door **Dion Gijswijt**

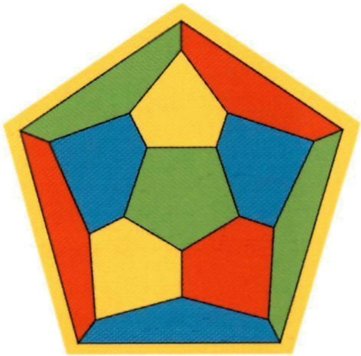
Veel-vlakken kleuren

Stel, je wilt de zijvlakken van een veelvlak kleuren, en wel zo dat aangrenzende veelvlakken verschillende kleur krijgen. Hoeveel kleuren heb je dan minimaal nodig?

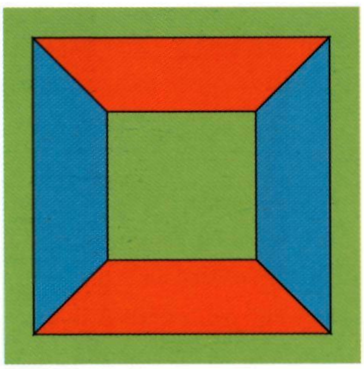
De zijvlakken van een octaëder kun je elk rood of blauw maken, op zo'n manier dat twee aangrenzende zijvlakken steeds verschillende kleur hebben. Zijvlakken die alleen een hoekpunt gemeen hebben, mogen wel dezelfde kleur krijgen. Ook de zijvlakken van een kuboctaëder laten zich met twee kleuren kleuren: maak de driehoeken maar rood en de vierkanten blauw. Met de zijvlakken van een kubus zal je dit niet lukken. Om de zijvlakken van een kubus te kleuren zonder dat twee aangrenzende zijvlakken dezelfde kleur hebben, zijn minstens drie kleuren nodig. Voor een tetraëder heb je zelfs vier kleuren nodig.

Opgave 1. Hoeveel kleuren zijn er nodig om een dodecaëder te kleuren? En hoe zit dat met een icosaëder?

Een voor de hand liggende vraag is de volgende: *Kun je aan een gegeven veelvlak het aantal benodigde kleuren op een eenvoudige manier 'aflezen'?*
Om deze vraag te kunnen beantwoorden, maken we eerst een vereenvoudiging. We kijken alleen naar *sferische* veelvlakken. Net als in het artikel *De formule van Euler* uit het decembernummer, vervormen we deze veelvlakken tot *landkaarten*, waarbij de zijvlakken, ribben en hoekpunten voorgesteld worden door de landen, grenzen en meerlandenpunten van de landkaart. In figuur 1 zie je hoe een kleuring van een dodecaëder, kubus en octaëder er als landkaart uitzien.



Figuur 1a. Kleuring van een dodecaëder



Figuur 1b. Kleuring van een kubus

Figuur 1c. Kleuring van een octaëder

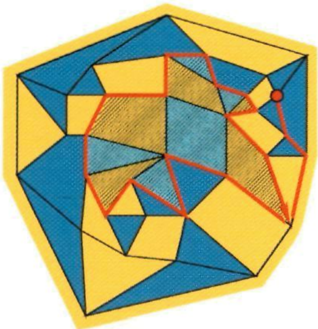
Twee kleuren

Als een landkaart met twee kleuren kan worden gekleurd, moet in elk meerlandenpunt een even aantal grenzen samenkomen, want de landen rond dat punt krijgen afwisselend de ene en de andere kleur. Maar geldt ook het omgekeerde: is het waar dat een landkaart waarbij in ieder meerlandenpunt een even aantal grenzen samenkomt, ook altijd met twee kleuren te kleuren is? Het verrassende antwoord is ja! Door in ieder meerlandenpunt het aantal grenzen te tellen, kun je dus beslissen of de kaart twee-kleurbaar is of niet. Het bewijs gaat als volgt.

Voor je ligt een landkaart met in ieder meerlandenpunt een even aantal grenzen. We willen de landen geel en blauw kleuren, op zo'n manier dat voor iedere grens de twee landen aan weerszijden verschillende kleur krijgen. Eerst kleuren we de landen willekeurig geel en blauw. Waarschijnlijk geeft dit geen juiste kleuring: sommige grenzen scheiden landen met gelijke kleur. Deze grenzen noemen we *lek*.

