

Oefenopgaven Serie 1 (cursus 2001/2002)
wi2023: Numerieke Wiskunde¹

Behandelde begrippen

- Voorkennis: Taylor polynoom, numerieke integratie
- Methode van Euler, Heun, Runge-Kutta
- impliciet, expliciet, O -symbool
- lokale afbreekfout, efficiency

Opgaven

1. Laat zien dat de lokale afbreekfout van de methode van Heun $O(h^3)$ is voor de differentiaalvergelijking $y' = \lambda y$.
2. Gebruik de methode van Heun om de oplossing te benaderen van het volgende beginwaardeprobleem: $y' = 1 + (t - y)^2$, $2 \leq t \leq 3$, $y(2) = 1$, met $h = 0.5$. De exacte oplossing wordt gegeven door $y(t) = t + \frac{1}{1-t}$. Bepaal de fout in de numerieke benadering.
3. Beschouw het beginwaardeprobleem: $y' = -10y$, $0 \leq t \leq 2$, $y(0) = 1$. De oplossing hiervan is $y(t) = e^{-10t}$. Pas de methode van Euler toe met stapgrootte $h = 0.1$. Is het resultaat in tegenspraak met Stelling 1.1?
4. Beschouw het beginwaardeprobleem: $y' = y/x$, $1 \leq x \leq 2$, $y(1) = 1$. Voer 1 stap uit met de methode van Euler en Heun. Merk op dat de antwoorden hetzelfde zijn. Verklaring?
5. Voor het integreren van de differentiaalvergelijking $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ gebruikt men de trapeziumregel:

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}[f(x_i, u_i) + f(x_{i+1}, u_{i+1})]$$

Bepaal van deze methode de orde van de lokale afbreekfout door te vergelijken met de exacte oplossing:

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx$$

Hint: $f(x + h, y + k) = f(x, y) + h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} + O(h^2 + k^2)$
(Tentamen 18-08-1998)

¹informatie (oude tentamens etc.) over wi2023 is te vinden op het volgende internetadres:
<http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi212tn/wi212tn.html>