

Improving convergence of QuickFlow

A Steady State Solver for the Shallow Water Equations

Femke van Wageningen-Kessels

January 22, 2007



VORtech
Computing

 **TU Delft**

Delft University of Technology

Background

Lek: industrieterrein teruggegeven aan de rivier

De Lek tussen Lekkerkerk en Schoonhoven vormt een speciaal stukje Nederland. Een rechte rivier tussen smalle uiterwaarden en dicht bebouwde dijken. Dijkversterking is hier een kunststukje, extra ruimte voor de rivier is moeilijk te vinden. Toch is het gelukt. Onder meer door industrieterreinen terug te geven aan de rivier.

Een groot deel van de huizen van Ammerstol klampt zich aan weerszijden vast aan de Lekdijk. Het is geen wonder dat dit stuk dijk nog versterkt moet worden. Dico van Ooijen van Rijkswaterstaat laat het met een glimlach zien. De hele Lekdijk tussen Lekkerkerk en Schoonhoven vormt een speeltuin voor technenuten.



Het afgegraven industrieterrein bij Opperduit.

Standaardoplossingen zijn nergens aan de orde. Elk stukje moet met een frisse blik benaderd worden. Dat leidt tot creativiteit en tot nieuwe manieren van denken over dijkversterking.

De Lek is een relatief jonge rivier. Vroeger liep hier een kleinere rivier. De Rijn, die vroeger bij Katwijk in zee uitmondde, is in die oude bedding geleid en die is eigenlijk te krap voor een grote rivier. De uiterwaarden zijn overal smal. Bovendien zitten er nog tal van industriële bedrijven buitendijks, direct langs de rivier. Vroeger was dat namelijk een toplocatie, omdat het water de belangrijkste vervoersweg was. Tot slot zijn er tegen de dijken overal woningen gebouwd.

Dijk teruggelegd

Hoe vind je hier meer ruimte voor de rivier? In principe is dat op twee manieren mogelijk: de dijk terugleggen of de buitendijkse activiteiten naar elders verplaatsen.

Bij de locatie Lekdijk-West – tegenover Streefkerk – is de dijk teruggelegd. Dat ging niet zonder slag of stoot, vertelt Van Ooijen.



De westelijke Lekdijk, voordat deze meer landinwaarts is gelegd.

Background: software

WAQUA

- since 1970's -

- slow convergence
- time-dependent solution
- not well suited for stationary solution

QuickFlow

- since 2006 -

- fast convergence
- only stationary solution
- uses WAQUA output as initial solution

Goal & content

- How does QuickFlow work?
 - Shallow water equations
 - Spatial discretization
 - Time iteration methods
 - Test problems
- Improvements to QuickFlow
- Planning

2D Shallow water equations

Navier Stokes equations \Rightarrow Reynolds equations
 \Rightarrow 2D Shallow water equations:

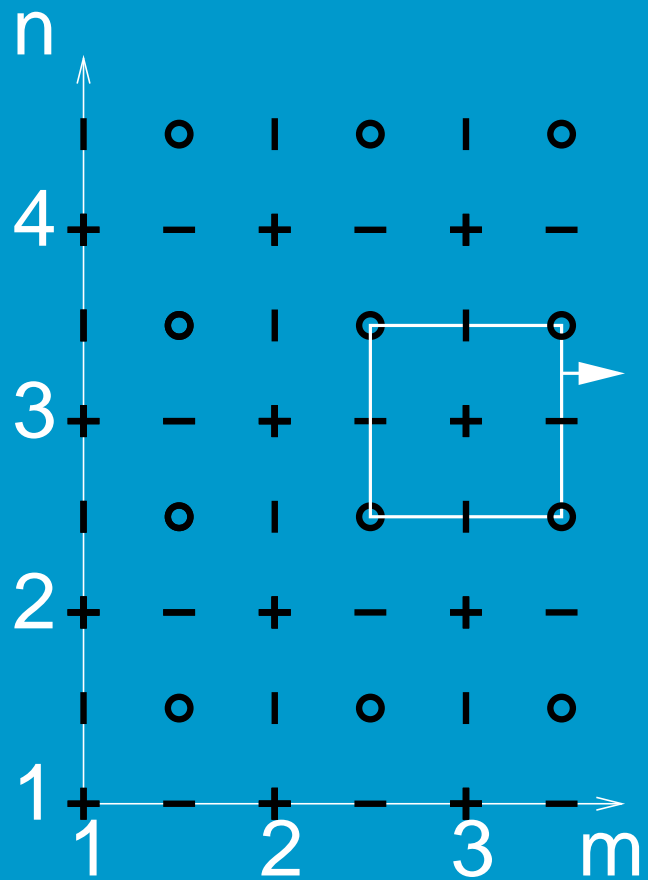
$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} - fV + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\tau_{\text{bottom},x}}{\rho_0 H} - \nu_H \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + fU + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\tau_{\text{bottom},y}}{\rho_0 H} - \nu_H \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial HU}{\partial x} + \frac{\partial HV}{\partial y} = 0$$

