

Hercules en Hydra

Dion Gijswijt

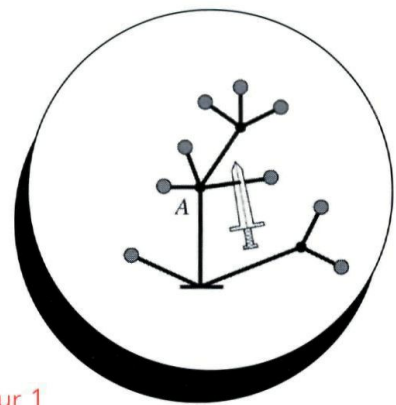
In een van zijn vele avonturen moet de Griekse held Hercules het opnemen tegen de veelkopige en zeer giftige zeeslang, Hydra genaamd, waarvan de adem alleen al genoeg is om een mens te vergiftigen. De enige manier waarop Hercules het monster kan doden is om met z'n zwaard één voor één alle koppen van het beest af te hakken. Er is wel een kleine complicatie. Zo gauw onze held een kop van Hydra afhakt groeien er spontaan nieuwe koppen aan.

De koppen van Hydra

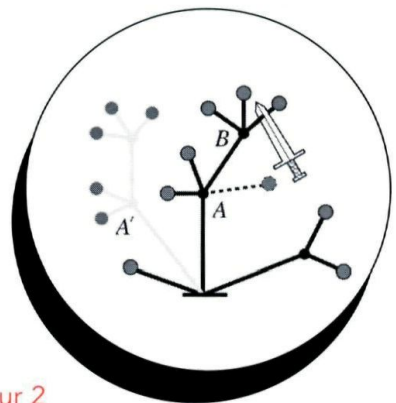
We zullen Hydra schematisch voorstellen. Een simpel streepje duidt het lichaam van Hydra aan. Uit het lichaam komen een aantal lange nekken (aangegeven met lijnstukjes), waarvan sommige zich splitsen in meerdere delen, waarvan sommige zich nog verder splitsen, enzovoort. Aan het uiteinde van iedere nek zit een vervaarlijke kop (aangegeven met een bolletje). Als Hercules een kop van Hydra heeft afgehakt, kunnen er in ons verhaal twee dingen gebeuren:

- Als de kop direct aan het lichaam vastzit, gebeurt er niets (zie figuur 3/4).
- Als de kop aan een ander knooppunt vastzit, zeg punt A , dan groeit er vanuit het knooppunt net onder A een nieuwe tak die een kopie is van de tak waar A in zit. Als A een eindpunt is geworden omdat de laatste kop van A afgehakt is, dan veranderen A en het eindpunt van de nieuwe tak in een kop. Ter illustratie volgen we de eerste drie pogingen van Hercules om de Hydra te verslaan. Bij zijn eerste slag slaat hij een kop af die vastzit aan knooppunt A :

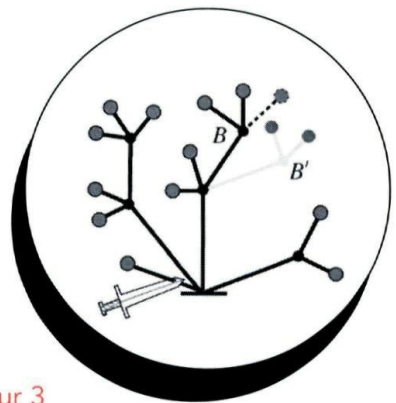
figuur 1. Na het afhakken van de kop groeit uit



