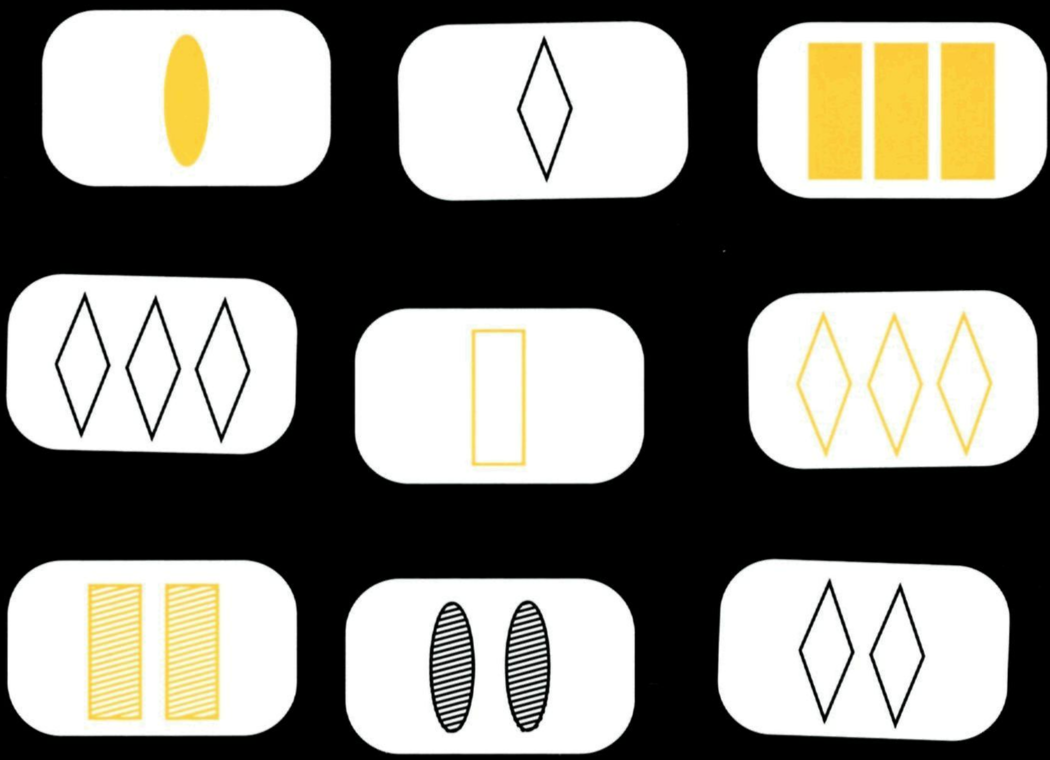
Het tellen van Sets

Dion Gijswijt



Figuur 1.
Negen Set-kaarten.
De bovenste drie vormen een Set
(3 eigenschappen gelijk, 1 verschillend),
de onderste drie ook
(1 eigenschap gelijk, 3 verschillend).
Er is nog één andere Set.

Set is een gezelschapsspel bestaande uit 81 kaarten, waarvan je op het eerste gezicht zou zeggen dat het niet veel met wiskunde te maken heeft. Toch roept het spel veel wiskundige vragen op. Het kaartspel Set is uitvoerig behandeld in Pythagoras, december 1999. Set is tegenwoordig te koop in de reguliere speelgoedwinkels (Intertoys). Importeur is de firma Ravensburg te Amersfoort. Je kunt het spel zelf maken aan de hand van de beschijving op de homepage van Pythagoras (kijk bij december 1999), maar daar moet je wel wat voor doen.

De spelregels

Set bestaat uit 81 kaarten. Op elke kaart kun je vier eigenschappen herkennen: kleur (rood/groen/paars), aantal (1/2/3), vorm (ruit/ovaal/rechthoek) en arcering (open/gearceerd/dicht). Alle mogelijke combinaties komen precies één keer voor. Er zijn daarom $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ Set-kaarten.

Om het spel te kunnen spelen moet je weten wat een Set is. Dit is een drietal kaarten die 'bij elkaar' horen volgens een heel precieze regel: een drietal kaarten vormt een Set als elke eigenschap ofwel gelijk is, ofwel op elk van de drie kaarten verschillend is. Deze regel moet je voor alle vier eigenschappen controleren. Een Set kan 1, 2, 3 of 4 eigenschappen verschillend hebben. Dit klinkt moeilijker dan het is, zie het voorbeeld in figuur 1.

