Het schaakbord van

Dion Gijswijt

De Indiase koning Shirham wilde volgens een oud verhaal de uitvinder van het schaakbord, Sissa ben Dahir, rijkelijk belonen voor zijn uitzonderlijke prestatie. Op de vraag van de koning welke beloning hij voor zijn uitvinding zou wensen, antwoordde de slimme Sissa: "Majesteit, geef me één graankorrel om op het eerste vakje te leggen, twee om op het tweede vakje te leggen, vier om op het derde vakje te leggen, acht om op het vierde vakje te leggen, en laat mij zo, O koning, elk van de vierenzestig vakjes van het schaakbord bedekken." De koning was stomverbaasd over zo'n bescheiden verzoek, niet meer dan een handvol rijst voor deze geweldige uitvinding!

Wat is de beloning?

Was Sissa echt zo bescheiden als de koning verkondigde? Als de koning zijn hofwiskundige er bij zou hebben gehaald, zou hij waarschijnlijk niet meer zo blij zijn geweest met het voorstel van Sissa.
Laten we eens nagaan om hoeveel rijst Sissa vroeg. Op het eerste vakje ligt slechts één rijstkorrel. Het aantal rijstkorrels op elk volgende vakje is steeds het dubbele van het aantal op het vorige vakje. In totaal vraagt Sissa om $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{63}$ korrels rijst. Je mag zelf nagaan dat dit gelijk is aan $2^{64} - 1$, of uitgeschreven: 18.446.744.073.709.551.615 rijstkorrels. Om een idee van deze hoeveelheid rijst te krijgen, nemen we aan dat er 50 rijstkorrels in een kubieke centimeter gaan. We hebben dus te maken met een berg van meer dan 3×10^{17} kubieke centimeter, ofwel driehonderdmiljard kubieke meter rijst. Hiermee zouden we heel België en Nederland met een meters dikke laag rijst kunnen bedekken. Misschien was Sissa toch niet zo bescheiden.

Opgave 1
Als Sissa alleen rijst zou hebben gevraagd voor de zwarte velden van het schaakbord: 1 rijstkorrel voor het eerste zwarte veld, 2 voor het tweede zwarte veld, 4 voor het derde en zo verder, zou hij dan een redelijke beloning hebben geëist? Is het aantal rijstkorrels dan meer of minder dan het aantal seconden in een mensenleven (ongeveer 75,2 jaar)?

Opgave 2
Pak een flink vel papier. Vouw het papier dubbel en herhaal dat in totaal tien keer. Probeer eventueel een groter of een dunner vel papier. Kun je je resultaten verklaren?

Machtsverheffen
In het verhaal van Sissa verdubbelt het aantal korrels rijst bij ieder volgende vakje van het schaakbord en je hebt gezien dat de aantallen op die manier razend snel groeien. Al gauw wordt het ondoenlijk om de getallen voluit op te schrijven. Veel handiger is het om de getallen als macht te noteren:
$2 \times 2 \times 2 \times 2$ wordt afgekort tot 2^4 en
$2 \times 2 \times ... \times 2$ (64 keer) tot 2^{64}.

koning Shirham

Rekenregels
Zoals je weet, kun je met machten rekenen door de volgende drie rekenregels te gebruiken:

1. $a^n \times a^m = a^{n+m}$
2. $(a^n)^m = a^{nm}$
3. $a^n \times b^n = (ab)^n$

Deze regels kun je bijvoorbeeld gebruiken om te berekenen welk van de twee getallen groter is, 3^{800} of 8^{300}.
Schrijf het eerste getal maar als $3^{2 \times 400} = (3^2)^{400} = 9^{400}$. Dit is groter dan 9^{300} en dat is weer groter dan 8^{300}.
Dus het eerste getal is de grootste van de twee.

Opgave 3
Wat is groter, 2^{30} of 3^{20}?

Opgave 4
Zet de volgende zes getallen op volgorde van klein naar groot:
$2^{(3^4)}$, $2^{(4^3)}$, $3^{(2^4)}$, $3^{(4^2)}$, $4^{(2^3)}$, $4^{(3^2)}$.

Haakjes zetten
Het is je misschien wel opgevallen dat het bij torentjes getallen, zoals die uit opgave 4, veel uitmaakt waar je de haakjes zet. Zo is $2^{(3^4)}$ gelijk aan 2^{81}, maar $(2^3)^4$ is gelijk aan 2^{12}. Als er in zo'n torentje geen haakjes worden gezet, wordt daar altijd mee bedoeld dat je van rechts naar links werkt, dus
$a^{b^{c^d}} = a^{(b^{(c^d)})}$.

Opgave 5
Zet de volgende getallen op volgorde van groot naar klein:
$((3^3)^3)^3$, $(3^3)^{(3^3)}$, $(3^{(3^3)})^3$, $3^{((3^3)^3)}$, $3^{(3^{(3^3)})}$.

Opgave 6
Wat is het grootste getal dat je met negen negens kunt maken als je mag optellen, vermenigvuldigen, machtsverheffen en haakjes zetten?

o Het aantal cijfers
Als je de getallen uit opgave 5 probeert uit te rekenen, dan zal je merken dat je deze vaak niet meer voluit kunt opschrijven. Toch kun je soms nog wel uitrekenen hoeveel cijfers zo'n getal heeft en wat de eerste cijfers van dat getal zijn. Als voorbeeld nemen we het getal 7^{7^7}, een torentje van drie zevens. We berekenen hiervan de logaritme:

$$\begin{aligned} \log(7^{7^7}) &= 7^7 \times \log(7) \\ &= 695974{,}5752\ldots \end{aligned}$$

We weten nu dat

$$\begin{aligned} 7^{7^7} &= 10^{695.974{,}5752\ldots} \\ &= 10^{695.974} \times 10^{0{,}5752\ldots} \\ &= 10^{695.974} \times 3{,}76\ldots \end{aligned}$$

Het getal heeft dus 695.975 cijfers en de eerste twee cijfers zijn 3 en 7.

Opgave 7
Bereken het aantal cijfers van het grootste bekende priemgetal:
$2^{6972593} - 1$.
Bereken ook het eerste cijfer.
Kun je ook het laatste cijfer bepalen?

Meer informatie
David Wells, Woordenboek van eigenaardige en merkwaardige getallen, Bert Bakker, ISBN 90351 05273.
http://www.nrob.com/largenum.html
http://www.mersenne.org/prime.htm