\Rightarrow Shallow water equations on curvilinear grid

Spatial discretization: grid



V -velocity | \circ depth
 water level + - U -velocity

one computational cell

Spatial discretization: methods

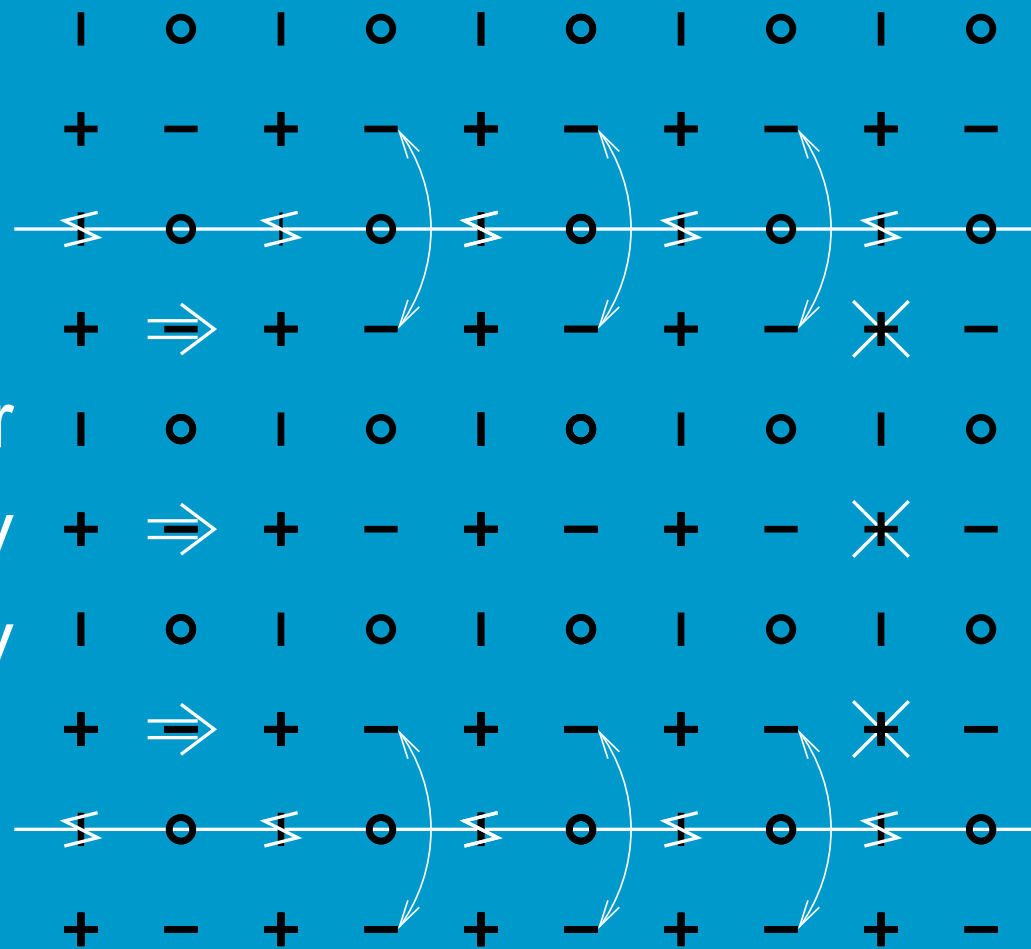
Momentum equations:

- Third order upwind: $U \frac{\partial V}{\partial x}$ and $V \frac{\partial U}{\partial y}$
- Central difference

Continuity equations:

- Finite volume

Spatial discretization: boundaries

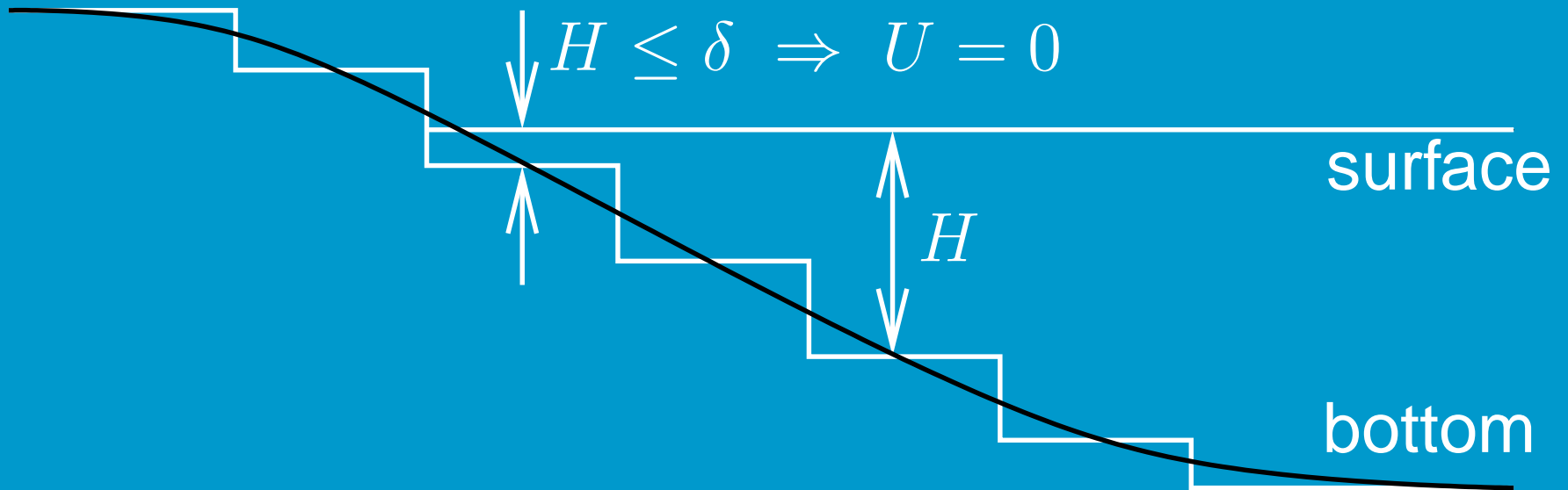


closed
free slip

discharge or
velocity
boundary

water level
boundary

Spatial discretization: moving boundary



Time iteration: WAQUA - ADI

stage 1: V -momentum explicit

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{A}_1(\mathbf{u}^l, \mathbf{u}^{l+1/2})$$

stage 2: U -momentum & continuity explicit

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{A}_2(\mathbf{u}^{l+1/2}, \mathbf{u}^{l+1})$$

Stationary:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{1}{2} [\mathbf{A}_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \mathbf{A}_2(\mathbf{u}, \mathbf{u})] \equiv \mathbf{A}(\mathbf{u})$$

Time iteration: Euler Backward

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{u}) \Rightarrow \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = \mathbf{A}(\mathbf{u}^{n+1}) \Rightarrow$$
$$\Delta t \mathbf{M} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) + \mathbf{A}(\mathbf{u}^{n+1}) - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

Advantages:

- easy implementation
- unconditionally stable

Time iteration: Newtons method

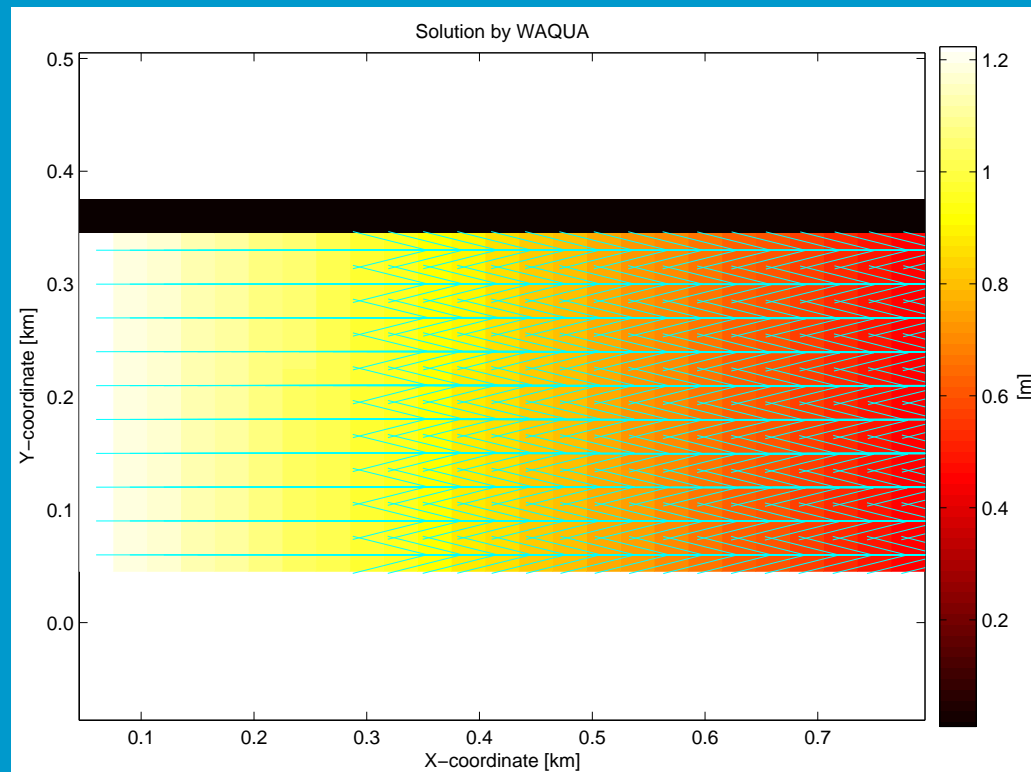
$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \equiv \Delta t \mathbf{M}(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) + \mathbf{A}(\mathbf{u}^{n+1}) - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \alpha (\mathbf{F}'(\mathbf{x}^k))^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^k)$$

Advantages:

- easy implementation
- global convergence (line search)

Test problem: Chézy



- Rectangular gutter
- 25×11 grid cells
- inflow:
velocity boundary
- outflow:
water level boundary