Het spel gaat als volgt.

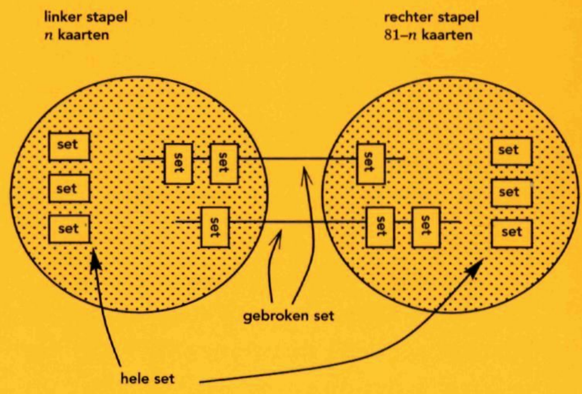
Een spelleider schudt het spel en legt twaalf kaarten open op tafel in een rechthoek van drie bij vier. De kunst is in deze twaalf kaarten een Set te herkennen. Wie een Set ziet, roept 'Set'! Degene die het eerste roept, mag de gevonden Set aanwijzen. De andere spelers controleren. Als het klopt is de Set voor degene die hem het eerste zag, en worden de kaarten op tafel weer aangevuld tot twaalf. Klopt het niet, dan volgt er een straf (een beurt overslaan of drie kaarten inleveren). Als niemand in de kaarten op tafel een Set ziet, dan worden er drie kaarten toegevoegd. Het spel is afgelopen als alle kaarten op zijn en er geen Sets meer op tafel liggen. Degene met het grootste aantal kaarten wint.

Het aantal Sets in twaalf kaarten

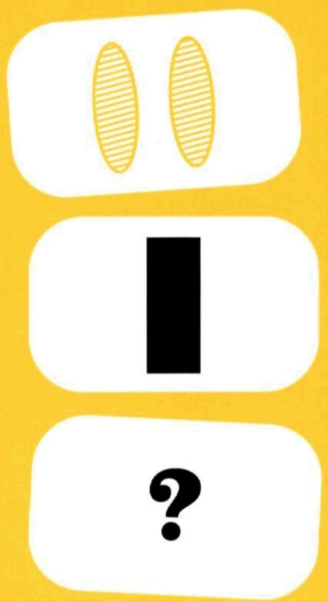
Bij het spelen van Set komt het wel eens voor dat er in de twaalf kaarten op tafel geen enkele Set zit. Het minimale aantal Sets in twaalf kaarten is dus gelijk aan 0. Je kunt je ook afvragen hoeveel Sets er maximaal in twaalf kaarten kunnen zitten. Het antwoord op deze vraag is 14, maar is niet eenvoudig te vinden. Voor een kleiner aantal kaarten is het eenvoudiger uit te vinden wat het maximale en minimale aantal Sets is. Voor vier kaarten is bijvoorbeeld het minimale aantal Sets gelijk aan 0 en het maximale aantal gelijk aan 1. Op die manier kun je proberen voor elk aantal kaarten het minimale en maximale aantal Sets te berekenen. Het invullen van *alle* plaatsen in deze `grote Set-tabel' is echter nog niemand gelukt. Het blijkt echter dat in de Set-tabel een verrassende symmetrie zit. Zo kun je het aantal Sets in 77 kaarten bepalen als je het aantal Sets in 4 kaarten weet en omgekeerd. Hoe dit precies in elkaar zit volgt nu. >>

Alle kaarten

Eerst bepalen we het aantal Sets in alle 81 kaarten samen. Omdat er bij ieder tweetal kaarten altijd een unieke derde kaart is die het drietal tot een Set maakt (ga maar na), kunnen we alle Sets maken door twee verschillende kaarten te kiezen en dit tweetal te completeren tot een Set. Voor de eerste kaart kun je alle 81 kaarten kiezen en voor de tweede kaart zijn er nog 80 mogelijkheden. Zo vindt je dus $81 \times 80 = 6480$ Sets. Elke Set is nu $3! = 6$ maal geteld, dus er zijn $6480/6 = 1080$ verschillende Sets.



