TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU en CTB2400)
donderdag 3 juli 2014, 18:30-21:30

1. We beschouwen de volgende methode voor de integratie van het beginwaardeprobleem $y' = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$

$$\begin{cases} w^*_{n+1} = w_n + hf(t_n, w_n) \\ \\ w_{n+1} = w_n + h\left(a_1 f(t_n, w_n) + a_2 f(t_{n+1}, w^*_{n+1})\right) \end{cases} \tag{1}$$

a Toon aan dat de locale afbreekfout van de bovenstaande methode van de orde $O(h)$ is als $a_1 + a_2 = 1$. Voor welke waarde van a_1 en a_2 is de locale afbreekfout van de orde $O(h^2)$? (3 pt.)

b Laat zien dat de versterkingsfactor voor algemene a_1 en a_2 gegeven wordt door

$$Q(h\lambda) = 1 + (a_1 + a_2)h\lambda + a_2(h\lambda)^2. \tag{2}$$

(2 pt.)

c Beschouw $\lambda < 0$ en $(a_1 + a_2)^2 - 8a_2 < 0$, leid de stabiliteitsvoorwaarde af waar h aan moet voldoen. (2 pt.)

d Beschouw het volgende stelsel

$$\begin{cases} y_1' = -2y_1 - y_1 y_2, \\ y_2' = 2y_1 y_2 - y_2^2, \end{cases} \tag{3}$$

Laat zien dat de Jacobiaan van het rechterlid (die gebruikt wordt voor linearisatie van het stelsel) voor beginvoorwaarde $y_1(0) = 2$ en $y_2(0) = 2$ gegeven wordt door

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1.5 pt.)

e Beschouw nu de numerieke methode in vergelijking (1) voor het geval dat $a_1 = a_2 = 1/2$ toegepast op stelsel (3). Is de methode stabiel rond de beginvoorwaarde $y_1(0) = 2$ en $y_2(0) = 2$ en stapgrootte $h = \frac{1}{2}$ (+ motivatie)? (1.5 pt.)

[0]**voor vervolg z.o.z. Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie: http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html**

2. We beschouwen het volgende randwaardeprobleem:

$$\begin{cases} -\frac{d^2y(x)}{dx^2} + y(x) = 2e^x, & x \in (0,1), \\ \\ y(0) = 2, & y'(1) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

a Laat zien dat

$$y(x) = e^x(2-x)$$

de oplossing is van randwaardeprobleem (4). (1 pt.)

We gebruiken een eindige differentiemethode om de oplossing van bovenstaand randwaardeprobleem te benaderen. Laat de gridpunten gegeven worden door $x_j = jh$, met h als stapgrootte. Laat $x_n = nh = 1$.

b Geef een eindige differentieschema (+ bewijs) waarvan de locale afbreekfout van $O(h^2)$ is. *Hint:* Gebruik een virtueel roosterpunt voor de randvoorwaarde op $x = 1$. De discretisatiematrix moet symmetrisch zijn. (3pt.)

c Geef het lineaire stelsel vergelijkingen $A\mathbf{w} = \mathbf{b}$ dat verkregen wordt na eindige differentie discretisatie met drie (na verwerking van het virtuele gridpunt) onbekenden ($h = 1/3$). (2pt.)

d Geef antwoord op de volgende vragen **zonder** de numerieke oplossing uit te rekenen! De numerieke oplossing heet in het Engels *nodally exact* als

$$e_j = w_j - y(x_j) = 0 \quad \text{voor alle } j.$$

Kan de numerieke oplossing $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ die met het eindige differentieschema van orde twee wordt berekend *nodally exact* zijn? Kan er een eindige differentieschema van hogere orde zijn zodat de numerieke oplossing *nodally exact* wordt? (1pt.)

We beschouwen de trapeziumregel voor numerieke integratie.

e Geef het lineaire interpolatiepolynoom $p_1(x)$ van Lagrange met steunpunten a en b en leid met behulp van $p_1(x)$ de trapeziumregel om $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ te benaderen af. (1.5pt.)

f Leid af dat de afbreekfout van de enkelvoudige trapeziumregel over het interval $[a,b]$ gegeven is door

$$\frac{1}{12}(b-a)^3 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|, \tag{5}$$

indien de tweede orde afgeleide van f continu is op $[a,b]$. *Hint:* De fout voor lineaire interpolatie over steunpunten a en b wordt gegeven door

$$f(x) - p_1(x) = \frac{1}{2}(x-a)(x-b)f''(\chi), \text{ voor zekere } \chi \in (a,b).$$

(1.5pt.)