Onvoorstelbaar lange woorden

Dion Gijswijt

Dit is het laatste stukje in een serie over grote getallen. Het gaat over zogenaamde `speciale woorden'. Het langste speciale woord met één letter is drie letters lang. Het langste speciale woord met twee letters is elf letters lang. Hoe lang het langste speciale woord met drie letters is? Dat weet niemand!

Dit stukje gaat over woorden. Normaal gesproken moeten woorden een betekenis hebben, maar onze woorden mogen van alles zijn. Ieder rijtje letters noemen we een woord. Als we bijvoorbeeld alleen de letters 'a' en 'b' willen gebruiken, dan is het volgende een prima voorbeeld van een woord:

$$abaababa.$$

Blokken

We gaan van dit soort woorden stukken bekijken die we blokken zullen noemen. De eerste twee letters van een woord vormen het eerste blok, letter 2 tot en met 4 vormen het tweede blok, letter 3 tot en met 6 vormen het derde blok, letter 4 tot en met 8 het vierde blok, enzovoort. Het woord $W = abaababa$ heeft de volgende vier blokken:

$$W(1) = ab$$
$$W(2) = baa$$
$$W(3) = aaba$$
$$W(4) = ababa$$

Er bestaat geen vijfde blok $W(5)$, want W heeft maar 9 letters.

Een blok in een blok

Als je goed kijkt, dan zie je dat het tweede blok een deel is van het vierde blok: de tweede, derde en vijfde letter van $W(4)$ vormen samen het blok $W(2)$. Anders gezegd: als je de eerste en de vierde letter van het vierde blok wegstreept, dan hou je precies het tweede blok over.

$$\begin{array}{ll} baa & \text{(tweede blok)} \\ \uparrow & \\ \cancel{a}ba\cancel{b}a & \text{(vierde blok)} \end{array}$$

In het algemeen zeggen we dat een blok een deel is van een ander blok, als je het krijgt door van dat andere blok een aantal letters te verwijderen. Zo is $W(1)$ een deel van $W(3)$ en $W(4)$, maar niet van $W(2)$.

Opgave. Ga van de blokken $W(2)$ en $W(3)$ na of ze een deel zijn van een ander blok.

Opgave. De woorden U en V zijn gegeven door: $U = ababab$ en $V = aabbba$. Ga na dat van elk tweetal blokken van U de grootste een deel is van de kleinere. Hoeveel blokken van V zijn een deel van een ander blok van V?

Speciale woorden

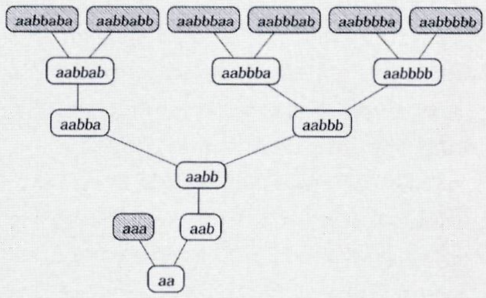
We hebben gezien dat je bij een gegeven woord blokken kunt maken en dat zo'n blok soms een deel van een ander blok kan zijn. Het woord $V = aabbba$ in de vorige opgave had de bijzondere eigenschap dat geen enkel blok een deel van een ander blok was. Een dergelijk woord noemen we *speciaal*.
Zijn er nog meer van deze *speciale* woorden? Ja, bijvoorbeeld het woord $aabba$. Als je zo'n speciaal woord hebt, dan vormen de eerste zoveel letters van dat woord natuurlijk ook een speciaal woord. Woorden van lengte 3 zijn altijd speciaal (waarom?). Korte speciale woorden zijn dus makkelijk te vinden, maar lange speciale woorden zijn veel zeldzamer. De vraag die wij ons hier stellen is: *Wat is het langste speciale woord?*