Test problems: real

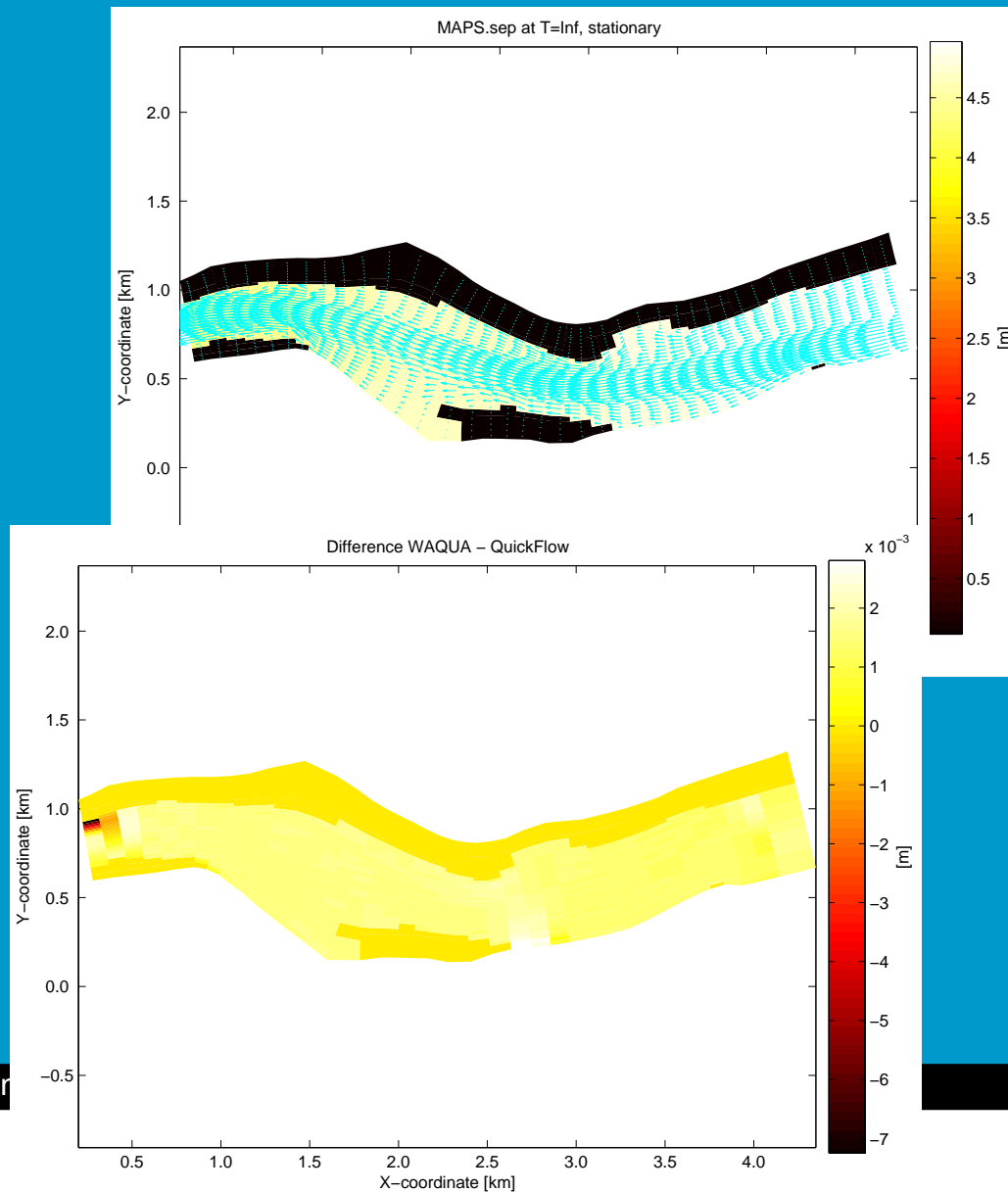


Lek



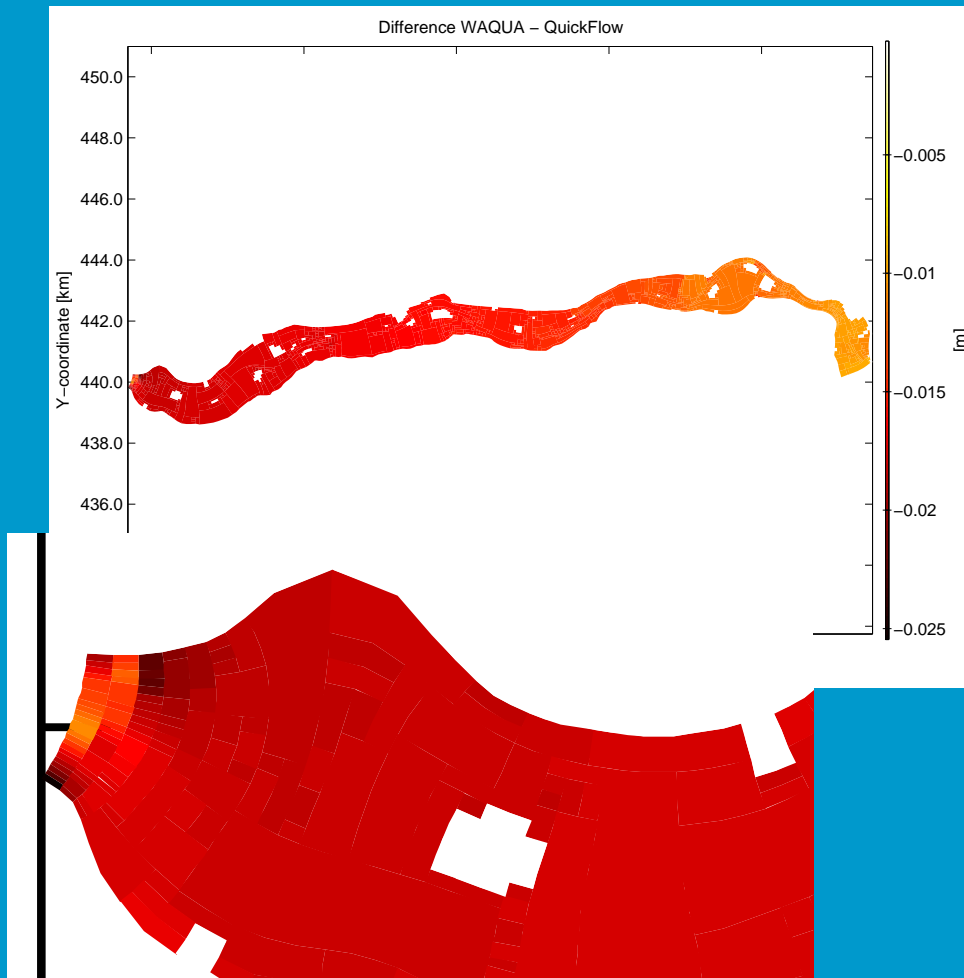
Randwijk

Test problem: Lek



- Relatively easy
- 42×34 grid cells
- inflow:
discharge boundary
- outflow:
water level boundary