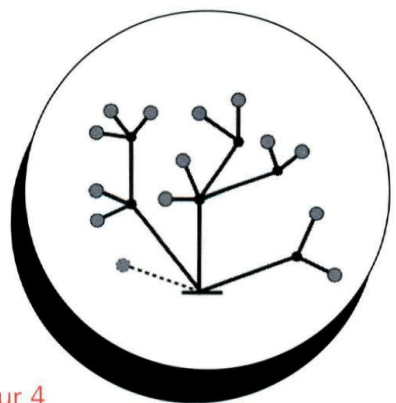
figuur 1



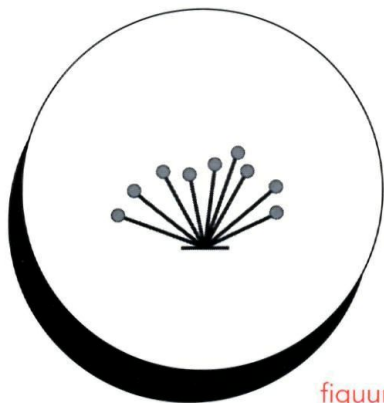
figuur 2



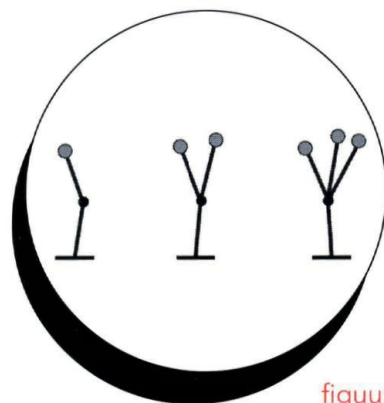
figuur 3



figuur 4



figuur 5



figuur 6

het punt onder A een nieuwe tak die een kopie is van de tak waar A in zit: **figuur 2**. Nadat Hercules een kop van knooppunt B heeft afgehakt groeit vanuit het knooppunt eronder een nieuwe tak met twee koppen: **figuur 3**. Alleen het afhakken van een kop die direct aan het lichaam van Hydra vast zit, heeft geen groei van nieuwe koppen tot gevolg. Ditmaal komen er dus geen nieuwe koppen bij: **figuur 4**. Na drie slagen is het aantal koppen van Hydra van 9 toegenomen tot 13. Het lijkt er op dat Hercules voor een onmogelijke taak staat, want hoe meer koppen hij afhakt, hoe meer er bijgroeien!

Baby-Hydra's

We verplaatsen ons in Hercules' schoenen en proberen eerst maar eens een eenvoudige 'baby'-Hydra te verslaan. Deze Hydra heeft alleen maar koppen die direct aan het lichaam vastzitten. Om deze Hydra te verslaan kunnen we eenvoudig één voor één alle koppen afslaan, want er groeien geen nieuwe koppen aan. Voor zo'n eenvoudige Hydra van 'lengte 1' is het aantal slagen dat we nodig hebben gelijk aan het aantal koppen van de Hydra.

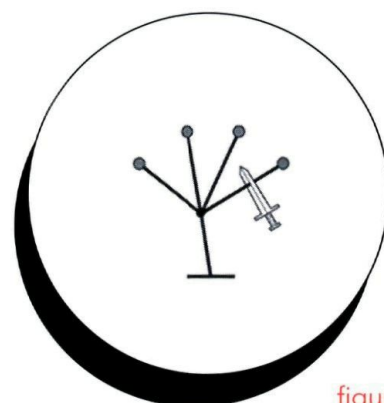
Figuur 5. Een Hydra van lengte 1 met n koppen kun je in n slagen verslaan.

Vraag. Hoeveel slagen heb je nodig om deze Hydra's van 'lengte 2' te verslaan? **Figuur 6.**

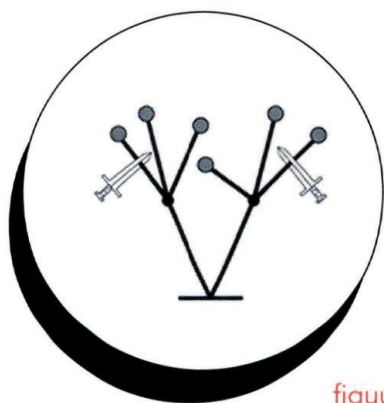
Hydra's van lengte 2

Nu we alle Hydra's van lengte 1 kunnen verslaan nemen we het op tegen Hydra's van lengte 2. Als voorbeeld nemen we een Hydra van lengte 2 met 4 koppen: **figuur 7**.

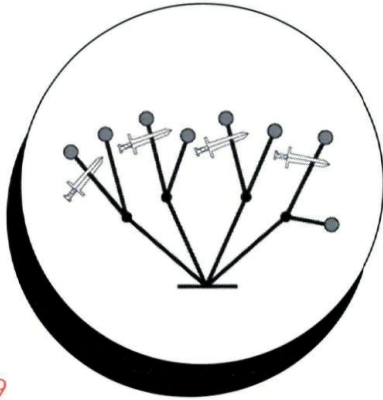
Het maakt niet uit welke van de vier koppen we afhakken. Na de eerste slag zijn er twee takken, elk met 3 koppen. Nu slaan we na elkaar in de linker tak en in de rechter tak: **figuur 8**.