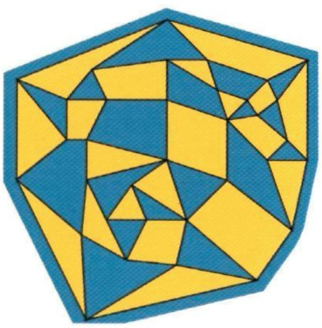
Opgave 2. Waarom is het aantal lekke grenzen in ieder meerlandenpunt een even getal?

Stel nu dat onze kleuring nog niet correct is. Kies dan een lekke grens en loop langs deze grens naar een meerlandenpunt. Uit dit meerlandenpunt gaat minstens één andere lekke grens. Volg zo'n grens tot een volgend meerlandenpunt. Zo lopen we verder over lekke grenzen, totdat we in een meerlandenpunt aankomen waar we al eerder zijn geweest. Er is nu een gebied door lekke grenzen ingesloten, zie figuur 2a. In het omsloten gebied wisselen we de kleuren geel en blauw om, met als resultaat dat er geen lekke grenzen bijkomen en dat de grenzen in de rand van het omsloten gebied nu niet meer lek zijn. Het aantal lekke grenzen is dus afgenomen. Door dit proces een aantal keer te herhalen, kunnen we het aantal lekke grenzen tot nul reduceren, zodat we een correcte kleuring vinden. In figuur 2 zie je een voorbeeld van dit proces.



Figuur 2a.
In het gearceerde gebied verwisselen we blauw en geel.

Figuur 2b.
Ditmaal lopen we tegen de klok in, zodat het gearceerde gebied aan de buitenkant ligt.



Figuur 2c.
Na twee herkleuringen is een correcte kleuring ontstaan.

Opgave 3. Welke van de Archimedische veelvlakken (zie pagina 26) zijn twee-kleurbaar?

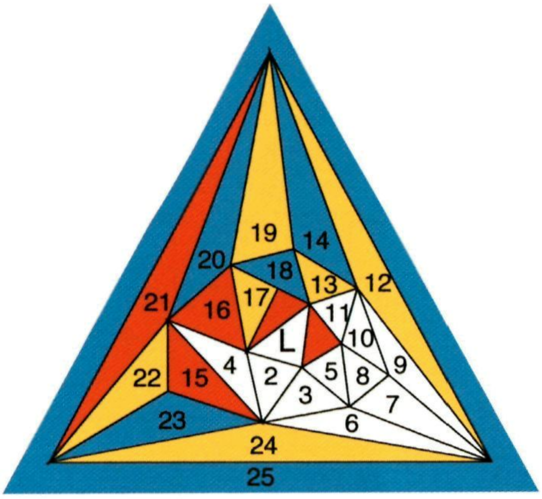
Drie kleuren

Er bestaat geen algemene regel die zegt wanneer een landkaart drie-kleurbaar is. Wel zijn er twee mooie *klassen* van landkaarten waarbij zo'n regel wel bestaat: kaarten waarbij elk meerlandenpunt een drielandenpunt is en kaarten waarbij elk land aan drie andere landen grenst.
Bekijk eerst landkaarten waarbij elk meerlandenpunt een drielandenpunt is. Stel dat zo'n landkaart met drie kleuren is gekleurd, zeg rood, blauw en geel. Kijk dan eens naar een rood land. De buurlanden moeten wel afwisselend geel en blauw zijn, dus het rode land heeft een even aantal buurlanden. Eenzelfde argument geldt voor ieder land. Ieder land moet daarom een even aantal buurlanden hebben. Omgekeerd is het ook waar dat als ieder land een even aantal buurlanden heeft, de landkaart met drie kleuren te kleuren is. Het bewijs vergt wat werk en zullen we hier niet geven.

Bekijk nu landkaarten waarbij elk land drie buurlanden heeft. Als ieder tweetal landen aan elkaar grenst, zoals bij een tetraëder, dan zijn er natuurlijk vier kleuren nodig. Maar als dat niet het geval is, kan de kaart altijd met drie kleuren worden gekleurd. Dat gaat als volgt.
Kies een land L met twee buurlanden die niet aan elkaar grenzen en kleur deze twee buurlanden met dezelfde kleur, bijvoorbeeld rood, zoals in figuur 3. De ongekleurde landen gaan we nummeren. Land L krijgt nummer 1. Het (ongekleurde) land dat aan L grenst, krijgt nummer 2, een land dat daaraan grenst, krijgt nummer 3, enzovoorts. Telkens nummeren we een land dat grenst aan een reeds genummerd land, net zo lang tot alle ongekleurde landen een nummer hebben.
Nu gaan we de genummerde landen kleuren, en wel in omgekeerde volgorde: van hoog naar laag. Zeg dat een gegeven land M aan de beurt is om gekleurd te worden en dat M

