Modellering in het onderwijs

Kees Vuik en Marleen Keijzer

InterTU studiedag

TU Delft, Delft, Juni 24, 2016

Inhoud:

- Modelleren bij de TU Delft
- Observaties
- MOOC Modelleren
- Conclusies

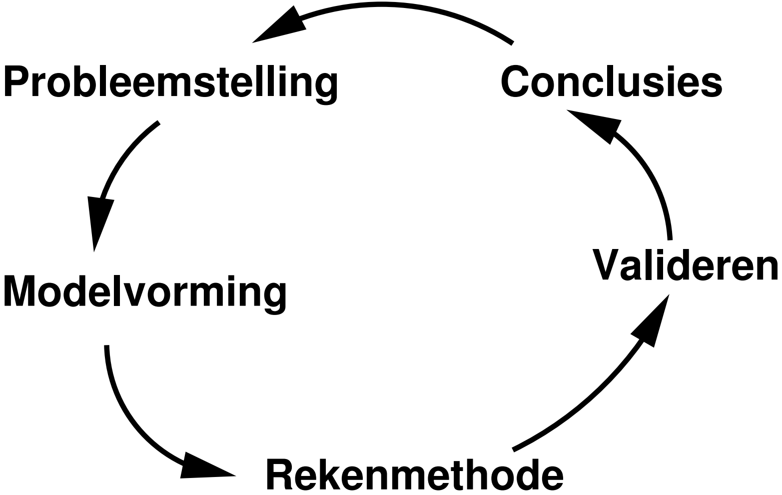
4TU.AMI Applied Mathematics Institute

Begeleiders

Dr. Neil Budko
Dr. Eva Coplakova
Dr. Jacob van der Woude
Dr.ir. Marleen Keijzer

Dr. Matthias Moller
Dr.ir. Dennis den Ouden
Dr. Paul Visser
Prof.dr.ir. Kees Vuik

Modelleercyclus



Leerdoelen van het practicum

Modelleren

- Cyclus doorlopen.

Leerdoelen van het practicum

Modelleren

- Cyclus doorlopen.
- Geen som maken, maar onderzoek doen.

Leerdoelen van het practicum

Modelleren

- Cyclus doorlopen.
- Geen som maken, maar onderzoek doen.
- Vaagheid? Vrijheid!

Leerdoelen van het practicum

Modelleren

- Cyclus doorlopen.
- Geen som maken, maar onderzoek doen.
- Vaagheid? Vrijheid!

Samenwerken

- Wiskundigen werken vaak in teams
- Nu groepjes studenten, door ons ingedeeld.

Leerdoelen van het practicum

Modelleren

- Cyclus doorlopen.
- Geen som maken, maar onderzoek doen.
- Vaagheid? Vrijheid!

Samenwerken

- Wiskundigen werken vaak in teams
- Nu groepjes studenten, door ons ingedeeld.

Verslaglegging

- Professioneel onderzoeksverslag
- Mondelinge communicatie

Dictaat: Handleiding Modelleren.

Programma

Week 1:	College differentiaalvergelijkingen, module Informatievaardigheden
Week 2:	College numeriek oplossen, Kennismaken met begeleider, opdracht Matlab-introductieopgave maken
Week 3-7:	Werken in practicumzaal, 23 februari Informatievaardigheden afronden
Week 7:	Maandag 21 maart eerste versie verslag inleveren Dinsdag 22 maart: (grove) feedback begeleider.
Week 8:	Maandag 29 maart verslag inleveren
daarna:	Bespreking met begeleider op afspraak

Regels

- Aanwezigheid verplicht.
  Bij ziekte afmelden bij begeleider.
- 3EC : 3 x 28 = 84 bestedingsuren
  Dinsdagmiddagen: 7 x 4 = 28 bestedingsuren
- Begeleiders helpen, studenten zijn verantwoordelijk voor het werk.
- Beide studenten zijn verantwoordelijk voor het hele verslag: samenwerken!

Practicum

Beoordeling

Door de begeleider op basis van het verslag.

