De tabel van Ackermann

Dion Gijswijt

In figuur 1 zie je een tabel. De tabel is in twee richtingen oneindig. Op iedere plaats in de tabel hoort een getal te staan en het is jouw taak uit te vinden welke getallen dat zijn. De getallen in de eerste rij krijg je cadeau, het zijn de getallen 2, 3, 4, 5, enzovoort. Om de getallen op de andere plaatsen uit te vinden, zijn er twee spelregels.

Spelregel 1. Het eerste getal in een rij (behalve dat van de eerste rij), is gelijk aan het tweede getal uit de rij erboven. Zie de pijlen in figuur 1.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8		
3	4	6						
4								
5								
6								

Figuur 1.
De tabel van Ackermann en de eerste spelregel

Spelregel 2. Om een getal te vinden dat niet in de eerste rij of kolom zit, moet je het volgende doen. Kijk naar het getal in het linker buurvakje en ga naar de corresponderende positie in de rij erboven. Het getal dat op deze plek staat is het gezochte getal. Zie figuur 2.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8		
3	4	6						
4								
5								
6								

Figuur 2.
De tweede spelregel

Formules

Laten we het k-de getal in rij r een naam geven: $A(r,k)$. Omdat de getallen uit de eerste rij gegeven zijn weten we dat $A(r,k) = k + 1$ voor iedere k. De spelregels kunnen we dan samenvatten door:

1. $A(r,1) = A(r-1,2) \quad (r > 1)$
2. $A(r,k) = A(r-1, A(r,k-1)) \quad (r,k > 1)$

OPGAVE. Ga na dat deze formules precies de twee spelregels uitdrukken.

Met deze twee spelregels kun je alle getallen in de tabel vinden. De getallen in de eerste rij zijn al gegeven. Het eerste getal uit de tweede rij is volgens regel 1 gelijk aan $A(1,2) = 3$. Het tweede getal uit de tweede rij is volgens regel 2 gelijk aan $A(1,A(2,1)) = A(1,3) = 4$. Het derde getal in de rij is gelijk aan $A(1,A(2,2)) = A(1,4) = 5$. Op deze manier kun je alle getallen uit de tweede rij berekenen. Van de derde rij kun je het eerste getal met behulp van regel 1 vinden en daarna gebruik je regel 2 om steeds het volgende getal in de rij te berekenen.

OPGAVE. Neem de tabel over en vul de eerste 8 getallen van rij 2, 3 en 4 in.

Regelmaat

De eerste drie rijen van de tabel vertonen een regelmaat. Deze regelmaat kan je heel wat rekenwerk besparen. Voor de getallen in de eerste rij hadden we de handige formule $A(1,k) = 1 + k$. Ook voor de getallen in de tweede rij bestaat een formule, namelijk $A(2,k) = 2 + k$. Hoewel dit 'duidelijk' is, gaan we het toch bewijzen.

Inductie

Voor het bewijs maken we gebruik van inductie. Dat gaat als volgt. Eerst bewijzen we dat de formule klopt voor het basisgeval $k = 1$. Vervolgens bewijzen we dat als de formule klopt voor een getal k, de formule ook klopt voor het volgende getal $k + 1$. Dit heet de inductiestap. Als je dit hebt laten zien, dan is de formule waar voor $k = 1$, voor het volgende getal $k = 2$, en dus ook voor $k = 3, 4, 5$, enzovoort. Dus is de formule correct voor elk getal k. We bewijzen nu met inductie dat $A(2,k) = 2 + k$. Voor $k = 1$ krijgen we $A(2,1) = A(1,2) = 3$ en dit is inderdaad gelijk aan $2 + k$, dus dat klopt. Nu de inductiestap.

Stel dat de formule klopt voor een zeker getal k. We berekenen:

$$\begin{aligned} A(2,k+1) &= A(1, A(2,k)) \\ &= 1 + A(2,k) \\ &= 1 + (2 + k) = 2 + (k + 1). \end{aligned}$$

Dus klopt de formule ook voor het volgende getal $k + 1$. Hiermee is het bewijs geleverd voor alle getallen k. Het patroon in de derde rij getallen is ook duidelijk. Het zijn precies de tweevouden, te beginnen bij 4.

OPGAVE.
Laat zien dat voor de getallen uit de derde rij de formule $A(3,k) = 2k + 2$ geldt. Bewijs deze formule door het basisgeval $k = 1$ te controleren en vervolgens de inductiestap te maken.

OPGAVE.
Controleer dat voor de getallen in de vierde rij geldt dat $A(4,k) = 4 \times 2^k - 2$. Bewijs deze formule met inductie.