19

niet gelijk is aan L. Land M heeft een buurland dat een lager nummer heeft en dus nog niet gekleurd is. Daarom heeft M hoogstens twee buren die al zijn gekleurd, zodat er nog minstens een kleur vrij is om M mee te kleuren. Als laatste wordt land L met nummer 1 gekleurd. Omdat L twee buren heeft met gelijke kleur, gebruiken de drie buren van L samen hoogstens twee kleuren. Daarmee is er minstens nog een kleur vrij om L mee te kleuren.



Figuur 3.
De genummerde landen worden in aflopende volgorde gekleurd, land L als laatste.

Opgave 4. De kleine sterdodecaëder (zie pagina 13) kun je opvatten als een veelvlak met 60 driehoekige zijvlakken. Kleur dit veelvlak met drie kleuren.

Opgave 5. Welke Archimedische lichamen (zie pagina 26) zijn drie-kleurbaar?

Opgave 6. Bepaal van alle deltaveelvlakken (zie pagina 30) het vereiste aantal kleuren.

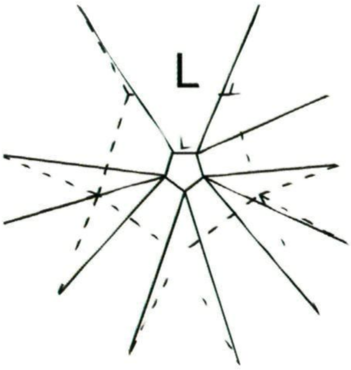
Vier kleuren

Welke landkaarten kun je met vier kleuren kleuren? Het antwoord op deze vraag blijkt heel makkelijk te zijn: iedere landkaart! Het bewijs hiervan is echter juist heel erg moeilijk en we zullen deze vierkleurenstelling hier dan ook niet bewijzen. Wel zullen we laten zien dat elke kaart met ten hoogste vijf kleuren kan worden gekleurd.

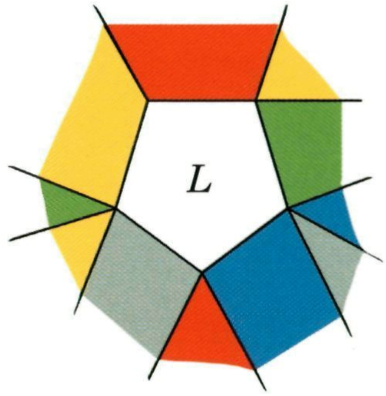
Vijf kleuren volstaat

Noem het aantal landen l, het aantal grenzen g en het aantal meerlandenpunten p. Omdat in ieder meerlandenpunt tenminste drie grenzen samenkomen en iedere grens tussen twee meerlandenpunten loopt, geldt $2g \geq 3p$. Stel nu dat ieder land tenminste zes buurlanden heeft, dan geldt $2g \geq 6l$. Als we deze twee ongelijkheden invullen in de formule van Euler, dan zien we dat $g + 2 = p + \ell \leq \frac{2}{3}g + \frac{1}{3}g = g$. Maar dat kan natuurlijk niet. Het kan dus niet zo zijn dat ieder land tenminste zes buurlanden heeft. Met andere woorden: *iedere landkaart heeft een land met ten hoogste vijf buurlanden.* We gaan dit gebruiken om te laten zien hoe iedere landkaart met vijf kleuren kan worden gekleurd.

