

Oefenopgaven Serie 4 (cursus 2001/2002)
wi2023: Numerieke Wiskunde¹

Behandelde begrippen

- Crout methode, Choleski decompositie, positief definit, Gerschgorin
- conditie, eigenwaarden, vectornorm, conditiegetal
- randwaardeprobleem, differentiemethode, globale fout

Opgaven

1. Gegeven

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

en

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de matrices L en U zodanig dat $LU = A$ (hint: gebruik de Crout methode).

2. Gegeven een tridiagonale matrix, dat wil zeggen dat alleen de elementen $a_{i,i-1}$, $a_{i,i}$, $a_{i,i+1}$ ongelijk aan nul zijn. Laat met behulp van de methode van Crout zien dat de LU ontbinding gegeven wordt door: $u_{1,1} = a_{1,1}$, $u_{i,i+1} = a_{i,i+1}$, $l_{i,i-1} = a_{i,i-1}/u_{i-1,i-1}$ en $u_{i,i} = a_{i,i} - l_{i,i-1}u_{i-1,i}$. (Dit algoritme staat ook bekend als het Thomas algoritme)
3. Bepaal voor welke α onderstaande matrix positief definit is

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Gegeven $A = \begin{pmatrix} 500 & 501 \\ 501 & 500 \end{pmatrix}$. Bepaal $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Verwacht u op grond van deze resultaten een groot (> 100) of klein (< 100) conditiegetal? Bepaal het conditiegetal.

5. Gegeven de differentiaalvergelijking

$$-\frac{d^2y}{dx^2} + \gamma y = 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \text{met als randvoorwaarden } y(0) = y(1) = 1.$$

- (a) Bepaal het stelsel $Au = b$ voor $N=4$, waaraan de numerieke oplossing moet voldoen.
- (b) Laat zien dat de lokale afbreekfout $O(h^2)$ is.
- (c) Voor $\gamma = 0$ is gegeven dat A een Choleski ontbinding heeft. Laat zien dat A met $\gamma > 0$ positief definit is.

¹voor de antwoorden zie: <http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi212tn/answer4.html>