TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
FACULTEIT ELEKTROTECHNIEK, WISKUNDE EN INFORMATICA

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (CTB2400 WI3097 TU)
Donderdag 30 Juni 2016, 18:30-21:30

1. (a) De **vierde orde Runge-Kutta methode** (RK_4) voor de differentiaalvergelijking $y' = f(t, y)$ wordt gegeven door de volgende formules:

$$\begin{aligned} k_1 &= \Delta t f(t_n, w_n) \\ k_2 &= \Delta t f(t_n + \tfrac{1}{2}\Delta t, w_n + \tfrac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= \Delta t f(t_n + \tfrac{1}{2}\Delta t, w_n + \tfrac{1}{2}k_2) \\ k_4 &= \Delta t f(t_n + \Delta t, w_n + k_3) \end{aligned}$$

$$w_{n+1} = w_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Bepaal de versterkingsfactor $Q(\lambda\Delta t)$ van RK_4 door de methode toe te passen op de *homogene testvergelijking* $y' = \lambda y$. (2 pt.)

(b) Gebruik het feit dat $y(t_{n+1}) = e^{\lambda\Delta t}y(t_n)$ geldt voor de exacte oplossing van $y' = \lambda y$ om te laten zien dat RK_4 toegepast op de *homogene testvergelijking* een lokale afbreekfout heeft van $\mathrm{O}(\Delta t^4)$. (Hint: $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ...$) (2 pt.)

In de volgende onderdelen mag je aannemen dat dit resultaat ook geldt voor stelsels, zodat de globale fout van RK_4 toegepast op (1) gelijk is aan $\mathrm{O}(\Delta t^4)$.

We beschouwen het volgende **tweede orde beginwaarde probleem**:

$$y'' + py' + qy = \sin t, \quad y(0) = y_0,\ y'(0) = y'_0. \tag{1}$$

(c) Schrijf (1) als een stelsel eerste orde differentiaalvergelijkingen van het type

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g}(t).$$

Geef $\mathbf{A}$ en $\mathbf{g}$ en bepaal de eigenwaarden van $\mathbf{A}$, voor willekeurige p en q. (2 pt.)

(d) We nemen nu p=1000 en q=250001. Geef een benadering van de stabiliteitsvoorwaarde voor dit geval.

Hint: gebruik het figuur van het stabiliteitsgebied van RK_4 op pagina 3. (2 pt.)

(e) Stel dat je een keuze moet maken tussen de Trapeziumregel en RK_4 om het probleem gegeven in (d) op te lossen. Motiveer je keuze zo goed mogelijk. Hierbij moeten aan de orde komen: de stabiliteitsvoorwaarde en de orde van grootte van de globale fout. (2 pt.)

voor vervolg z.o.z.

2. Vervolgens willen we de **integraal** $\int_0^1 y(x)dx$ met $y(x) = x^2$ **numeriek benaderen**.

   (a) Geef de *Rechthoekregel* I^R. Geef ook de bijbehorende *samengestelde integratieregels* $I^R(h)$. Benader de integraal $\int_0^1 y(x)dx$ met behulp van de samengestelde Rechtshoekregel, met $h = 1/3$. (1 pt.)

   (b) Herhal deel (a) met de *Trapeziumregel* (I^T en $I^T(h)$), met $h = 1/3$. (1 pt.)

   (c) Stel dat men $\int_0^1 y(x)dx$ benadert, dan is de grootte van de fout van de *samengestelde regels* (ε_R en ε_T voor de Rechthoek- en Trapeziumregel, respectievelijk) begrensd door

$$\varepsilon_R \leq \frac{h}{2} \max_{x\in[0,1]} |y'(x)|, \quad \varepsilon_T \leq \frac{h^2}{12} \max_{x\in[0,1]} |y''(x)|. \tag{2}$$

   Welke methode verdient de voorkeur als het aantal integratiepunten groot is? Motiveer uw voorkeur. (2 pt.)

3. Vervolgens leiden we de **Newton-Raphson methode** af en gebruiken we deze om een niet lineair probleem op te lossen.

   (a) Gegeven is het *scalaire* niet lineaire probleem:

$$\text{Bepaal } p \in \mathbb{R} \text{ zodat } f(p) = 0. \tag{3}$$

   Leid de formule van Newton-Raphson

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}, \text{ voor } n \geq 1 \tag{4}$$

   met beginschatting p_0 af om het probleem op te lossen. (2 pt.)

