Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Uitwerkingen toets wi2091: Numerieke methoden voor differentiaalvergelijkingen
maandag 18 augustus 2003, 13:30-15:00

1. (a) De lineaire spline bestaat uit stuksgewijs lineaire interpolatiepolynomen. Dat betekent dat we op het interval $[0, \frac{1}{2}]$ het polynoom nemen met de punten $x_0 = 0$ en $x_1 = \frac{1}{2}$, zodat $s(x) = x, x \in [0, \frac{1}{2}]$. Op het tweede interval $[\frac{1}{2}, 1]$ nemen we $x_0 = \frac{1}{2}$ en $x_1 = 1$, zodat $s(x) = 7x - 3, x \in [\frac{1}{2}, 1]$.

   (b) Voor de bovengrens gebruiken we de formule van de fout. Omdat $f''(x) = 24x$ geldt, dat $|f''(x)| \leq 12$ voor $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Verder geldt dat $|\frac{1}{2}(x - x_0)(x - x_1)| \leq \frac{1}{32}$. Hieruit volgt de bovengrens voor de fout: 0.375. De echte afbreekfout is 0.1875 en verschilt niet zo veel met de bovengrens.

   (c) De afrondfout
$$|\hat{s}(x) - s(x)| = |\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\hat{f}(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\hat{f}(x_1) - \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}f(x_0) - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}f(x_1)|$$
   is kleiner dan $\frac{|x-x_1|}{|x_0-x_1|}\varepsilon + \frac{|x-x_0|}{|x_1-x_0|}\varepsilon \leq \varepsilon$ als $x \in [x_0, x_1]$.

   (d) Ja door verkleining van de stapgrootte neemt de afbreekfout af en blijft de afrondfout (= 0.1) hetzelfde, zodat de totale fout zal afnemen. Echter het heeft geen zin om de stapgrootte veel kleiner te nemen, omdat de fout dan voornamelijk bepaald wordt door de afrondfout.

2. (a) De versterkingsfactor volgt uit de definitie: schrijf $w_{j+1} = Q(h\lambda)w_j$ voor de testvergelijking $y' = \lambda y$. Neem $f(t, y) = \lambda y$ en substitueer dit in de definitie van RK_4 dan volgt:
$$\begin{aligned}
k_1 &= h\lambda u_j \\
k_2 &= (h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2})u_j \\
k_3 &= (h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} + \frac{(h\lambda)^3}{4})u_j \\
k_4 &= (h\lambda + (h\lambda)^2 + \frac{(h\lambda)^3}{2} + \frac{(h\lambda)^4}{4})u_j \\
Q(h\lambda) &= 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} + \frac{(h\lambda)^3}{3!} + \frac{(h\lambda)^4}{4!}\ .
\end{aligned}$$

   (b) De definitie van de afbreekfout is:
$$\frac{y_{j+1} - \hat{w}_{j+1}}{h},$$
   waarbij $\hat{w}_{j+1}$ gelijk is aan één stap met de RK_4 methode toegepast op y_j. Dit geeft
$$\frac{y_{j+1} - \hat{w}_{j+1}}{h} = \frac{e^{h\lambda}y_j - Q(h\lambda)y_j}{h} = \frac{\frac{(h\lambda)^5}{5!} + ...}{h} = O(h^4).$$

(c) Door de keuze $x_1 = y$ en $x_2 = y'$ volgt:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = 1 - 4x_1 \end{cases}$$

De eigenwaarden van de matrix zijn: $\lambda_1 = 2i$ en $\lambda_2 = -2i$. Het stelsel is stabiel omdat het reele deel van de eigenwaarden gelijk aan nul is.

(d) Invullen van $h = 1$ en $\lambda_1 = 2i$ geeft:

$$Q(h\lambda_1) = \frac{-1 + 2i}{3}.$$

De modulus hiervan is kleiner dan 1, dus is de methode stabiel voor $h = 1$.