- Kwaliteit en kwantiteit van het onderzoek.
- Kwaliteit van het verslag.

beoordelingscriteria:

- opgebouwde achtergrondkennis, probleemstelling, literatuur

- inzet/inbreng tijdens de besprekingen

- inzicht doorlopen modelleercyclus

- schriftelijke rapportage

College differentiaalvergelijkingen

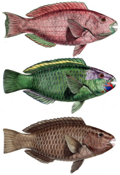
Voorkennis: uit Caleidoscoop:
J.L.A. Dubbeldam: *Gewone Differentiaalvergelijkingen* (Blackboard)

Vandaag: Inleiding differentiaalvergelijkingen
Niet: oplosmethoden.
Oplossen gaat numeriek: college volgende week.
Wel: terminologie en kwalitatief gedrag oplossingen.

Indeling:

- Eerste-orde differentiaalvergelijking
- Tweede-orde differentiaalvergelijking
- Twee stelsels eerste-orde differentiaalvergelijkingen

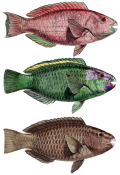
Vissen



Populatie vissen in een meer zonder vijanden

- $X(t)$: het aantal vissen (in honderdtallen)
- t: de tijd in maanden

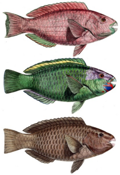
Vissen



Populatie vissen in een meer zonder vijanden

- $X(t)$: het aantal vissen (in honderdtallen)
- t: de tijd in maanden
- Per vis komt er per maand 1.5 jonge visjes bij
- Per vis gaat per maand 0.5 oude vis dood

Vissen

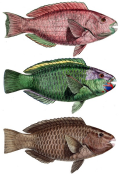


Populatie vissen in een meer zonder vijanden

- $X(t)$: het aantal vissen (in honderdtallen)
- t: de tijd in maanden
- Per vis komt er per maand 1.5 jonge visjes bij
- Per vis gaat per maand 0.5 oude vis dood

Balans opstellen:
Δt: lengte van een tijdsinterval

Vissen

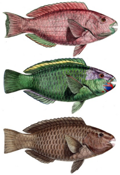


Populatie vissen in een meer zonder vijanden

- $X(t)$: het aantal vissen (in honderdtallen)
- t: de tijd in maanden
- Per vis komt er per maand 1.5 jonge visjes bij
- Per vis gaat per maand 0.5 oude vis dood

Balans opstellen:
Δt: lengte van een tijdsinterval
ΔX: de verandering van het aantal vissen X tijdens Δt

Vissen



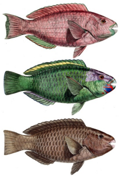
Populatie vissen in een meer zonder vijanden

- $X(t)$: het aantal vissen (in honderdtallen)
- t: de tijd in maanden
- Per vis komt er per maand 1.5 jonge visjes bij
- Per vis gaat per maand 0.5 oude vis dood

Balans opstellen:
Δt: lengte van een tijdsinterval
ΔX: de verandering van het aantal vissen X tijdens Δt

$$\Delta X \quad = \quad +1.5\ X\ \Delta t \quad -0.5\ X\ \Delta t.$$

Differentiaalvergelijking



Balans: $\Delta X \quad = \quad +1.5X\ \Delta t \quad -0.5X\ \Delta t.$

Deel door Δt ($\neq 0$): $\dfrac{\Delta X(t)}{\Delta t} = +1.5X - 0.5X.$

Differentiaalvergelijking



Balans: $\Delta X \quad = \quad +1.5X\ \Delta t \quad - 0.5X\ \Delta t.$

Deel door Δt ($\neq 0$): $\dfrac{\Delta X(t)}{\Delta t} = +1.5X - 0.5X.$

Neem limiet: $\displaystyle \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta X(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} 1.5X(t) - 0.5X(t).$

Differentiaalvergelijking



Balans: $\Delta X \quad = \quad +1.5X\ \Delta t \quad - 0.5X\ \Delta t.$

Deel door Δt $(\neq 0)$: $\frac{\Delta X(t)}{\Delta t} = +1.5X - 0.5X.$

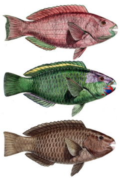
Neem limiet: $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta X(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} 1.5X(t) - 0.5X(t).$

De differentiaalvergelijking:

$$\frac{dX(t)}{dt} \quad = \quad 1.5X(t) \quad - 0.5X(t)$$

$$\boxed{X'(t) = X(t)}$$

Differentiaalvergelijking



Balans: $\Delta X \quad = \quad +1.5X\ \Delta t \quad - 0.5X\ \Delta t.$

Deel door Δt $(\neq 0)$: $\dfrac{\Delta X(t)}{\Delta t} = +1.5X - 0.5X.$

Neem limiet: $\displaystyle \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta X(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} 1.5X(t) - 0.5X(t).$