   (b) Om te laten zien dat de Newton-Raphson methode convergeert, schrijven we de methode als een vaste punt methode:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \tag{5}$$

   Eén van de eisen van het convergentiebewijs is dat $g'(x)$ bestaat en voldoet aan:

$$|g'(x)| \leq k < 1. \tag{6}$$

   Laat zien dat de Newton-Raphson methode toegepast op $f(x) = \sin(x)$ naar de oplossing $p = 0$ convergeert als de beginschatting p_0 gekozen wordt in het interval $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. (1 pt.)

   (c) Leid Newton-Raphson's methode voor het volgende *algemeene* niet lineare problem af:

$$\text{Bepaal } \mathbf{p} \in \mathbb{R}^m \text{ zodat } \mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}. \tag{7}$$

   (1 pt.)

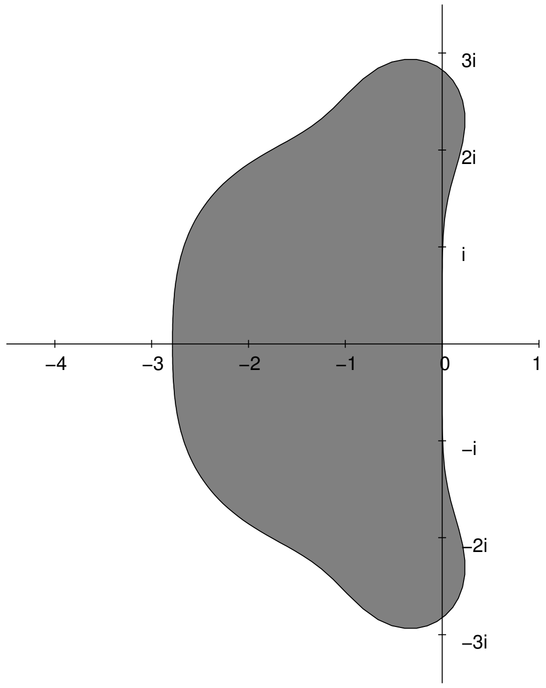
   (d) Voer **één** Newton-Raphson stap uit op het volgende niet lineaire problem voor w_1 en w_2:

$$\begin{cases} 18w_1 - 9w_2 + w_1^2 = 0, \\ -9w_1 + 18w_2 + w_2^2 = 9. \end{cases} \tag{8}$$

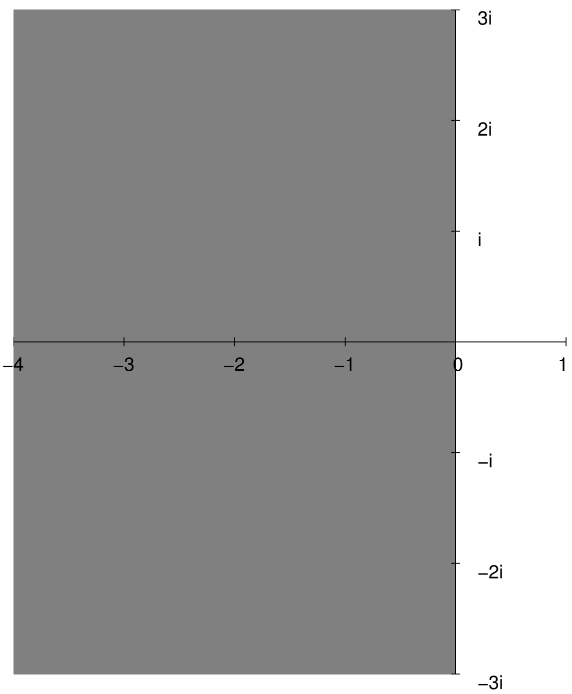
   Gebruik $w_1 = w_2 = 0$ als de beginschatting. (2 pt.)

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html

Lijst van figuren



Figuur 1: Stabiliteitsgebied voor RK_4



Figuur 2: Stabiliteitsgebied voor de Trapeziumregel