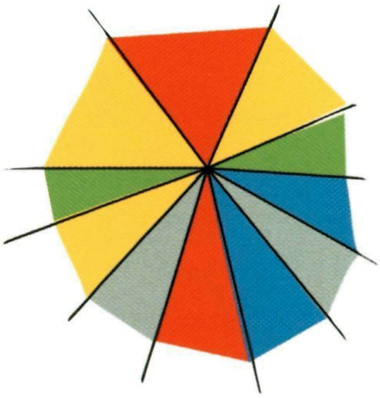
Voor je ligt een landkaart die je met vijf kleuren wilt kleuren: rood, groen, geel, blauw en grijs. Zoek eerst een land L met hoogstens vijf buurlanden. Laat dit land in gedachten inkrimpen tot een punt. Je krijgt dan een landkaart met een land minder, zie figuur 4. Kleur nu eerst deze kaart met vijf kleuren en laat land L nu weer uitdijen tot je de oorspronkelijke kaart terugkrijgt. Alle landen, behalve L, zijn nu gekleurd.
Er kunnen zich nu twee mogelijkheden voordoen. Misschien is dit je geluksdag en gebruiken de buurlanden van L samen hoogstens vier kleuren. In dat geval is er nog minstens een kleur over waarmee je L kunt kleuren en ben je klaar.
In het andere geval heeft L vijf buurlanden die elk een andere kleur hebben. Om dit te verhelpen gaan we sommige landen herkleuren, op zo'n manier dat daarna twee van de buren van L dezelfde kleur hebben en er een kleur over is om L te kleuren.
Bekijk alleen de landen die blauw of rood zijn gekleurd. Het rood-blauwe gedeelte van de kaart kan uit meerdere stukken bestaan. Als het rode en het blauwe buurland van L tot verschillende stukken behoren, dan verwisselen we de kleuren blauw en rood alleen in het gebied waar het rode buurland van L in ligt. Vervolgens kunnen



Figuur 4a.
Land L krimpt in tot een punt, zodat een landkaart met een land minder ontstaat.

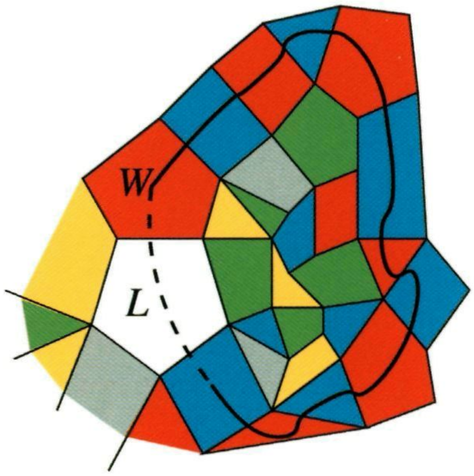


Figuur 4c.
Vervolgens laten we land L weer expanderen, zodat alle landen, behalve L, zijn gekleurd.

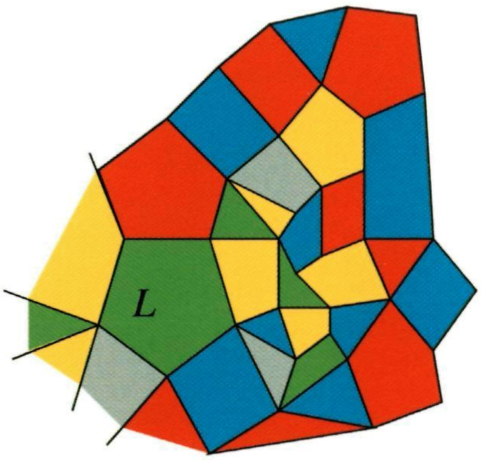


Figuur 4b.
We kleuren eerst deze kaart met een land minder.

we land L rood kleuren en zijn we klaar. Als het rode en blauwe buurland van L in hetzelfde rood-blauwe stuk liggen, dan werkt deze truc niet (zie je waarom niet?). In dat geval is er een wandeling W door het rood-blauwe gebied van de rode naar de blauwe buur van L, zie figuur 5a. Bekijk nu alleen de groene en gele landen. Omdat de gele en groene buur van L aan weerszijden van wandeling W liggen, moeten de twee landen in verschillende stukken van het groen-gele gebied liggen. We verwisselen nu de kleuren geel en groen in het stuk waarin de groene buur van L ligt en kleuren L groen, zie figuur 5b.
We hebben op deze manier het kleuren van een landkaart gereduceerd tot het kleuren van een landkaart met een land minder. Hoe je deze kaart kleurt? Op dezelfde manier: eerst kleur je een kaart met een land minder, enzovoorts, totdat je een landkaart hebt met maar vijf landen. Die kun je direct met vijf kleuren kleuren.



Figuur 5a.
De wandeling W scheidt het groene buurland van het gele buurland van L.



Figuur 5b.
Binnen het door W begrensde gebied verwisselen we groen en geel, zodat L groen gekleurd kan worden.