Jarenlang verzorgde Dion Gijswijt de Problemenrubriek van *Pythagoras*. In 2004 bedacht hij een krankzinnige getallenrij, met de bedoeling dat het tot een leuke puzzel voor zijn rubriek zou leiden. Omdat hij zijn eigen probleem niet kon oplossen (toch wat te moeilijk voor *Pythagoras*!), besloot hij het probleem op het forum van de OEIS te plaatsen. Het leidde tot serieus onderzoek en een artikel dat Dion samen met Fokko van de Bult, John Linderman, Neil Sloane en Allan Wilks schreef. In dit artikel legt Dion uit waar het om gaat.

■ door Dion Gijswijt

KRUL-GETALLEN

Bekijk eens het volgende rijtje getallen:

2, 1, 2, 3, 2, 3, 1, 2, 3, 2, 3, 1, 2, 3, 2, 3.

Dit rijtje eindigt in een *krul* bestaande uit het stuk '2, 3' dat aan het eind twee keer voorkomt:

2, 1, 2, 3, 2, 3, 1, 2, 3, 2, 3, 1, 2, 3, 2, 3.

De staart van het rijtje is als de staart van een varken die tweemaal rondkrult. Als je wat beter kijkt, zie je dat aan het eind het stuk '1, 2, 3, 2, 3' zelfs driemaal wordt herhaald:

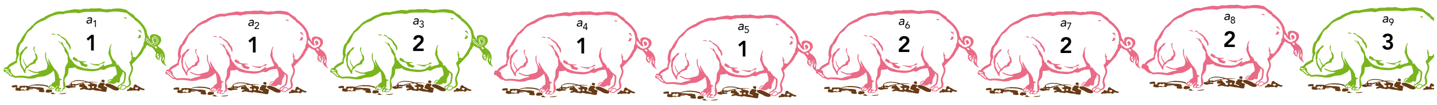
2, 1, 2, 3, 2, 3, 1, 2, 3, 2, 3, 1, 2, 3, 2, 3.

Het *krulgetal* van dit rijtje is daarom 3.

Algemeen definiëren we het krulgetal van een eindig rijtje als het grootste aantal herhalingen van een stuk aan het eind. Dit stuk mag lang zijn, maar ook heel kort: 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2 heeft krulgetal 4, omdat het stuk '2' aan het eind viermaal wordt herhaald. Het herhalende gedeelte mag ook het hele rijtje beslaan: 1, 2, 3, 1, 2, 3 heeft krulgetal 2 omdat het stuk '1, 2, 3' zich aan het eind tweemaal herhaalt. Als er helemaal geen herhaling aan het eind plaatsvindt, dan is het krulgetal gelijk aan 1.

KRULGETALLEN IN DE OEIS In de *Online Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS) staat een rij die gebaseerd is op krulgetallen. De rij is te vinden onder nummer A090822. Het recept voor deze rij is als volgt. Begin met enkel '1'. Het volgende getal in de rij is daarna steeds het krulgetal van de rij tot nu toe: het krulgetal van '1' is 1, van '1, 1' is het 2, van '1, 1, 2' is het 1, enzovoort. Hieronder zie je hoe de eerste getallen van de rij worden uitgerekend. In roze is steeds aangegeven wat het vaakst herhalende stuk aan het eind is (als er meerdere mogelijkheden zijn, kiezen we het kortste stuk).

1
1, 1
1, 1, 2
1, 1, 2, 1
1, 1, 2, 1, 1
1, 1, 2, 1, 1, 2
1, 1, 2, 1, 1, 2, 2
1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 2
1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3
1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 1



Opgave 1. Bereken nog enkele getallen uit de rij.

Het lijkt er misschien op dat de eerste negen getallen uit de rij zich blijven herhalen, maar schijn bedriegt. Nadat dit stuk zich heeft herhaald, volgt daarop namelijk geen 1 maar een 2, juist vanwege deze herhaling!

Als je zelf al wat meer getallen uit de rij hebt berekend, zul je je misschien afvragen of er in deze rij alleen maar getallen 1, 2 en 3 voorkomen. Met behulp van een computer (of flink met de hand doorrekenen) vind je echter na een tijdje een 4 en wel op de 220ste plek in de rij.

WAAR BLIJFT DIE 5? Toen ik deze rij in 2004 bedacht, vermoedde ik dat elk natuurlijk getal ergens in de rij moet voorkomen. De getallen 1, 2, 3 en 4 komen voor het eerst voor op posities 1, 3, 9 en 220 in de rij. Maar zelfs na het berekenen van miljoenen termen van de rij vertoonde de 5 zich nog steeds niet. De twijfel sloeg toe. Maar uiteindelijk, na een paar jaar, lukte het om te bewijzen dat de 5 ooit moet opduiken.

