + \int_{A_1}^{A_2} p dA & = p_2 A_2 + \rho_2 u_2^2 A_2, \\ \text{ev.verg.} & : & h_1 + \frac{u_1^2}{2} & = h_2 + \frac{u_2^2}{2}. \end{array} \tag{E.1}$$

We beschouwen de continuïteitsvergelijking en schrijven deze vergelijking als

$$\rho(x)u(x)A(x) = \text{constant} \quad \forall x \quad \Rightarrow \quad \frac{d\left(\rho(x)u(x)A(x)\right)}{dx} = 0.$$

Uit deze differentiaalvorm volgt

$$\frac{1}{\rho(x)}\frac{d\rho}{dx} + \frac{1}{u(x)}\frac{du}{dx} + \frac{1}{A(x)}\frac{dA}{dx} = 0. \tag{E.2}$$

We willen de term $(1/\rho)d\rho/dx$ uit deze vergelijking elimineren. We gebruiken daartoe de differentiaalvorm voor de impulsvergelijking welke uit vergelijking (E.1) kan worden afgeleid, zie Anderson [1, blz.

$$\frac{dp}{dx} = -\rho u \frac{du}{dx}.$$

Hieruit volgt

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\frac{d\rho}{dx} = -u\frac{du}{dx}. \tag{E.3}$$

Ter herinnering merken we op dat we te maken hebben met een adiabatische niet-viskeuze stroming. Dissipatieve effecten zoals wrijving en warmtegeleiding spelen geen rol. De stroming is isentroop. Dit betekent dat met iedere drukverandering, dp, een isentropische verandering in de dichtheid, $d\rho$, correspondeert, ofwel

$$\frac{dp}{d\rho} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = c^2. \tag{E.4}$$

Als we vergelijking (E.3) en (E.4) combineren, dan volgt

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dx} = -\frac{u}{c^2}\frac{du}{dx} = -\frac{M^2}{u}\frac{du}{dx}.$$

We substitueren deze vergelijking in vergelijking (E.2) en dan resulteert

$$\frac{1}{A(x)}\frac{dA}{dx} = \frac{\left(M(x)^2 - 1\right)}{u(x)}\frac{du}{dx}.$$

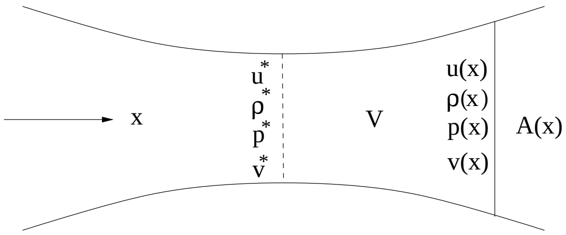
Deze relatie staat bekend als de oppervlakte-snelheid relatie.
Uit deze relatie kunnen de volgende conclusies worden getrokken.

- Voor een subsone stroming ($M < 1$) resulteert een afname in het doorsnee oppervlakte, $dA/dx < 0$, in een snelheidstoename $du/dx > 0$. Een toename in het doorsnee oppervlak resulteert in een snelheidsafname.
- Voor een supersone stroming ($M > 1$) resulteert een afname in het doorsnee oppervlakte in een afname van de snelheid. Een toename in het doorsnee oppervlak resulteert in een snelheidstoename.
- Voor een sonische stroming ($M = 1$) geldt $dA/dx = 0$. Dit betekent dat indien de stroming in de stroombuis sonisch is de stroming zich ter plaatse van een minimum of maximum doorstroomoppervlak A bevindt. In Erdmann [9, blz.3.5–3.6] is afgeleid dat een minimum in het oppervlak met de enige fysisch realistische oplossing correspondeert.