figuur 3.
'Hele Sets' en 'gebroken Sets'



Figuur 2.
Elke twee kaarten bepalen een unieke derde kaart die het drietal tot een Set maakt. In dit geval moeten alle vier eigenschappen verschillend zijn

Twee stapels

Neem de 81 Setkaarten en verdeel ze in gedachten over een linker en een rechter stapel. Van de 1080 Sets liggen sommige nu geheel in een van beide stapels, maar andere Sets zijn in tweeën gebroken en hebben een kaart in zowel de linker als de rechter stapel. Noem het aantal 'hele' Sets H en het aantal 'gebroken' Sets G. We weten dus $H + G = 1080$. Verder geven we het aantal kaarten in het linker stapeltje aan met n, zodat het aantal kaarten in het rechter stapeltje gelijk is aan $81 - n$.

Zoals gezegd, bij ieder tweetal kaarten hoort een unieke derde kaart die het drietal tot een Set maakt. Je kunt dus het aantal gebroken Sets tellen door een kaart in de linker en een kaart in de rechter stapel te kiezen en de derde kaart, die met deze twee een set vormt erbij te nemen. Je telt zo alle gebroken Sets, elk precies tweemaal. Dus $G = \frac{1}{2} n \left(81 - n\right)$ zodat:

$$H = 1080 - \frac{n\left(81-n\right)}{2}.$$

Dit is verrassend: deze formule geldt blijkbaar altijd, zolang er links maar n kaarten liggen en rechts $81 - n$. Het aantal Sets dat geheel in een van beide stapels ligt is dus *onafhankelijk* van de precieze verdeling van de kaarten! Dit betekent dat als we n vast nemen, het aantal Sets in de linker stapel minimaal is, precies dan als het aantal Sets in de rechter stapel maximaal is, en andersom. De som van de twee aantallen is immers constant. Als we $n = 4$ nemen, dan is het aantal Sets in de linker en rechter stapel samen gelijk aan

$$\frac{1}{2} \times 4\left(4-81\right) + 1080 = 926$$

Het minimale en maximale aantal Sets in de vier kaarten zijn 0 en 1, dus het maximale en minimale aantal Sets in 77 kaarten is 926 en 925 .

Mini-Set
Neem alle dichte ruiten-kaarten. Deze negen kaarten vormen een mini-Setspel, waarbij er slechts twee in plaats van vier eigenschappen zijn, namelijk kleur en aantal. Ieder tweetal kaarten bepaalt weer precies een Set. Je kunt makkelijk nagaan dat er nu in totaal 12 Sets zijn. Als we de vorige redenering herhalen voor mini-Set, dan vinden we dat:

$$H = \frac{n(9-n)}{2} + 12.$$

Voor mini-Set kunnen we met behulp van deze formule vrij eenvoudig de hele Settabel uitrekenen. Voor 0, 1 of 2 kaarten is het maximale (en minimale) aantal Sets gelijk aan 0. In 3 kaarten zitten maximaal 1 en minimaal 0 Sets. De vier kaarten met aantal 0 of 1 en kleur rood of groen bevatten geen Set, dus het minimale aantal Sets in 4 kaarten is 0. Het maximale aantal Sets in 4 kaarten is 1 (ga na). We hebben nu de eerste 5 regels van de Settabel al ingevuld. Maar de laatste 5 volgen automatisch uit de formule en de tabel is compleet!

n	$\frac{1}{2}n(9-n) + 12$	Max.	Min.
0	12	0	0
1	8	0	0
2	5	0	0
3	3	0	1
4	2	0	1
5	2	1	2
6	3	2	3
7	5	5	5
8	8	8	8
9	12	12	12

Open vragen
Maak een Settabel voor 3-dimensionaal Set (27 kaarten), en dezelfde vraag voor gewoon Set (81 kaarten). Beide vragen zijn nog onopgelost!

Download
In de download-sectie van de homepage van Pythagoras kun je een programma vinden, waarmee je Set aan een statistisch onderzoek kunt onderwerpen. Het programma trekt steeds opnieuw twaalf kaarten, en telt het aantal Sets daarin. De resultaten worden bijgehouden in een histogram. Het programma werkt ook voor andere aantallen dan twaalf. Wat gebeurt er bijvoorbeeld bij zeven kaarten?