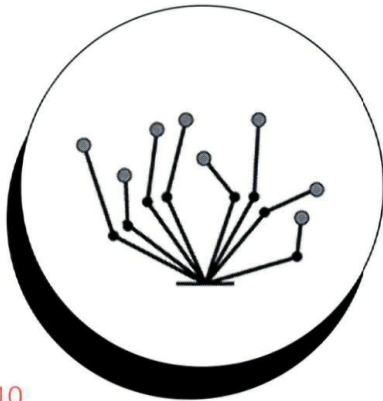
figuur 7



figuur 8



figuur 9



figuur 10

Er zijn nu vier takken, maar ze hebben elk nog maar 2 koppen: **figuur 9**.

Nadat we nu in elk van deze vier takken een van de twee koppen hebben afgeslagen heeft de Hydra 8 takken, elk met slechts één kop:

figuur 10. Slaan we tenslotte in elk van de takken de kop af, dan blijft een Hydra van lengte 1 over met 16 koppen. Na nog eens 16 slagen is de Hydra overwonnen.

Hoeveel slagen?

Hoewel het aantal takken in het voorbeeld steeds verdubbelde, nam het aantal koppen per tak telkens met 1 af, totdat elke tak nog maar 1 kop over had, en we de Hydra tot lengte 1 konden terugbrengen. Als we beginnen met een Hydra van lengte 2 met n koppen, dan krijgen we na 1 slag 2 delen met $n-1$ koppen.

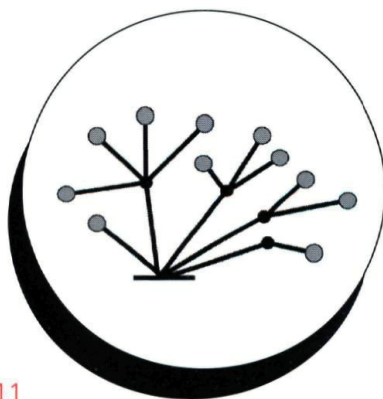
Na 1 + 2 slagen krijgen we 4 delen met $n-2$ koppen, na 1 + 2 + 4 slagen krijgen we 8 delen met $n-3$ koppen, na 1 + 2 + 4 + 8 slagen 16 delen met $n-4$ koppen, en zo verder tot er na 1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^{n-2} slagen 2^{n-1} delen zijn met slechts één kop. Na nog eens 2^{n-1} slagen is de Hydra tot lengte 1 gereduceerd en heeft nu 2^n koppen.

In totaal zijn dus $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ slagen nodig om de Hydra tot lengte 1 te reduceren. De resterende koppen worden daarna in 2^n slagen afgehakt.

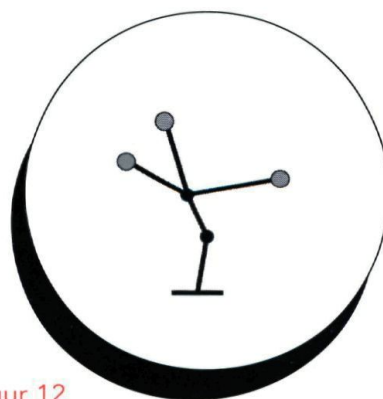
Vraag. Hoeveel slagen heb je nodig om de volgende Hydra te verslaan? **figuur 11**.

Vraag. Ga na dat je deze Hydra in 7 stappen kunt reduceren tot een Hydra van lengte 2. **figuur 12**.

Hercules en Hydra



figuur 11



figuur 12

Het grote werk.

We zijn nu klaar voor het grote werk: Hydra's van willekeurige lengte. Bekijk de volgende Hydra van lengte 4: **figuur 13**.

We kunnen dit monster reduceren tot lengte 3 door achtereenvolgens de takken *A*, *B* en *C* van lengte 2 tot lengte 1 te reduceren. Hoe dat moet weten we al, het gaat precies hetzelfde als het terugbrengen van een Hydra van lengte 2 tot lengte 1. Na $1 + 3 + 7 = 11$ slagen hebben we dit voor elkaar: **figuur 14**.

