

Uitwerkingen tentamen Numerieke Analyse C1 (wi2021TU, wi2023TN)
Donderdag 13 juni 2002, 14:00-17:00

1. (a) Beschouw de exacte oplossing op x_{n+1} en ontwikkel in een Taylor polynoom:

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{1}{2}h^2y''_n + O(h^3) \quad (1)$$

en vergelijk dit met de numerieke oplossing met exacte gegevens op x_n en x_{n-1} :

$$u_{n+1} = y_n + h[\alpha f(x_n, y_n) + \beta f(x_{n-1}, y_{n-1})] \quad (2)$$

Wegens de DV gaat dit over in:

$$u_{n+1} = y_n + h(\alpha y'_n + \beta y'_{n-1}) \quad (3)$$

en de laatste term tussen haakjes kan ook weer ontwikkeld worden in een Taylorpolynoom:

$$y'_{n-1} = y'_n - hy''_n + O(h^2) \quad (4)$$

Dit gesubstitueerd in (3) geeft

$$u_{n+1} = y_n + (\alpha + \beta)hy'_n - \beta h^2y''_n + O(h^3) \quad (5)$$

Voor een fout van de orde $O(h^2)$ moeten de eerste twee termen van deze ontwikkeling overeenkomen met die van de exacte oplossing, dus $\alpha + \beta = 1$.

- (b) Voor een fout van de orde $O(h^3)$ moet ook de derde term nog overeenkomen, dus $\beta = -\frac{1}{2}$.
(c) De methode toegepast op de testvergelijking geeft:

$$u_{n+1} = u_n + h\left\{\frac{3}{2}\lambda u_n - \frac{1}{2}\lambda u_{n-1}\right\} \quad (6)$$

Wegens $u_n = C(h\lambda)u_{n-1}$ en $u_{n+1} = C(h\lambda)u_n = C(h\lambda)^2u_{n-1}$ geldt dus

$$\{C(h\lambda)\}^2 - (1 + \frac{3}{2}h\lambda)C(h\lambda) + \frac{1}{2}h\lambda\}u_{n-1} = 0 \quad (7)$$

voor elke waarde van n . Hieruit volgt het gestelde. Deze vergelijking heeft twee wortels:

$$C_1(h\lambda) = \frac{1 + \frac{3}{2}h\lambda + \sqrt{1 + h\lambda + (\frac{3}{2}h\lambda)^2}}{2} \quad (8)$$

$$C_2(h\lambda) = \frac{1 + \frac{3}{2}h\lambda - \sqrt{1 + h\lambda + (\frac{3}{2}h\lambda)^2}}{2}$$

De vorm onder het wortelteken is altijd positief, dus deze uitdrukkingen zijn reëel. Klaarblijkelijk geldt $C_2(h\lambda) < C_1(h\lambda)$ en moeten beide voldoen aan $-1 < C(h\lambda) < 1$. Er moet dus gelden: $-1 < C_2(h\lambda)$ en $C_1(h\lambda) < 1$. De tweede ongelijkheid geeft:

$$\sqrt{1 + h\lambda + (\frac{3}{2}h\lambda)^2} < 1 - \frac{3}{2}h\lambda \quad (9)$$

$$1 + h\lambda + (\frac{3}{2}h\lambda)^2 < 1 - 3(\frac{3}{2}h\lambda)^2 \quad (10)$$

$$0 < -4h\lambda \quad (11)$$

Omdat $\lambda < 0$ is hier altijd aan voldaan. De eerste ongelijkheid geeft:

$$-3 - \frac{3}{2}h\lambda < -\sqrt{1 + h\lambda + (\frac{3}{2}h\lambda)^2} \quad (12)$$

$$3 + \frac{3}{2}h\lambda > \sqrt{1 + h\lambda + (\frac{3}{2}h\lambda)^2} \quad (13)$$

$$9 + 9h\lambda + (\frac{3}{2}h\lambda)^2 > 1 + h\lambda + (\frac{3}{2}h\lambda)^2 \quad (14)$$

$$8 + 8h\lambda > 0 \quad (15)$$

$$h < \frac{1}{\|\lambda\|} \quad (16)$$

- (d) De gedane keuze van α en β geven een locale afbreekfout van $O(h^3)$ en zouden bij exacte begingegevens een globale fout geven van $O(h^2)$. In dit geval wordt er een beginfout gemaakt van $O(h^2)$ en omdat aan het stabiliteitscriterium voldaan is neemt de invloed hiervan niet toe. De globale fout is dus $O(h^2) + O(h^2) = O(h^2)$.

2. (a)

$$\begin{aligned} \|A(\xi + \Delta\xi) - b\|^2 &= (A\xi + A\Delta\xi - b, A\xi + A\Delta\xi - b) \\ &= (A\xi - b, A\xi - b) + (A\Delta\xi, A\xi - b) + \\ &\quad + (A\xi - b, A\Delta\xi) + (A\Delta\xi, A\Delta\xi) \\ &= \|A\xi - b\|^2 + \|A\Delta\xi\|^2 + 2(A\Delta\xi, A\xi - b) \end{aligned}$$

(b) Stel $x = \xi + \Delta\xi$, dan is

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|^2 &= \|A\xi - b\|^2 + \|A\Delta\xi\|^2 + 2(A\Delta\xi, A\xi - b) \\ &= \|A\xi - b\|^2 + \|A\Delta\xi\|^2 + 2(\Delta\xi, A^T(A\xi - b)) \end{aligned}$$

Uit het gegeven $A^T A\xi = A^T b$ volgt, dat de laatste term gelijk aan nul is. Derhalve geldt:

$$\|Ax - b\|^2 = \|A\xi - b\|^2 + \|A\Delta\xi\|^2$$

ofwel $\|A\xi - b\|^2 \leq \|Ax - b\|^2$ en dus ook $\|A\xi - b\| \leq \|Ax - b\|$. Daar x een willekeurige vector is minimaliseert ξ (de oplossing van $A^T A\xi = A^T b$ de kwadraten som van de residuen.

- (c) Vat de tabel van meetwaarden op als de getransponeerde van een 8×4 matrix A . Gevraagd wordt de oplossing van het stelsel:

$$A^T A \alpha = A^T e$$

met $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)^T$ en $e = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$. Dit stelsel blijkt de volgende vorm te hebben:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & b \\ b & a & b & c \\ c & b & a & b \\ b & c & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ d \\ d \\ d \end{pmatrix}$$

met $a = \frac{50}{18}$, $b = \frac{35}{18}$, $c = \frac{24}{18}$ en $d = 4$. Aangezien het probleem volledig symmetrisch is in alle α_i constateren we, dat alle α_i gelijk aan elkaar zijn, dus $\alpha_i = \frac{d}{a+2b+c} = \frac{1}{2}$

- (d) Indien de elementen 1 worden vervangen door $1 - \delta$ wordt (afgezien van hogere orde effecten)

$$\begin{aligned} \Delta a &= -4\delta \\ \Delta b &= -\frac{10}{6}\delta \\ \Delta c &= -\frac{4}{6}\delta \\ \Delta d &= -2\delta \end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= 2.7378 \\ \tilde{b} &= 1.9278 \\ \tilde{c} &= 1.3267 \\ \tilde{d} &= 3.98 \end{aligned}$$

en $\tilde{\alpha}_i = 0.5025$