De 5 neemt echter wel zijn tijd. Bij het uitschrijven van de rij zou het heelal al zijn vergaan voordat we ooit een 5 tegenkwamen. De eerste keer dat 5 in de rij verschijnt, is namelijk pas rond de $10^{100.000.000.000.000.000.000.000.000}$-ste positie! Dat getal is zo gigantisch groot, dat het niet zou passen in het gezamelijke geheugen van alle computers ter wereld. Bedenk dat dit slechts de lengte is, de rij zelf is zeker niet uit te schrijven tot en met de eerste 5.

Dit alles is trouwens niets vergeleken bij hoe lang het duurt voordat de eerste 6 opduikt. Uiteindelijk is bewezen dat elk getal – hoe groot ook – ooit langskomt, maar het duurt ongelooflijk lang. Een ruwe schatting voor de eerste verschijning van een getal $m \geq 6$ is rond positie

$$2^{2^{3^{4^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{m-1}}}}}}}.$$

Stelling. Elk positief geheel getal komt voor in de rij A090822.

Opgave 2. Stel dat ergens in de rij voor het eerst het getal 8 voorkomt. Beargumenteer dat de 7 dan al eerder in de rij voorkomt. Kun je ook laten zien dat er op de plek direct voor de 8 een 7 staat?

PATRONEN EN LIJM Als het onmogelijk is om de rij uit te schrijven tot en met de eerste 5, hoe kun je dan weten dat er überhaupt een 5 in de rij voorkomt? Het is je misschien al opgevallen dat de rij wat grillig is, maar toch ook veel regelmaat vertoont. Om het patroon wat duidelijker te maken, splitsen we de eerste 98 getallen op in een aantal brokken:

1, 1, **2**
1, 1, 2, **2, 2, 3**
1, 1, 2
1, 1, 2, 2, 2, 3, **2**

1, 1, 2
1, 1, 2, 2, 2, 3
1, 1, 2
1, 1, 2, 2, 2, 3, 2, **2, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 3, 2**

1, 1, 2
1, 1, 2, 2, 2, 3
1, 1, 2
1, 1, 2, 2, 2, 3, 2

1, 1, 2
1, 1, 2, 2, 2, 3
1, 1, 2
1, 1, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 3, 2, **2, 2, 3, 2**

Het beginstuk '1, 1, 2' vind je door '1' te verdubbelen en er '2' achter te plakken. Het beginstuk bestaande uit de eerste negen getallen vind je door '1, 1, 2' te verdubbelen en er '2, 2, 3' achter te plakken. Het beginstuk van lengte 19 vind je door het beginstuk van lengte negen te verdubbelen en er '2' achter te plakken. Enzovoorts. Er kan worden bewezen dat dit patroon zich voortzet: telkens wordt een beginstuk van de rij tweemaal achter elkaar herhaald,

gevolgd door een stuk met alleen getallen groter dan 1 dat we *lijm* noemen. Hierboven zijn de stukken lijm vetgedrukt.

De eerste zes stukken lijm zijn:

2
2, 2, 3
2
2, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 3, 2
2, 2, 3, 2
2, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4

Met behulp van het bovenstaande patroon en deze eerste zes stukken lijm kun je achtereenvolgens weer de beginstukken van lengte

$$2 \times 1 + 1 = 3,$$
$$2 \times 3 + 3 = 9,$$
$$2 \times 9 + 1 = 19,$$
$$2 \times 19 + 9 = 47,$$
$$2 \times 47 + 4 = 98,$$
$$2 \times 98 + 24 = 220$$

van de rij terugvinden.

Opgave 3. Zet de eerste zes stukken lijm achter elkaar zodat je een rijtje van lengte 42 krijgt. Kun je ook in deze rij een patroon ontdekken?

PATRONEN OP EEN HOGER PLAN We gaan een variant maken op de rij A090822. We beginnen nu met een 2 in plaats van een 1. Net als eerder is verder elk getal in de rij weer het krulgetal van het stuk ervoor, *behalve* wanneer het krulgetal gelijk is aan 1, dan *promoveert* de 1 tot een 2. We krijgen zo de volgende rij:

$$\underline{2}, \underline{2}, 2, 3, \underline{2}, \underline{2}, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 3, 2, \underline{2}, 2, \ldots$$

De gepromoveerde getallen zijn onderstreept. We noemen deze rij de 'tweede-orde rij'. Wat blijkt? De stukken lijm van A090822 vormen samen precies deze tweede-orde rij! Bovendien kun je aan de promotieplekken zien hoe de tweede-orde rij weer kan worden opgeknipt in de stukken lijm: zet een knip vóór elke promotieplek. Dat dit daadwerkelijk het geval is, zullen we hier niet bewijzen.

Opgave 4. Bereken de eerste 42 getallen van de tweede-orde rij en houd bij welke getallen promoveren. Gebruik dit om de eerste 220 getallen van A090822 terug te vinden.