De differentiaalvergelijking:

$$\frac{dX(t)}{dt} \quad = \quad 1.5X(t) \quad - 0.5X(t)$$

$$\boxed{X'(t) = X(t)}$$

Beginvoorwaarde, bijvoorbeeld $\quad X(0) = 3.$

Oplossing:

Differentiaalvergelijking



Balans: $\Delta X \quad = \quad +1.5X\ \Delta t \quad - 0.5X\ \Delta t.$

Deel door Δt ($\neq 0$): $\dfrac{\Delta X(t)}{\Delta t} = +1.5X - 0.5X.$

Neem limiet: $\displaystyle \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta X(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} 1.5X(t) - 0.5X(t).$

De differentiaalvergelijking:

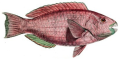
$$\frac{dX(t)}{dt} \quad = \quad 1.5X(t) \quad - 0.5X(t)$$

$$\boxed{X'(t) = X(t)}$$

Beginvoorwaarde, bijvoorbeeld $\quad X(0) = 3.$

Oplossing: $X(t) = 3e^t$.

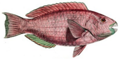
Populatie vissen



$$X'(t) = X(t) - \frac{X^2(t)}{12} - \frac{5}{3}.$$

Zonder oplossen, alvast wel wat over oplossingen te zeggen.

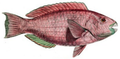
Populatie vissen



$$X'(t) = X(t) - \frac{X^2(t)}{12} - \frac{5}{3}.$$

Zonder oplossen, alvast wel wat over oplossingen te zeggen.
Evenwichtspunten: de X waarvoor $X' = 0$:

Populatie vissen



$$X'(t) = X(t) - \frac{X^2(t)}{12} - \frac{5}{3}.$$

Zonder oplossen, alvast wel wat over oplossingen te zeggen.
Evenwichtspunten: de X waarvoor $X' = 0$:

$$X' = -\frac{1}{12}(X^2 - 12X + 20) = 0$$

$$X' = -\frac{1}{12}(X - 10)(X - 2) = 0$$

Faselijn:

Populatie vissen

$$X'(t) \quad = \quad X(t) \quad - \quad \frac{X^2(t)}{12} \quad - \quad \frac{5}{3}.$$

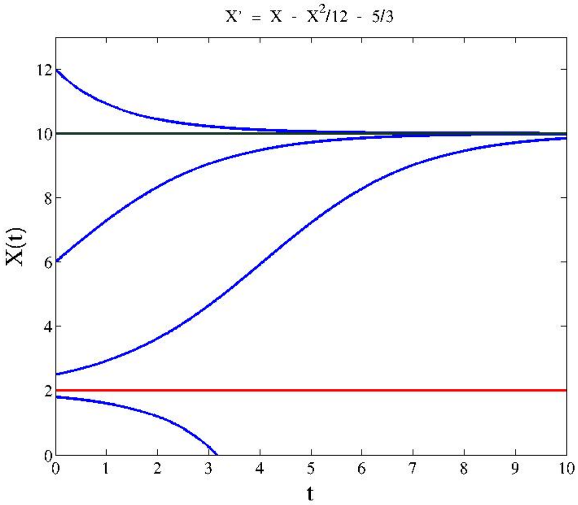
Zonder oplossen, alvast wel wat over oplossingen te zeggen.
Evenwichtspunten: de X waarvoor $X' = 0$:

$$X' = -\frac{1}{12}\,(X^2 - 12X + 20) = 0$$

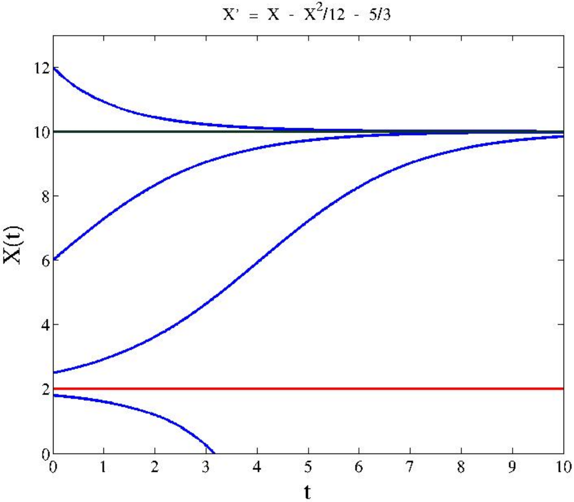
$$X' = -\frac{1}{12}\,(X-10)(X-2) = 0$$

Faselijn:

Populatie vissen



Populatie vissen



$X = 10$:
stabiel
evenwichtspunt

$X = 2$:
instabiel
evenwichtspunt

Stelsel eerste-orde dv's

Ander stelsel voor $x_1(t)$ en $x_2(t)$:

$$x_1' = 3x_1 - 2x_2$$
$$x_2' = 2x_1 - 2x_2$$

Stelsel eerste-orde dv's

Ander stelsel voor $x_1(t)$ en $x_2(t)$:

$$x_1' = 3x_1 - 2x_2$$
$$x_2' = 2x_1 - 2x_2$$

Evenwichtspunt: $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

Stelsel eerste-orde dv's

Ander stelsel voor $x_1(t)$ en $x_2(t)$:

$$x_1' = 3x_1 - 2x_2$$
$$x_2' = 2x_1 - 2x_2$$

Evenwichtspunt: $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Andere schrijfwijze:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Introduceer vector: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$:

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

Stelsel eerste-orde dv's

Ander stelsel voor $x_1(t)$ en $x_2(t)$:

$$\begin{aligned} x_1' &= 3x_1 - 2x_2 \\ x_2' &= 2x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

Evenwichtspunt: $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Andere schrijfwijze:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Introduceer vector: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$:

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

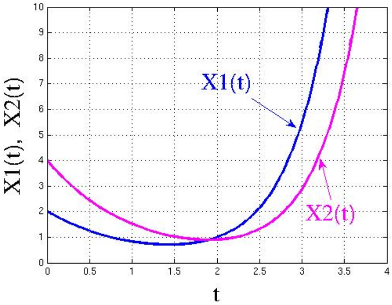
Oplossingen:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Stelsel eerste-orde dv's

Oplossingen:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}$$



Stelsel eerste-orde dv's, fasevlak

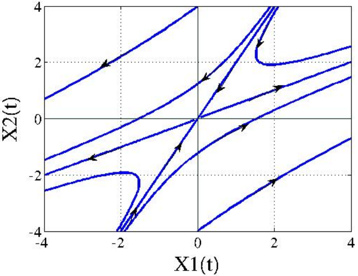
Oplossingen:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Stelsel eerste-orde dv's, fasevlak

Oplossingen:

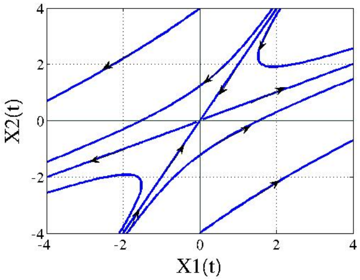
$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}$$



Stelsel eerste-orde dv's, fasevlak

Oplossingen:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

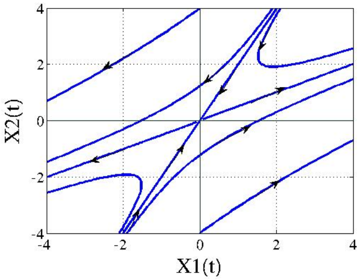


Het evenwichtspunt $(0,0)$ heet instabiel omdat uit elk schijfje om het evenwicht heen tenminste één oplossing 'wegloopt'.

Stelsel eerste-orde dv's, fasevlak

Oplossingen:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}$$



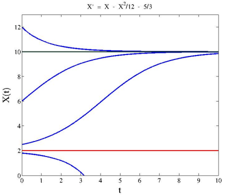
Het evenwichtspunt $(0,0)$ heet instabiel omdat uit elk schijfje om het evenwicht heen tenminste één oplossing 'wegloopt'.

Een evenwichtspunt heet stabiel als er een schijfje om het evenwicht heen is waar geen oplossing uit 'wegloopt'.

