Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Uitwerkingen toets wi2604: Numerieke methoden I
maandag 29 augustus 2005, 9:00-10:30

1. (a) Kies $f(x) \equiv 1$ dan geldt $f'''(\xi) = 0$, dus $f(x) = p(x) \equiv 1$. Omdat

$$p(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2),$$

geldt:

$$p(x) = L_0(x) + L_1(x) + L_2(x) = f(x) = 1,$$

waarmee het gevraagde bewezen is.

(b) $L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$, $L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$ en $r(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{3!}$.

(c) Invullen van de gegevens levert:

$$|\hat{p}(x) - p(x)| = |L_0(x)\epsilon_0 + L_1(x)\epsilon_1 + L_2(x)\epsilon_2| \leq (|L_0(x)| + |L_1(x)| + |L_2(x)|)\epsilon.$$

Gebruik nu dat $x = x_0 + \alpha h$ met $\alpha \in [0, 2]$. Dan geldt

$$|\hat{p}(x) - p(x)| \leq (\frac{|(\alpha-1)(\alpha-2)|}{2} + |\alpha(\alpha-2)| + \frac{|\alpha(\alpha-1)|}{2})\epsilon.$$

Voor $\alpha \in [0, 1]$ geldt:

$$|\hat{p}(x) - p(x)| \leq (-\alpha^2 + \alpha + 1)\epsilon.$$

Het maximum wordt aangenomen voor $\alpha = \frac{1}{2}$ en is gelijk aan

$$|\hat{p}(x) - p(x)| \leq 1.25\epsilon.$$

Voor $\alpha \in [1, 2]$ gaat het bewijs analoog.

(d) **Afbreekfout**

Merk op dat $f'''(x) = -\cos(x)$. Omdat $0 \leq \xi \leq 1$ geldt $|f'''(\xi)| \leq 1$. Verder is $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$ en $x = 0.75$. Dit invullen geeft dat de afbreekfout kleiner is dan $\frac{1}{128} = 7.8 \cdot 10^{-3}$.

Afrondfout
De afrondfout van de getallen in de tabel is hoogstens 0.00005. Dus $\epsilon = 5 \cdot 10^{-5}$ zodat de afrondfout in de interpolatie kleiner is dan $6.25 \cdot 10^{-5}$.
Omdat de afbreekfout groter is dan de afrondfout heeft het geen zin om de getallen met meer cijfers te bepalen.

2. (a) De lokale afbreekfout is gedefinieerd door

$$\tau_{i+1} = \frac{y_{i+1} - z_{i+1}}{h},$$

waarbij z_{i+1} gegeven wordt door:

$$\begin{aligned} z^* &= y_i + \beta h f(t_i, y_i) \\ z_{i+1} &= z^* + (1-\beta) h f(t_i + \beta h, z^*). \end{aligned}$$

Invullen van z^* geeft:

$$z_{i+1} = y_i + \beta h f(t_i, y_i) + (1-\beta) h f(t_i + \beta h, y_i + \beta h f(t_i, y_i)).$$

Voor de laatste term maken we gebruik van de Taylorontwikkeling in beide variabelen:

$$f(t_i + \beta h, y_i + \beta h f(t_i, y_i)) = f(t_i, y_i) + \beta h (\frac{\partial f}{\partial t})_i + \beta h f(t_i, y_i)(\frac{\partial f}{\partial y})_i + O(h^2).$$

We kunnen dit ook schrijven als

$$f(t_i + \beta h, y_i + \beta h f(t_i, y_i)) = f(t_i, y_i) + \beta h [\frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial y}]_i + O(h^2).$$

Omdat $y'(t) = f(t, y)$ en $y''(t) = [\frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial y}](t, y)$ volgt:

$$f(t_i + \beta h, y_i + \beta h f(t_i, y_i)) = y_i' + \beta h y_i'' + O(h^2).$$

De Taylorontwikkeling van y_{i+1} is:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h y'(t_i) + \frac{h^2}{2} y''(t_i) + O(h^3).$$

Dit invullen in de definitie van de afbreekfout geeft:

$$\tau_{i+1} = (\frac{1}{2} - \beta(1-\beta)) h y_i'' + O(h^2).$$

Omdat $\frac{1}{2} - \beta(1-\beta) = (\beta - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$ geldt dat de coefficient voor $h y_i''$ altijd groter is dan nul. Hieruit volgt het gestelde in de opgave.

(b) De versterkings factor is: $Q(h\lambda) = 1 + h\lambda + \beta(1-\beta)(h\lambda)^2$

(c) Voor een niet-lineaire differentiaal vergelijking kunnen we de zelfde aanpak volgen als voor een lineaire differentiaal vergelijking. Dat betekent dat de methode stabiel is, als

$$|Q(h\lambda)| \leq 1, \text{ waarbij } \lambda = \frac{\partial f(t, y)}{\partial y}$$

Voor deze differentiaal vergelijking geldt:

$$\frac{\partial f(t, y)}{\partial y} = -3 - \sin(y).$$

Invullen van $y = \frac{\pi}{2}$ geeft $\lambda = -4$. Dit invullen in de versterkingsfactor met $h = 1$ geeft: $|Q(h\lambda)| = 1$, zodat de methode stabiel is voor deze gegevens.