Googol en googolplex

De vijfde rij begint met 14. Je kunt narekenen dat het tweede getal 65534 is, en het derde getal $2^{65536} - 2$. Dit getal heeft maar liefst 19729 cijfers en is stukken groter dan aantal deeltjes in het heelal (hooguit een *googol* ofwel 10^{100}, een 1 gevolgd door honderd nullen. Het vierde getal is al bijna zo groot als een *googolplex* ofwel 10^{googol}, een 1 gevolgd door een googol nullen.
De functie $A(r,k)$, of eigenlijk een kleine variant, is vernoemd naar de bedenker ervan, de wiskundige Ackermann, en wordt vaak gebruikt in wiskundige bewijzen waar zeer grote getallen een rol spelen, als een maatstaf voor de grootte van die getallen.

Herhaald herhalen

Zoals je weet is vermenigvuldigen niets anders dan herhaald optellen: $a \times b$ is

een afkorting voor $a + a + \ldots + a$ (b keer). Als je herhaald vermenigvuldigt ben je aan het machtsverheffen: $a \times a \times a \ldots \times a$ (b maal) kun je afkorten tot a^b. Overigens wordt dit in computerteksten, zoals bijvoorbeeld webpagina's, vaak geschreven als $a \uparrow b$. Soms moet je herhaald machtsverheffen, zoals in dit torentje van achten: $8^{8^8} = 8 \uparrow 8 \uparrow 8$.
De wiskundige D.E. Knuth bedacht ook hiervoor een afkorting, namelijk $8 \uparrow\uparrow 3$.
In het algemeen schreef hij $a \uparrow\uparrow b$ in plaats van $a \uparrow a \uparrow \ldots \uparrow a$ (b keer een a).
Zo is bijvoorbeeld $2 \uparrow\uparrow 4$ gelijk aan $2 \uparrow 2 \uparrow 2 \uparrow 2 = 2 \uparrow 2 \uparrow 4 = 2 \uparrow 16 = 65536$.
Je ziet dat je gebruik kunt maken van twee rekenregels. Ten eerste is $a \uparrow\uparrow 1 = a$.
Ten tweede geldt dat $a \uparrow\uparrow (b + 1) = a \uparrow (a \uparrow\uparrow b)$. Met deze rekenregels kun je torentjes van getallen uitrekenen.

OPGAVE.
Bereken $2 \uparrow\uparrow 3$, $2 \uparrow\uparrow 4$ en $2 \uparrow\uparrow 5$.

OPGAVE.
Bereken $2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2)$ en $(2 \uparrow\uparrow 2) \uparrow\uparrow 2$.

Natuurlijk wil je ook herhaald '$\uparrow\uparrow$' kunnen toepassen: $a \uparrow\uparrow a \uparrow\uparrow \ldots \uparrow\uparrow a$ (met b a's) kortte Knuth af tot $a \uparrow\uparrow\uparrow b$.
Zo is bijvoorbeeld $3 \uparrow\uparrow 3 \uparrow\uparrow 3 \uparrow\uparrow 3$ gelijk aan $3 \uparrow\uparrow\uparrow 4$. Nu heb je de rekenregels $a \uparrow\uparrow\uparrow 1 = a$ en $a\ (b + 1) = a \uparrow\uparrow (a \uparrow\uparrow\uparrow b)$. Zo kun je doorgaan, met zoveel pijlen als je wilt.

OPGAVE. Bereken
$2 \uparrow\uparrow\uparrow 2$, $2 \uparrow\uparrow\uparrow 3$ en $2 \uparrow\uparrow\uparrow 4$.

OPGAVE. Als je $3 \uparrow\uparrow\uparrow 3$ als torentje van 3-en zou schrijven, hoe hoog wordt deze toren dan?

OPGAVE. Wat is groter, $2 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3$ of $3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 2$?

OPGAVE. Kun je bewijzen dat $2 \uparrow\uparrow \ldots \uparrow 2$, gelijk is aan 4, hoeveel pijlen er ook staan?

Hogere regelmaat

Door de formules voor de getallen in de rijen 2, 3 en 4 van de Ackermann-tabel iets anders op te schrijven, kun je een regelmaat ontdekken die de formules voor de rijen verbindt:

$$A(2, k) = 2 + (k + 2) - 2$$
$$A(3, k) = 2 \times (k + 2) - 2$$
$$A(4, k) = 2 \uparrow (k + 2) - 2$$

Als je de getallen in de vijfde rij gaat uitrekenen, dan zul je ontdekken dat

$$A(5, k) = 2 \uparrow\uparrow (k + 2) - 2.$$

OPGAVE.
Bewijs de formule voor $A(5, k)$.

OPGAVE.
Wat is de formule voor $A(6, k)$?
En voor $A(7, k)$? Kun je dit bewijzen?