We kunnen de Hydra nog een kopje kleiner maken en daarmee reduceren tot een Hydra van lengte 2 door de delen *D*, *E* en *F* te verkorten. Dit klusje kunnen we in $(2^3 - 1) + (2^4 - 1) + (2^8 - 1) = 277$ slagen klaren: **figuur 15**.

Nu heeft Hydra nog maar lengte 2 en kunnen we het beest in nog eens $(2^{24} - 1) + (2^{257} - 1)$ slagen terugbrengen tot lengte 1: **figuur 16**. Nu kan Hydra eenvoudig in $2^{24} + 2^{257}$ slagen worden overwonnen. In totaal waren dus $11 + 277 + 2^{24} - 1 + 2^{257} - 1 + 2^{24} + 2^{257} = 2^{258} + 16777502$ slagen nodig om Hydra te verslaan. Een getal van 78 cijfers!

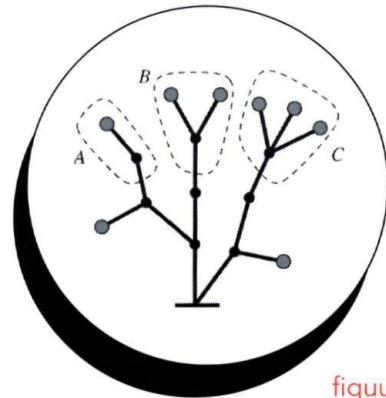
Vraag. Hoeveel slagen heeft Hercules nodig voor Hydra uit het begin van het dit stukje?

Vraag. Ga na dat Hercules voor de volgende Hydra (van lengte 10) ongeveer

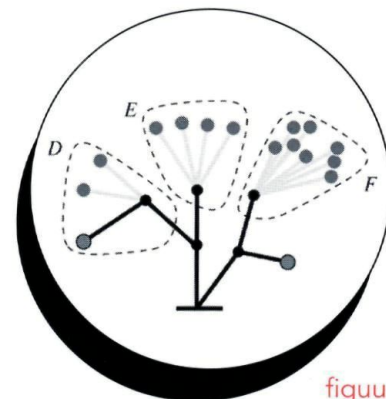
2×2^2 (een torentje van negen 2-en) slagen nodig heeft: **figuur 17**.

Meer informatie

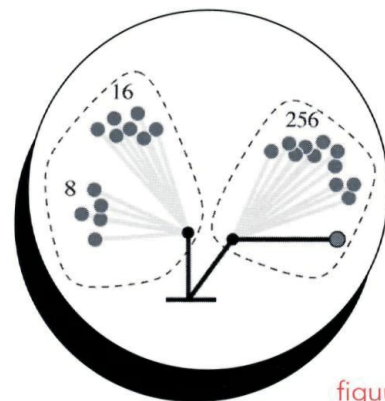
<http://www.mythweb.com/hercules/>
Martin Gardner, *The Last Recreations*, Springer-Verlag, ISBN 0-387-94929-1



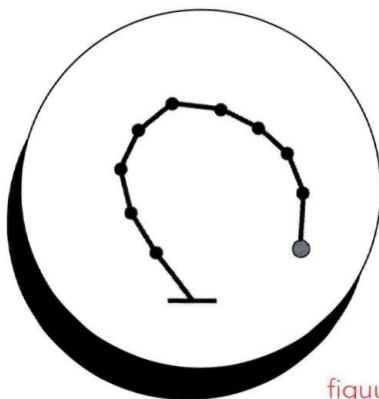
figuur 13



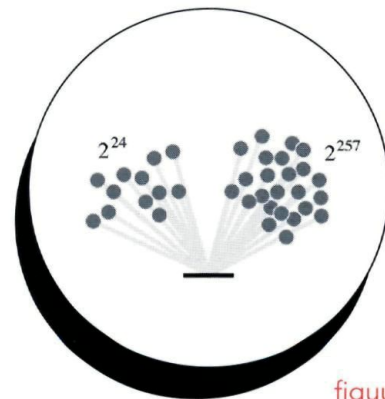
figuur 14



figuur 15



figuur 17



figuur 16