Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Uitwerkingen toets wi2091: Numerieke methoden voor differentiaalvergelijkingen
woensdag 25 augustus 2004, 9:00-10:30

1. (a) We starten de afleiding door de uitdrukkingen in te vullen:

$$fl(x) - fl(y) = x(1+\varepsilon_1) - y(1+\varepsilon_2) = (x-y)(1 + \frac{x\varepsilon_1 - y\varepsilon_2}{x-y})$$

dus $\varepsilon_3 = \frac{x\varepsilon_1 - y\varepsilon_2}{x-y}$. Door het nemen van de absolute waarde volgt:

$$|\varepsilon_3| \leq |\frac{x+y}{x-y}|eps$$

.

(b) Bij het berekenen gebruiken we de volgende stappen: (635+0.99)-636 = 635.99 -636. Na afronden tot drie cijfers wordt dit: 636-636=0. De relatieve fout is dus gelijk aan 1. Voor het andere geval geldt: (635-636)+0.99 = -1+0.99 = 0.01. Hierbij behoeft niet afgerond te worden en de relatieve fout is 0. De eerste berekening bevat een grote fout door het afronden. Uit onderdeel (a) volgt dat de relatieve fout begrensd wordt door $\frac{x+y}{x-y}eps = |\frac{635.99+636}{635.99-636}|\frac{0.99}{635.99} = 98$

(c) Neem aan dat $p > q$, zodat $min\{p,q\} = q$. Per definitie geldt:

$$|f(x)| < k_f|x|^p, \text{ voor } |x| < \delta_f,$$

$$|g(x)| < k_g|x|^q, \text{ voor } |x| < \delta_g.$$

Combinatie van deze gegevens geeft:

$$|f(x) + 2g(x)| < k_f|x|^{(p-q)}|x|^q + 2k_g|x|^q, \text{ voor } |x| < \delta_{min} \equiv min\{\delta_f, \delta_g\}.$$

Omdat $p - q > 0$ geldt:

$$|f(x) + 2g(x)| < (k_f\delta_{min}^{(p-q)} + 2k_g)|x|^q, \text{ voor } |x| < \delta_{min},$$

waarmee de stelling bewezen is.

2. (a) Voor het bepalen van de eigenwaarden moet het volgende probleem opgelost worden: bepaal λ zo dat $\det(A - \lambda I) = 0$. Dit geeft

$$\begin{vmatrix} -a-\lambda & -1 \\ 1 & -a-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

zodat $(-a-\lambda)^2 + 1 = 0$, $-a-\lambda = \pm i$, $\lambda_{1,2} = -a \pm i$.

(b) De versterkingsfactor van Euler Forward is $Q(h\lambda) = 1 + h\lambda$. De methode is stabiel als $|Q(h\lambda_{1,2})| \leq 1$. Substitutie van λ_1 geeft:

$$|1 + h(-a+i)| \leq 1,$$

$$\sqrt{(1-ha)^2+h^2} \le 1,$$
$$1-2ha+h^2a^2+h^2 \le 1,$$
$$h^2(a^2+1) \le 2ha,$$
$$h \le \frac{2a}{a^2+1}.$$

Voor λ_2 gelden dezelfde ongelijkheden.

(c) De testvergelijking is $y' = \lambda y$. De versterkingsfactor is gedefinieerd als $w_{j+1} = Q(h\lambda)w_j$. Dit geeft:

$$w_{j+1} = w_j + \frac{h}{2}(\lambda w_j + \lambda w_{j+1}),$$
$$(1-\frac{h}{2}\lambda)w_{j+1} = (1+\frac{h}{2}\lambda)w_j,$$
$$w_{j+1} = \frac{1+\frac{h}{2}\lambda}{1-\frac{h}{2}\lambda}w_j,$$

dus $Q(h\lambda) = \frac{1+\frac{h}{2}\lambda}{1-\frac{h}{2}\lambda}$.

(d) We controleren eerst dat $|Q(h\lambda_1)| \le 1$.

$$|Q(h\lambda_1| = \frac{|1+\frac{h}{2}\lambda|}{|1-\frac{h}{2}\lambda|} = \frac{\sqrt{(1-\frac{h}{2}a)^2+\frac{h^2}{4}}}{\sqrt{(1+\frac{h}{2}a)^2+\frac{h^2}{4}}} \le 1.$$

De laatste ongelijkheid is geldig omdat $(1-\frac{h}{2}a)^2 < (1+\frac{h}{2}a)^2$.

(e) Merk op dat $\mathbf{w}_0 = \mathbf{u}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Eén stap Euler Forward geeft:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= \mathbf{w}_0 + h[A\mathbf{w}_0 + \mathbf{g}(0)] \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$