Opgave 5. Stel dat ergens in A090822 een 5 voorkomt. Waarom komt dan ook het stuk 4, 4, 4, 4, 5 voor?

Opgave 6. Als ergens in A090822 een stuk 4, 4, 4, 4 voorkomt, dan komt 4, 4, 4 al eerder voor in de rij, en 4, 4 nóg eerder. Kun je dat beredeneren?

Met behulp van de tweede-orde rij (inclusief promoties) kunnen we veel verder in de rij A090822 kijken dan door domweg uitschrijven. Voordat we naar een 5 gaan zoeken, zullen we dit illustreren door uit te zoeken waar voor het eerst '4, 4' voorkomt. Dit zal veel eerder zijn dan de plek van de eerste 5. Als we de computer aan het werk zetten, dan vinden we in het beginstuk van lengte 31044 van de tweede-orde rij voor het eerst twee vieren achter elkaar. In dat stuk vinden we 355 promoties en daarmee 355 stukken lijm van lengte 1, 3, 1, 9, 4, 24, 1, 3, ... Na 355 keer verdubbelen en lijm toevoegen vinden we uiteindelijk de eerste dubbele vier in A090822, en wel op positie 255.895.648.634.818.208.370.064.452.304.769.558.261.700.170.817.472.823.398.081.655.524.438.021.806.620.809.813.295.008.281.436.789.493.636.145.

We zouden dezelfde strategie kunnen proberen om de eerste 5 te vinden: eerst de tweede-orde rij (inclusief promoties) uitrekenen tot en met de eerste 5, en daarna uitrekenen op welke plek de 5 staat in A090822. Helaas blijkt dat zelfs in de tweede-orde rij de 5 te lang op zich laat wachten. Hij verschijnt pas op positie 7.709.404.388.415.370.160.829.246.932.345.692.180. Hoe kunnen we dat zo pre-

cies weten? Het is immers onmogelijk om zo veel getallen van de tweede-orde rij te berekenen!

Onze rij A090822 kon worden gemaakt door het rijtje '1' te nemen en dat herhaald te verdubbelen, gevolgd door toevoegen van een stuk lijm. Het blijkt dat de tweede-orde rij eenzelfde structuur heeft, maar nu wordt er steeds verdrievoudigd gevolgd door toevoegen van *superlijm* bestaande uit getallen groter dan 2. Beginnend bij '2' vinden we '2, 2, 2, **3**', dan '2, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 3, **3**', enzovoort. Als we de stukken superlijm achter elkaar plakken, vinden we de rij $\underline{3}$, $\underline{3}$, $\underline{3}$, 3, 4, $\underline{3}$, $\underline{3}$, $\underline{3}$, 3, 4, … Deze derde-orde rij werkt weer precies als onze eerdere twee rijen, maar nu promoveren de getallen 1 en 2 allebei tot een 3. In de derde-orde rij vinden we voor het eerst een 5 op positie 343. Door naar de promoties te kijken, kunnen we de stukken superlijm achterhalen en daarmee (door herhaald te verdrievoudigen) de positie van de eerste 5 in de tweede-orde rij.

Het patroon van verdubbelen, verdrievoudigen, verviervoudigen enzovoorts met behulp van lijm, superlijm, supersuperlijm enzovoorts blijft eindeloos doorgaan. Hieruit volgt dat elk getal in de tweede-orde rij ook voorkomt (na veel verdubbelingen) in A090822. Elk getal in de derde-orde rij komt op zijn beurt (na een aantal verdrievoudigingen) voor in de tweede-orde rij. Elk getal in de vierde-orde rij komt ook voor in de derde-orde rij, enzovoort. Zo door redenerend volgt uiteindelijk dat elk geheel getal voorkomt in A090822, ook al duurt het fantastisch lang.

HET KRULVERMOEDEN De rij A090822 ontstond uit '1' door herhaald het krulgetal van de rij tot dan toe aan het eind toe te voegen. In plaats van met '1' kun je ook met iets anders starten, bijvoorbeeld met '2, 2'. Je vindt dan 2, 2, 2, 3, 1, … Of je kunt starten met '2, 3, 2, 3', zodat je krijgt: 2, 3, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 1, … Het lijkt erop dat waar je ook mee begint, je uiteindelijk weer een keer op een 1 uitkomt.

Opgave 7. Start met 2, 2, 2, 3, 2, 2. Na hoeveel stappen kom je op een 1 uit?

Opgave 8. Start met 2, 3, 2, 2, 2, 3, 2, 3. Als het goed is, kom je na 59 stappen uit op een 1.

We eindigen dit stuk met een open probleem:

Vermoeden. Met welk rijtje je ook begint, het herhaald toevoegen van het krulgetal aan het eind, levert uiteindelijk een keer een 1 op.

Zelfs als we alleen beginnen met rijtjes bestaande uit tweeën en drieën, is het onbekend of we altijd op een 1 uitkomen. ■