E.2 De oppervlakte-Mach relatie

Voor onze quasi-één-dimensionale stroming nemen we tevens aan dat we met een perfect gas te maken hebben. Stel in de buis bevindt zich een keel, waar de stroming sonisch is. Het doorstroomoppervlak ter plaatse is minimaal en duiden we aan als A^*. Tussen het Machgetal op een willekeurige locatie x en de verhouding tussen het lokale doorstroomoppervlak $A(x)$ en het doorstroomoppervlak in de sonische keel A^* kan in dat geval een relatie worden afgeleid. We spreken van de oppervlakte-Mach relatie. Hieronder staat deze relatie afgeleid.
We beschouwen een buis, zie figuur E.2, waar ter plaatse van de keel de stroming sonisch is. De toestand in de sonische keel duiden we aan met een asteriks, ofwel $M^* = 1$ en $u^* = c^*$. De oppervlakte in de keel noteren we als A^*. Op een willekeurige doorsnede x heersen de oppervlakte $A(x)$, het Machgetal $M(x)$ en de snelheidscomponent in de x-richting $u(x)$. Tussen beide doorsneden definiëren we het controle volume V, zie figuur E.2. Uit de continuïteitsvergelijking (3.21) over het controle volume V volgt

$$\rho^* u^* A^* = \rho u A, \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{A^*} = \frac{\rho^*}{\rho}\frac{c^*}{u} = \frac{\rho^*}{\rho_0}\frac{\rho_0}{\rho}c^* u, \tag{E.5}$$



Figuur E.2: Stroming door een buis met een sonische keel

Hierin staat ρ_0 voor de totale dichtheid, zoals deze is gedefinieerd in paragraaf 3.2.5. We benadrukken dat de totale dichtheid door een isentrope stroming constant is. Ofwel zowel in de sonische keel als ter plaatse x heerst dezelfde totale dichtheid. Op soortgelijke wijze als in appendix A voor een één-dimensionale stroming is gebeurd, kunnen we voor onze quasi-één-dimensionale stroming een relatie afleiden tussen de totale dichtheid ρ_0, de heersende dichtheid ρ en het Machgetal M ter plaatse x

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}. \tag{E.6}$$

In Anderson [1, blz.60] staat eveneens een relatie afgeleid tussen de snelheid $u(x)$, de geluidssnelheid $c^s(x)$ en het Machgetal $M(x)$

$$\left(\frac{u}{c^s}\right)^2 = \frac{\frac{\gamma+a}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}. \tag{E.7}$$

Het bewijs laten we achterwege. De geluidssnelheid $c^s(x)$ in een bepaald punt is een sonische conditie. Sonische condities ontstaan op soortgelijke wijze als de totale condities. In een punt brengen we de snelheid adiabatisch naar de sonische toestand. Het betreft hier een gedachte experiment. De resulterende toestand in dat geval noteren we als $q^s(x)$. Omdat de stroming isentropisch en dus ook adiabatisch is, kan worden afgeleid dat de sonische grootheden, welke zo ontstaan, in elk punt door de gehele stroming constant blijven. Ofwel ter plaatse van de sonische keel en dus in de gehele stroming, geldt $c^s = c^*$. Vergelijking (E.7) kan zodoende in vergelijking (E.5) worden toegepast. In samenwerking met vergelijking (E.6) kunnen we zodoende vergelijking (E.5) omschrijven tot

$$\begin{aligned}
\left(\frac{A}{A^*}\right)^2 &= \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{2}{\gamma-1}} \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{\frac{\gamma+1}{2} M^2} \quad \Rightarrow \\
\left(\frac{A}{A^*}\right)^2 &= \frac{1}{M^2} \left(\frac{2}{\gamma+1}\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}.
\end{aligned} \tag{E.8}$$

Bovenstaande vergelijking duiden we aan als de oppervlakte-Mach relatie. Het Machgetal op iedere locatie in de buis is een functie van het quotiënt van het lokale buisoppervlak A en het oppervlak in de sonische keel A^*.