Samenvatting eerste college

Eerste-orde dv

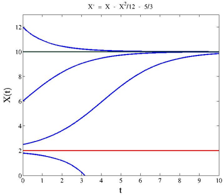
$$X' = X - \frac{X^2}{12} - \frac{5}{3}$$



Samenvatting eerste college

Eerste-orde dv

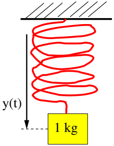
$$X' = X - \frac{X^2}{12} - \frac{5}{3}$$



Stelsel 1e-orde dv's:

$$y' = v$$

$$v' = -\frac{c}{M}\,y - \frac{\gamma}{M}v + g.$$



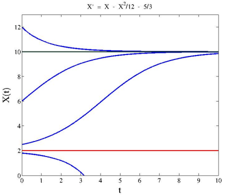
Een 2e-orde dv:

$$y'' + \frac{\gamma}{M}y' + \frac{c}{M}y = g.$$

Samenvatting eerste college

Eerste-orde dv

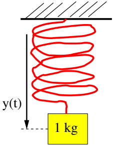
$$X' = X - \frac{X^2}{12} - \frac{5}{3}$$



Stelsel 1e-orde dv's:

$$y' = v$$

$$v' = -\frac{c}{M}\,y - \frac{\gamma}{M}v + g.$$



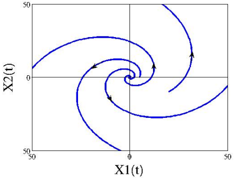
Een 2e-orde dv:

$$y'' + \frac{\gamma}{M}y' + \frac{c}{M}y = g.$$

Stelsels 1e-orde dv's

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

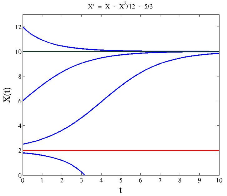
Fasevlakken, verschillende typen evenwichtspunten:



Samenvatting eerste college

Eerste-orde dv

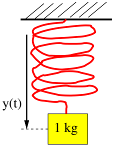
$$X' = X - \frac{X^2}{12} - \frac{5}{3}$$



Stelsel 1e-orde dv's:

$$y' = v$$

$$v' = -\frac{c}{M}\, y - \frac{\gamma}{M} v + g.$$



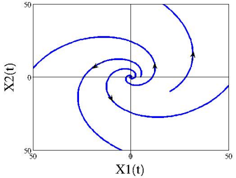
Een 2e-orde dv:

$$y'' + \frac{\gamma}{M} y' + \frac{c}{M} y = g.$$

Stelsels 1e-orde dv's

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

Fasevlakken, verschillende typen evenwichtspunten:



Volgende week:
numeriek oplossen van differentiaalvergelijkingen + inleiding Matlab

Observaties

- Studenten vinden de start vaak moeilijk
- Welk antwoord is goed?
- Kennisintegratie
- Vaak worden de studenten 'gegrepen' door het onderwerp (voorbeelden)

Observaties

- Studenten vinden de start vaak moeilijk
- Welk antwoord is goed?
- Kennisintegratie
- Vaak worden de studenten 'gegrepen' door het onderwerp (voorbeelden)
- Communicatie
- Samenstelling van de groepen
- Programmeertaal
- Latex

Observaties

- Studenten vinden de start vaak moeilijk
- Welk antwoord is goed?
- Kennisintegratie
- Vaak worden de studenten 'gegrepen' door het onderwerp (voorbeelden)
- Communicatie
- Samenstelling van de groepen
- Programmeertaal
- Latex
- Coach en opdrachtgever
- Plaats in het curriculum

MOOC: Basics of Mathematical Modelling

Team: Marleen Keijzer, Dennis den Ouden, Nelson Ribeiro Jorge, Joanna Daudt en Kees Vuik

Opzet: doelgroep, modules

Uitdaging: deelnemers aan het werk krijgen met de modelleercyclus

Uitdaging: deelnemers ondersteunen met theorie en voorbeelden bij het oefenen met modelleeropdrachten en toepassen modelleercyclus

Start: Juni 2017 zal de MOOC voor het eerst gebruikt worden

Conclusies

- Modelleren is voor de TU's een belangrijk onderdeel
- Modelleren is Life Long Learning
- Modelleren is een complex onderdeel
- Modelleren begeleiden is tijdsintensief
- Modelleren maakt gebruik van de meester-gezel relatie
- Meer info: http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi150/wi150.html

4TU.AMI Applied Mathematics Institute