

Oefenopgaven Serie 6 (cursus 2001/2002)
wi2023: Numerieke Wiskunde¹

Behandelde begrippen

- eigenwaarden, powermethode, convergentie, stopcriterium
- Hotelling deflatie, vectordeflatie, inverse iteratie, bandmatrices
- gegeneraliseerde eigenwaarden

Opgaven (oefeningen dictaat blz. 106, 109 en 113)

1. Doe drie iteraties met de Power methode op de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ met startvector: } \mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Veronderstel dat de $n \times n$ matrix A eigenwaarden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ heeft, waarbij $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$, en er zijn n onafhankelijke eigenvectoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$.

(a) Laat zien dat als de Powermethode toegepast wordt op de startvector $\mathbf{x}^{(0)} = \beta_2 \mathbf{v}_2 + \dots \beta_n \mathbf{v}_n$, dat de benaderingen convergeren naar λ_2 .

(b) Laat zien dat voor elke vector $\mathbf{x}$ geldt dat $\mathbf{x}^{(0)} = (A - \lambda_1 I)\mathbf{x}$ geen component in $\mathbf{v}_1$ heeft.

3. In hoofdstuk 1 is aangegeven hoe een hogere-orde beginwaardeprobleem geschreven kan worden als een stelsel eerste-orde vergelijkingen. Voor het stabiel integreren van dit stelsel met de methode van Euler is het nodig om de grootste negatieve eigenwaarde te schatten. Schrijf $y''' + 8y'' + 19y' + 12y = 0$ als een stelsel en schat de grootste negatieve eigenwaarde door een aantal stappen met de Powermethode uit te voeren.

4. Bij onderzoek naar het aantal inwoners van de randstad is het volgende migratiepatroon geconstateerd: per jaar verhuizen ongeveer 10 % van de Nederlandse inwoners buiten de randstad (y) naar de randstad, terwijl 20 % van de randstadinwoners (z) naar elders verhuizen. We kunnen deze relatie als volgt noteren:

$$\begin{pmatrix} y^{(i+1)} \\ z^{(i+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{(i)} \\ z^{(i)} \end{pmatrix}.$$

Laat zien dat voor elke beginsituatie na verloop van tijd 1/3 van de bevolking in de randstad woont.

¹voor de antwoorden zie: <http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi212tn/answer6.html>