Bijlage F

Meetresultaten van Persoon

Figuur F.1: Snelheid in het symmetrievlak in de lengterichting van de blazer

Figuur F.2: Statische druk gemeten aan de wand van de blazer

Figuur F.3: Totale druk gemeten in het symmetrievlak

Bijlage G

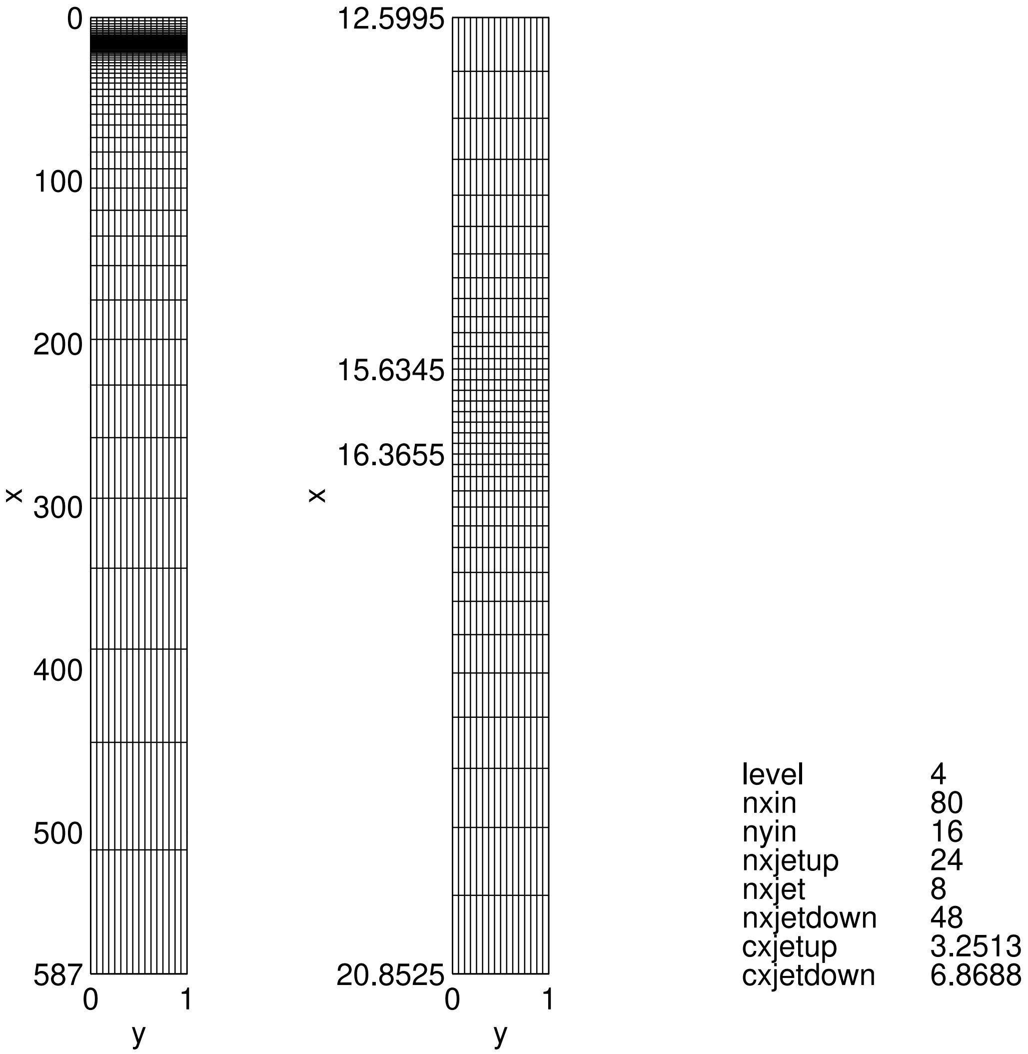
CFX, het rooster en de inputfile voor een rechte blazergeometrie

Figuur G.1: Het rooster rondom de luchtinlaat voor een rechte blazergeometrie. In de x-richting is de figuur geschaald als 1:0.083. In de y-richting is de figuur geschaald als 1:0.0588.