Test problem: Randwijk

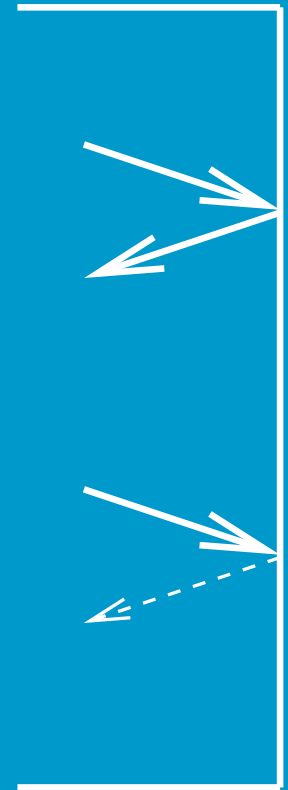


- Relatively complex
- 287×26 grid cells
- inflow:
discharge boundary
- outflow:
water level boundary

Improvements: damping BC's

'hard' open boundaries \Rightarrow
nonphysical reflection of waves
 \Rightarrow long 'run-up' time

Remedie:
damping boundary conditions



Improvements: semi-explicit time

Example: advection equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial x}$$

Euler Backward & upwind

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} = u_m^{n+1} \frac{u_m^{n+1} - u_{m-1}^n}{\Delta x}$$

Alternative

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} = u_m^n \frac{u_m^{n+1} - u_{m-1}^n}{\Delta x}$$

Implementation in Euler Backward or in Newton

Improvements: quasi-Newton

Approximate Jacobian $F'(\mathbf{x}^0) \approx B^k$

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - (B^k)^{-1} F(\mathbf{x}^k)$$

Advantages:

- reduce costs for computing F'
- reduce costs for LU-decomposition of F'
- possibly faster convergence (depends on method)

Improvements: adaptive time stepping



complicated area
→ small time step

or large time step for continuity equation:

$$\frac{\zeta^{l+1} - \zeta^l}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial x}(Hu) = 0$$
$$\Delta t \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}(Hu) = 0$$

Plan

- Resolve large errors near open boundaries
- Inventorise & solve problems
 - Chézy
 - Lek
 - Randwijk

Conclusion

- Software: WAQUA & QuickFlow
- Modelling river flow: Shallow water equations
- Spatial discretization
- Time iteration: ADI, Euler Backward, Newton
- Improvements:
 - Damping boundary conditions
 - Semi-explicit time iteration
 - Quasi-Newton
 - Adaptive time stepping

Questions?

Lek: industrieterrein teruggegeven aan de rivier

De Lek tussen Lekkerkerk en Schoonhoven vormt een speciaal stukje Nederland. Een rechte rivier tussen smalle uiterwaarden en dicht bebouwde dijken. Dijkversterking is hier een kunststukje, extra ruimte voor de rivier is moeilijk te vinden. Toch is het gelukt. Onder meer door industrieterreinen terug te geven aan de rivier.

Een groot deel van de huizen van Ammerstol klampt zich aan weerszijden vast aan de Lekdijk. Het is geen wonder dat dit stuk dijk nog versterkt moet worden. Dico van Ooijen van Rijkswaterstaat laat het met een glimlach zien. De hele Lekdijk tussen Lekkerkerk en Schoonhoven vormt een speeltuin voor technuten.



Het afgegraven industrieterrein bij Opperduit.

Standaardoplossingen zijn nergens aan de orde. Elk stukje moet met een frisse blik benaderd worden. Dat leidt tot creativiteit en tot nieuwe manieren van denken over dijkversterking.

De Lek is een relatief jonge rivier. Vroeger liep hier een kleinere rivier. De Rijn, die vroeger bij Katwijk in zee uitmondde, is in die oude bedding geleid en die is eigenlijk te krap voor een grote rivier. De uiterwaarden zijn overal smal. Bovendien zitten er nog tal van industriële bedrijven buitendijks, direct langs de rivier. Vroeger was dat namelijk een toplocatie, omdat het water de belangrijkste vervoersweg was. Tot slot zijn er tegen de dijken overal woningen gebouwd.

Dijk teruggelegd

Hoe vind je hier meer ruimte voor de rivier? In principe is dat op twee manieren mogelijk: de dijk terugleggen of de buitendijkse activiteiten naar elders verplaatsen.

Bij de locatie Lekdijk-West – tegenover Streefkerk – is de dijk teruggelegd. Dat ging niet zonder slag of stoot, vertelt Van Ooijen.



De westelijke Lekdijk, voordat deze meer landinwaarts is gelegd.