

Oefenopgaven Serie 2 (cursus 2001/2002)
wi2023: Numerieke Wiskunde¹

Behandelde begrippen

- stabiliteit, versterkingsfactor
- globale fout, schatting fout in de praktijk
- stelsels eerste orde beginwaardeproblemen, hogere orde beginwaardeproblemen
- stabiliteit voor stelsels, versterkingsmatrix

Opgaven

1. Geef de versterkingsfactor $C(\lambda h)$ voor de impliciete methode van Euler: $u_{i+1} = u_i + hf(x_{i+1}, u_{i+1})$. Laat zien dat deze methode onvoorwaardelijk stabiel is ($\lambda < 0$).
2. Gegeven het niet-lineaire beginwaardeprobleem: $y' = 1 + (t - y)^2$. Geef de stabiliteitsvoorwaarde voor de methode van Heun in het punt $t = 2$ en $y = 1$.
3. Beschouw de vergelijking $y' = -y$ met $y(0) = 1$. Bepaal de oplossing met de methode van Euler met stapgrootte $h = 1 : u_1$ en met $h = \frac{1}{2} : v_1, v_2$. De fout wordt gegeven door Kh . Geef een schatting voor K en bepaal hiermee een schatting voor de fout in v_2 . Bepaal ook de exacte fout in v_2 . Doe dit ook voor w_4 met $h = \frac{1}{4}$.
4. Voer één stap uit met de Euler methode met stapgrootte $h = 0.1$ voor het stelsel:

$$u_1' = -4u_1 - 2u_2 + e^t, \quad u_2' = 3u_1 + u_2,$$

met beginvoorwaarde $u_1(0) = 0$, en $u_2(0) = -1$. Voer één stap uit met de Euler methode met stapgrootte $h = 0.2$ voor het beginwaardeprobleem:

$$y''' + 2y'' - y' - 2y = e^t, y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 0.$$

5. Beschouw de stelsels:

$$u_1' = 3u_1 + 2u_2, \quad u_2' = 4u_1 + u_2 \quad \text{en} \quad u_1' = -4u_1 - 2u_2, \quad u_2' = 3u_1 + u_2$$

Welke van deze stelsels is stabiel. Bepaal voor het stabiele stelsel de grootste stapgrootte waarvoor de methode van Heun nog stabiel is.

6. Geef de versterkingsfactor $C(\lambda h)$ van de trapeziumregel:

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}[f(x_i, u_i) + f(x_{i+1}, u_{i+1})].$$

Laat zien dat de methode stabiel is voor alle $h > 0$, ook wanneer de eigenwaarden complex zijn ($\text{Re}(\lambda) < 0$).
(Tentamen 18-08-1998)

¹de antwoorden staan op het volgende internetadres: <http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi212tn/answer2.html>