Stellingen

behorende bij het proefschrift

Matrix Algebras
and
Semidefinite Programming Techniques
for Codes

door Dion Gijswijt

Stellingen

I

Het *krulgetal* $C(w)$ van een woord w is het grootste getal k, zodat w een concatenatie is van de vorm $w = xy^k$, met y niet-leeg. Als w het lege woord is, stellen we $C(w) := 1$. De *krul-transformatie* $\mathcal{C}(b)$ van een rij $b_1, b_2, b_3, \ldots$ is de rij $c_1, c_2, c_3, \ldots$ gegeven door

$$c_n := C(b_1, \ldots, b_{n-1}). \tag{1}$$

Het unieke dekpunt w van $\mathcal{C}$ begint als

1,1,**2**,
1,1,**2**,***2***,**2**,***3***,
1,1,2,1,1,**2**,**2**,**2**,**3**,***2***,
1,1,2,1,1,2,2,2,3,1,1,2,1,1,**2**,**2**,**2**,**3**,**2**,***2***,***2***,***3***,***2***,***2***,***2***,***3***,***3***,***2***

en bevat alle natuurlijke getallen. De getallen 1, 2, 3, 4 en 5 komen voor het eerst voor in posities 1, 3, 9, 220 en (ongeveer) $10^{10^{23}}$. Zie: F. J. van de Bult, D. Gijswijt, J. P. Linderman, N.J.A. Sloane and A. R. Wilks, A Slow-Growing Sequence Defined by an Unusual Recurrence, *preprint*.

II

Zij $G = (V, E)$ een graaf en zij $b : E \to \mathbb{Z}_+$ een 'capaciteit' op de lijnen. Beschouw nu het stelsel

$$\begin{array}{rlll} \text{(i)} & x_v \geq 0 & \text{voor iedere } v \in V, & \\ \text{(ii)} & x(e) \leq b_e & \text{voor iedere } e \in E, & (2) \\ \text{(iii)} & x(VC) \leq \lfloor \frac{1}{2} b(EC) \rfloor & \text{voor iedere oneven circuit } C. & \end{array}$$

Er geldt:

> stelsel (**??**) is voor iedere $b : E \to \mathbb{Z}_+$ *totaal duaal integraal* (TDI), dan en slechts dan als G geen 'bad K_4' als deelgraaf heeft.

Zie: D. Gijswijt, A. Schrijver, On the b-stable set polytope of graphs without bad K_4, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 16 (2003) 511–516.

III

Zij V een eindige verzameling punten op een cirkel, en laat $A_1, \ldots, A_m$ cirkelsegmenten zijn met 'capaciteiten' $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{Z}_+$. Definieer nu de verzameling $X \subseteq \mathbb{Z}_+^V$ door

$$X := \{x \in \mathbb{Z}_+^V \mid x(A_i) \leq c_i \quad \text{voor iedere } i = 1, \ldots, m\}.$$

Dan geldt voor ieder natuurlijk getal k:

$$(k \cdot \text{conv.hull}(X)) \cap \mathbb{Z}^V = \{x_1 + \cdots + x_k \mid x_1, \ldots, x_k \in X\}.$$

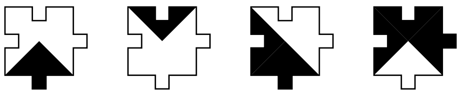
Bovendien is er een algoritme dat, gegeven $x \in \mathbb{Z}_+^V$, een decompositie $x = x_1 + \cdots + x_k$ vindt met $x_1, \ldots, x_k \in X$ indien zo'n decompositie bestaat. Het algoritme gebruikt hiervoor $O(n(n+m))$ elementaire operaties, waar $n = |V|$. Zie: D. Gijswijt, Integer decomposition for polyhedra defined by nearly totally unimodular matrices, zal verschijnen in: *SIAM Journal on Discrete Mathematics*.

IV

Vier is het kleinste aantal kleuren waarmee iedere configuratie in het vlak van niet-overlappende eenheidsvierkanten kan worden gekleurd (vierkanten met een gemeenschappelijk lijnstuk moeten verschillend gekleurd worden).

V

De vraag of een gegeven mal kan worden ingevuld met de vier soorten puzzelstukjes



(kleuren van aangrenzende stukjes moeten overeen komen), is NP-volledig. Zie: D. Gijswijt, Problemen, *Pythagoras* februari 2004.

VI

Loodrechte projectie op een matrix $*$-algebra behoudt het positief semidefiniet zijn van matrices. Hiermee kunnen semidefiniete programmeringsproblemen worden gereduceerd.

VII

Laat een eindig aantal rode en blauwe punten in het vlak gegeven zijn, waarvan geen drie op een lijn. Dan bestaat er een lijn l zodat aan beide kanten van l evenveel rode punten liggen en tevens evenveel blauwe punten.

VIII

Een beproefd recept voor het lokken van wiskundeleraren kent drie hoofdingrediënten: gordijnringen, een rol polyethyleenkoord en bovenal: vuurvaste vingers.