Een voorbeeld

We beginnen met het woord $W{=}aabba$. Dit is een speciaal woord van lengte 5 met twee blokken:

$$W(1) = aa$$
$$W(2) = abb$$

Laten we proberen of we dit woord kunnen uitbreiden tot een langer speciaal woord. Als we achter W nog een a plakken, dan ontstaat een woord van lengte 6, en daarmee ook een nieuw blok: $W(3){=}bbaa$. Maar nu is het eerste blok aa een deel van dit derde blok en dat willen we niet. Als we W echter met een b uitbreiden, dan gaat het wel goed: het derde blok wordt dan $bbab$ en noch aa noch abb is hier een deel van. We hebben nu dus een speciaal woord $U = aabbab$ van lengte 6.
Nu kunnen we U met een a uitbreiden zodat we $aabbaba$ krijgen. Dit gaat goed, want er komt geen nieuw blok bij omdat de lengte nu oneven is.
Dus $V = aabbaba$ is een speciaal woord van lengte 7. Als we nu V met een a of een b uitbreiden, dan komt er een vierde blok bij, dat in het eerste geval $babaa$ is en in het tweede geval $babab$. In beide gevallen is het eerste blok aa een deel van dit vierde blok. Het woord V kunnen we dus niet verder uitbreiden. We zijn op een dood spoor gekomen. Misschien hadden we door geen a maar een b aan U vast te plakken meer geluk gehad. In de volgende figuur zie je een hele boom van alle mogelijke speciale woorden die beginnen met aa.



Opgave. Het langste speciale woord dat begint met aa heeft volgens het schema lengte 7. Wat is de lengte van het langste speciale woord dat begint met bb?

Het langste woord met 2 letters

Na de vorige opgave hoef je om het langste speciale woord te vinden alleen nog de woorden te onderzoeken die beginnen met ab. Het maken van een boom voor de speciale woorden die met ab beginnen laten we aan de lezer over. In plaats van met de hand kun je dit probleem ook met de computer oplossen. Je vindt dan het volgende resultaat.

Stelling. *Elk speciaal woord bestaande uit twee letters heeft hoogstens lengte 11.*

Een voorbeeld van een speciaal woord van lengte 11 is $abbbaaaaaaa$. De blokken van dit woord zijn ab, bbb, $bbaa$, *baaaa* en *aaaaaa*. Zoals je ziet is geen enkel blok een deel van een ander blok. Als je nog een extra letter zou toevoegen, dan ontstaat er een zesde blok *aaaaaa⋆* en is het vijfde blok een deel van het zesde blok. Het woord is dus niet verder uit te breiden.

Drie of meer letters

Als je drie of zelfs meer letters mag gebruiken, dan kun je veel langere speciale woorden maken, bijvoorbeeld *abbbaaaaaacccccccccc*, een woord van lengte 20. Als je eventjes probeert, of de computer aan het werk zet, dan zul je merken dat je echt enorm lange speciale woorden kunt maken. Je kunt je afvragen of er misschien willekeurig lange speciale woorden zijn, zodat er misschien wel geen langste woord bestaat. Of nog erger, misschien is er wel een oneindig lang speciaal woord, met oneindig veel blokken waarvan geen enkel blok een deel is van een andere! De wiskundige en logicus Harvey Friedman heeft echter bewezen dat dit niet het geval is.

Stelling. *Voor elk aantal letters bestaat er een speciaal woord van maximale lengte.*

In het geval van drie letters bestaat er dus ook een langste speciaal woord. De lengte van dit woord is echter enorm. Niet alleen is het onmogelijk om zo'n langste woord met de hand te vinden, het is zelfs onmogelijk om het met de grootste supercomputer te doen. Deze maximale lengte is zó groot dat het onmogelijk is om het getal op te schrijven, want dit getal heeft meer cijfers dan er atomen in het heelal zijn!

De functie van Ackermann

Wie de 'Tabel van Ackermann' in de vorige Pythagoras heeft gelezen, herinnert zich dat de getallen uit de tweede rij niet zo snel groeiden, de getallen uit de derde rij al behoorlijk snel groot werden, en het derde getal van de vierde rij al duizenden cijfers had. Volgens Friedman is zelfs het getal in de *zevenduizendste* rij op de *honderdduizendste* plaats in de tabel van Ackermann nog veel en veel kleiner dan de lengte van het langste speciale woord met drie letters. Voor vier letters is de lengte van het langste woord zo enorm dat zelfs de tabel van Ackermann tekort schiet. Als n_1 het miljoenste getal van de miljoenste kolom uit de Ackermann tabel is, en n_2 het n_1–de getal uit de n_1–de rij, en n_3 het n_2–de getal uit de n_2–de rij enzovoorts, dan komt het miljoenste getal uit deze rij, $n_{1000000}$, nog lang niet in de buurt van de lengte van het langste speciale woord van vier letters. Het langste speciale woord met 26 letters? Dat woord is pas écht onvoorstelbaar groot!

Informatie over Harvey Friedman

http://www.math.ohio-state.edu/foundations/