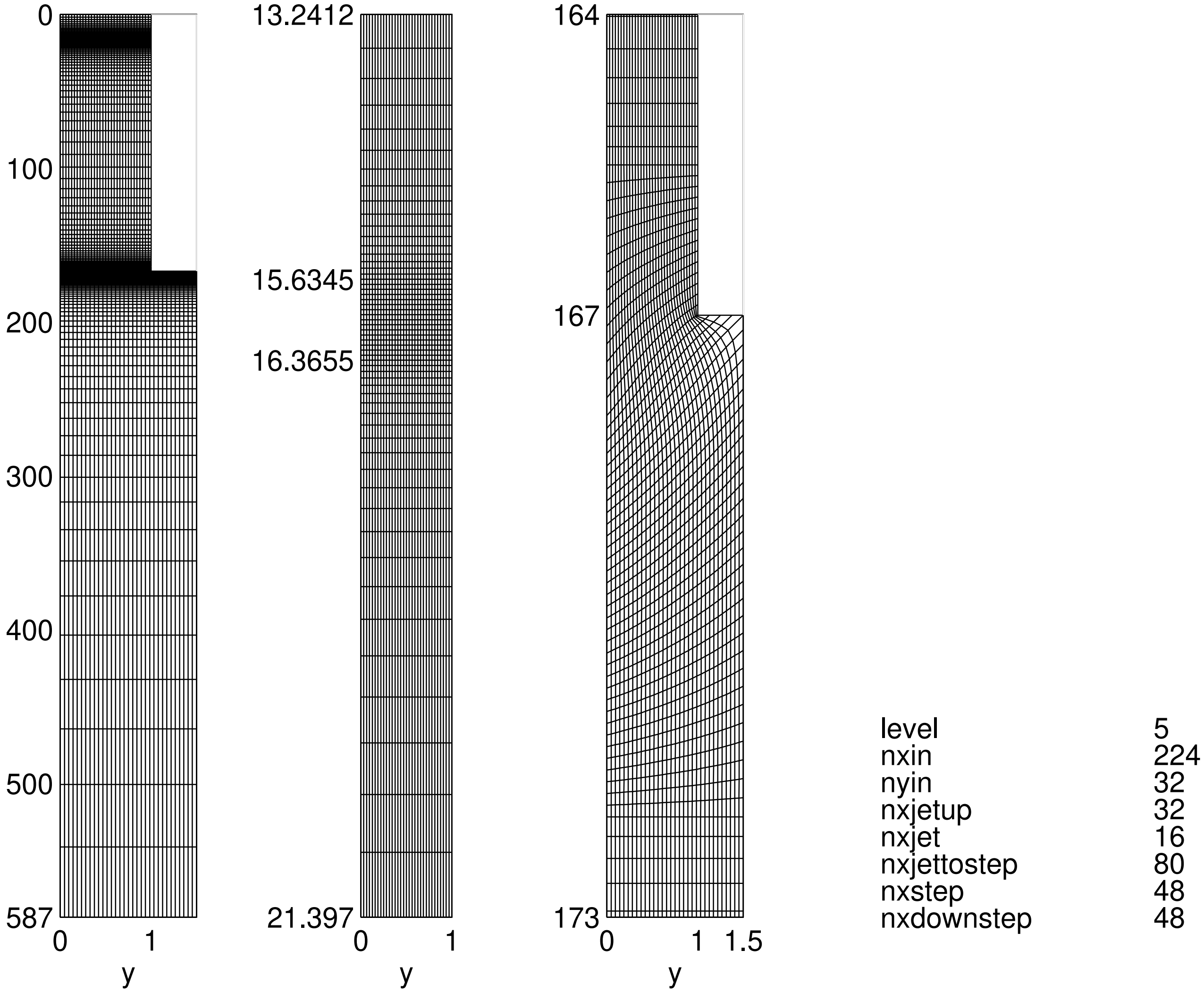
Figuur G.2: De inputfile voor het stromingsprobleem zoals beschreven in paragraaf 9.3.2

