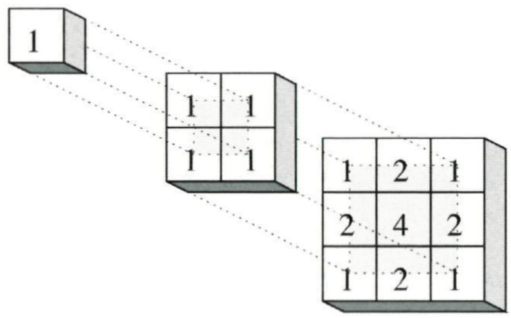
EEN PYRAMIDE VAN PASCAL

leveren resultaat op. De pyramide komt niet alleen op papier, maar wordt ook in werkelijkheid gebouwd.
Twee houten torens prijken in de wiskundeklas van Jo Verstraete en de leerlingen van klas 5 IW. Zodra het bedenken van de driedimensionale uitbreiding van de driehoek van Pascal begonnen is, rijst meteen de vraag: "Hoeveel zijden moet de pyramide krijgen? Drie, vier, zes?" Welke pyramide het makkelijkst werkt of de mooiste eigenschappen bezit is niet meteen duidelijk. Uiteindelijk bijt Peter zich vast in de driezijdige pyramide en werkt Stijn aan een vierzijdige variant. Kristof, Stefaan, Wesley, Lesley en Kristof springen in waar nodig, schrijven bewerkingen uit, testen hypothesen en doen rekenwerk, met een prachtig resultaat.

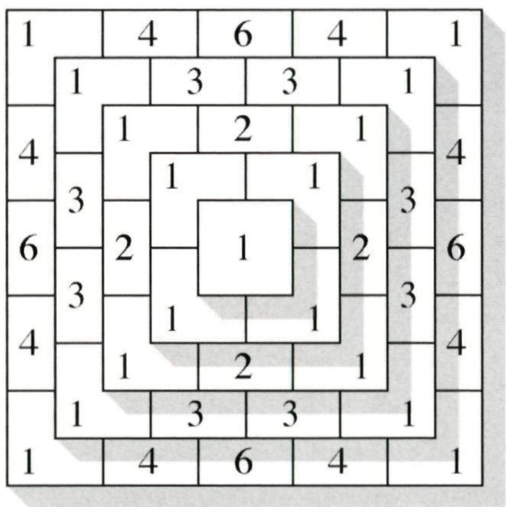
Een vierzijdige pyramide

De pyramide van Stijn is opgebouwd uit vierkante lagen. De toplaag bestaat uit een enkel blokje met het getal 1.
De tweede laag bestaat uit vier blokjes, de derde uit negen, de vierde uit zestien, en zo verder. Het getal op een blokje wordt berekend door de getallen op de vier blokjes erboven op te tellen.
Blokjes in de zijvlakken van de pyramide hebben minder dan vier bovenburen, dus tellen we de ontbrekende blokjes als 0.
Zo bestaat de tweede laag uit 4 enen, want elk blokje heeft maar één bovenbuur. De derde laag wordt al iets interessanter. Zie figuur 2.

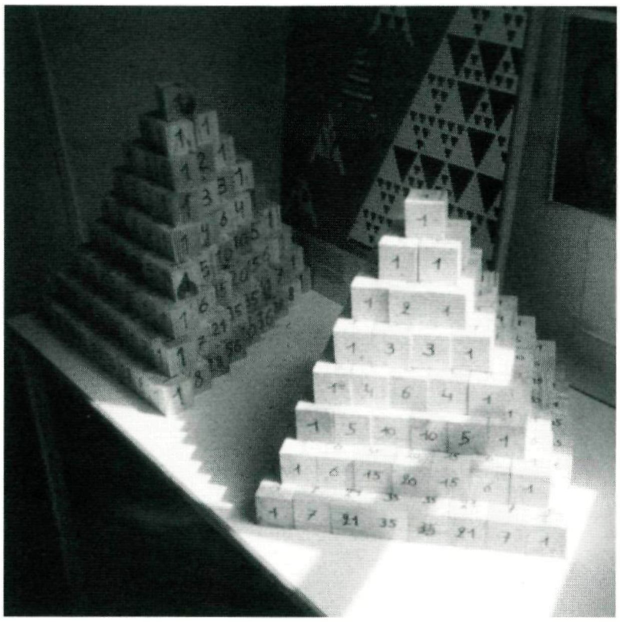


Figuur 2. De eerste drie lagen van de pyramide van Pascal

Reken je nog meer lagen uit, dan is er iets dat meteen in het oog springt: op de zijvlakken komt de driehoek van Pascal weer tevoorschijn! Zie figuur 3.



Figuur 3. Vijf lagen van de pyramide van Pascal.



Een tweede verrassende eigenschap openbaart zich als we de vijfde laag wat beter bekijken. Zie figuur 4.

Elk getal is precies gelijk aan het product van de bijbehorende getallen op twee zijden. Dit blijkt ook te gelden voor alle getallen in alle andere lagen van de pyramide. Om de getallen binnenin de pyramide te weten te komen hoef je dus enkel de juiste twee getallen op de zijvlakken met elkaar te vermenigvuldigen.

1	4	6	4	1
4	16	24	16	4
6	24	36	24	6
4	16	24	16	4
1	4	6	4	1

Figuur 4. De vijfde laag.

Opgave. Elk van de randen van de pyramide bestaat uit enkel enen. Hoe ziet de rij daaronder er uit?

Opgave. Bereken de som van de getallen in de tweede laag en doe hetzelfde voor de getallen in de derde laag en die in de vierde laag. Kun je verklaren waarom de som van de getallen in de opeenvolgende lagen steeds met een factor 4 groeit?

Een driezijdige pyramide

Peters pyramide bestaat uit driehoekige lagen (zie foto). Het getal in de top is weer 1. Om het getal van een ander blokje te berekenen tel je de getallen van zijn directe bovenburen bij elkaar op. Elk blokje (dat niet in een zijvlak ligt) heeft nu precies 3 bovenburen. Ook deze pyramide heeft bijzondere eigenschappen.

Opgave. De som van de getallen in de eerste laag is 1. De som van de getallen in de tweede laag is 3. De derde laag geeft als som 9, daarna 27, 81, enzovoorts. Waarom verdrievoudigt de som van de achtereenvolgende lagen telkens?

Opgave. Tel het aantal blokjes in de eerste 1, 2, 3 en 4 lagen. Je vindt dan de eerste vier pyramide-getallen: 1, 4, 10, 20. Zoek de pyramide-getallen op in de driehoek van Pascal en bepaal het aantal kubusjes in de driezijdige pyramide op de foto.

Meer informatie

Martin Gardner, *Mathematical Carnival*, Penguin, ISBN 0-14-013507-3
http://members.tripod.com/~absolutebow/ptri2.html