Bijlage H

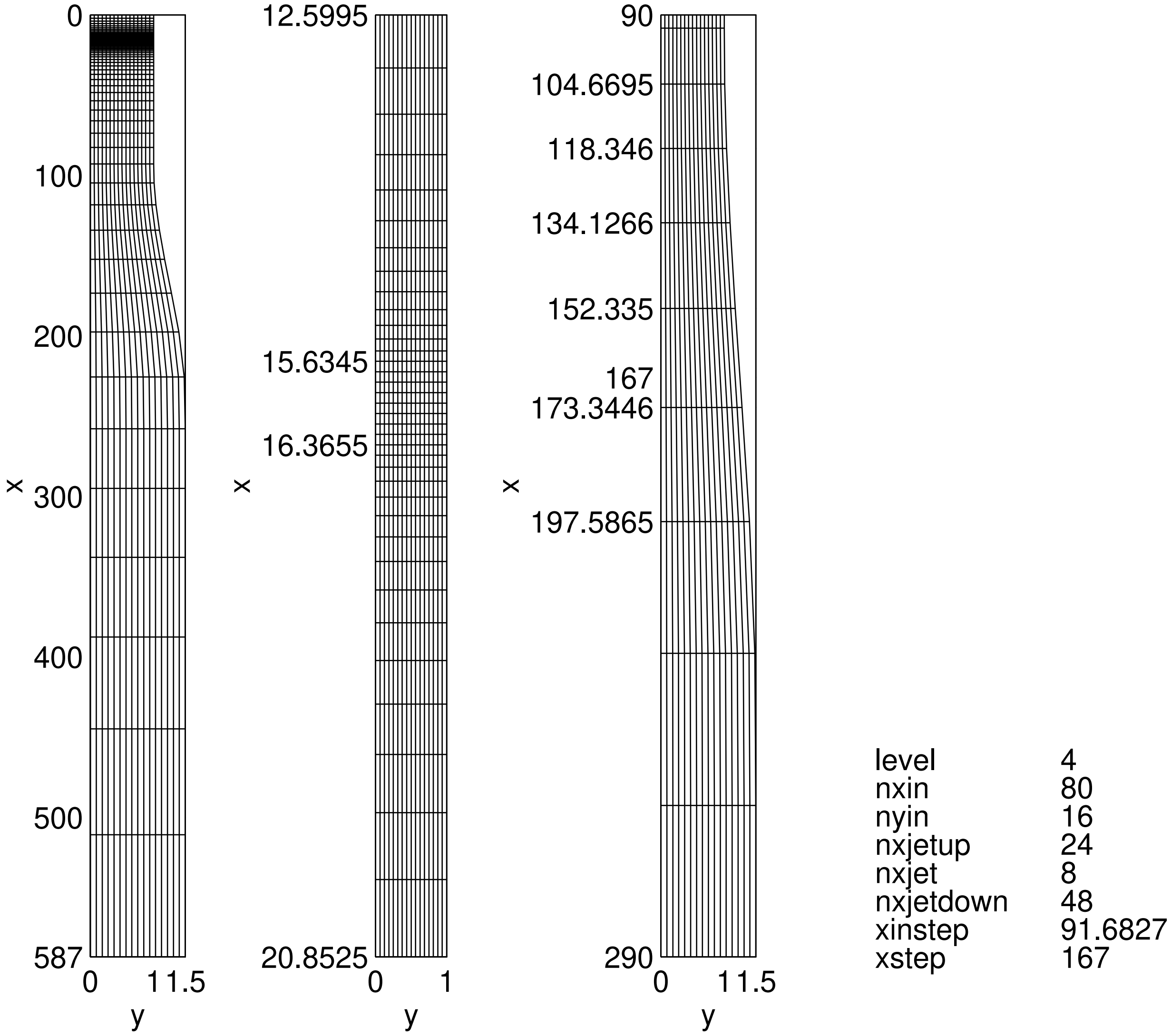
De roosters voor de vier testcases bij het draaien van de CWI-code



Figuur H.1: Het rooster voor een rechte blazergeometrie, I: rooster over de hele blazergeometrie, II: rooster rondom de luchtinlaat



Figuur H.2: Het rooster voor een blazergeometrie met een harde verbreding, I: rooster over de hele blazergeometrie, II: rooster rondom de luchtinlaat, III: rooster rond de harde verbreding



Figuur H.3: Het rooster voor een blazergeometrie met diffusor, I: rooster over de hele blazergeometrie, II: rooster rondom de luchtinlaat, III: rooster rond de diffusor