TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
FACULTEIT ELEKTROTECHNIEK, WISKUNDE EN INFORMATICA

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU/Minor AESB2210)
Donderdag 1 Februari 2018, 18:30-21:30

Antwoorden Alle antwoorden moeten argumenten en/of berekeningen bevatten. Antwoorden zonder argumenten of berekeningen geven geen punten.

Hulpmiddelen Alleen een niet-grafische rekenmachine is toegestaan. Alle andere hulpmiddelen zijn verboden.

Assessment In totaal kunnen 20 punten verdiend worden. Het onafgeronde eindcijfer is gegeven door $P/20$, waarin P het aantal behaalde punten is.

1. Een methode om het beginwaardeprobleem gedefinieerd door $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$, te integreren is gegeven door

$$\begin{cases} k_1 &= \Delta t\, f\left(t_n, w_n\right) \\ k_2 &= \Delta t\, f\left(t_n + \frac{1}{2}\Delta t, w_n + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 &= \Delta t\, f\left(t_n + \Delta t, w_n - k_1 + 2k_2\right) \\ w_{n+1} &= w_n + (\alpha k_1 + \beta k_2 + \gamma k_3) \end{cases} \tag{1}$$

waarin Δt de tijdstap is en w_n de numerieke oplossing op tijd t_n is.

(a) De *versterkingsfactor* van deze methode is gegeven door

$$Q(\lambda\Delta t) = 1 + (\alpha + \beta + \gamma)\,\lambda\Delta t + \left(\frac{\beta}{2} + \gamma\right)(\lambda\Delta t)^2 + \gamma\,(\lambda\Delta t)^3 .$$

Leid deze versterkingsfactor af voor de gegeven methode. ($2\frac{1}{2}$ pt.)

(b) Laat zien dat de *lokale afbreekfout* van de gegeven methode voor de testvergelijking $y' = \lambda y$ van orde $\mathcal{O}(\Delta t^3)$ *alleen* voor $\alpha = \gamma = \frac{1}{6}$ en $\beta = \frac{2}{3}$. ($2\frac{1}{2}$ pt.)

(c) Gegeven is het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{1}{2}y = t, \\ \\ y(0) = 1, \quad \dfrac{dy}{dt}(0) = 1. \end{cases} \tag{2}$$

Laat zien dat dit probleem geschreven kan worden als

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Geef ook de beginvoorwaarden voor $x_1(0)$ en $x_2(0)$. ($1\frac{1}{2}$ pt.)

(d) Neem $\alpha = \gamma = \frac{1}{6}$ en $\beta = \frac{2}{3}$.
Is de gegeven method toegepast op dit beginwaardeprobleem stabiel voor $\Delta t = 2$? ($1\frac{1}{2}$ pt.)

(e) Voer *één stap* uit met de gegeven method met $\Delta t = 2$, $t_0 = 0$, $\alpha = \gamma = \frac{1}{6}$ en $\beta = \frac{2}{3}$ voor het beginwaardeprobleem en de gegeven beginwaarden uit (2). (2 pt.)

voor vervolg z.o.z.

2. Van een roeiboot wordt de snelheid geschat. De gemeten afstanden van de boot vanaf de startlijn staan in de onderstaande tabel.

t (s)	0	10	20
$d(t)$ (m)	0	40	100

   (a) Geef de 1^e orde achterwaartse differentieformule en bepaal hiermee een schatting van de snelheid op $t = 20$ ($d'(20)$). (1 pt.)

   (b) We zoeken een differentieformule voor de eerste afgeleide van d in het punt $2h$ van de vorm:

$$Q(h) = \frac{\alpha_0}{h}d(0) + \frac{\alpha_1}{h}d(h) + \frac{\alpha_2}{h}d(2h),$$

   zodat

$$d'(2h) - Q(h) = O(h^2).$$

   In de rest van de opgave werken we verder met deze formule. Laat zien dat de coefficienten α_0, α_1 en α_2 moeten voldoen aan het volgende stelsel:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \frac{\alpha_0}{h} & + & \frac{\alpha_1}{h} & + & \frac{\alpha_2}{h} & = & 0\ , \\ -2\alpha_0 & - & \alpha_1 & & & = & 1\ , \\ 2\alpha_0 h & + & \frac{1}{2}\alpha_1 h & & & = & 0\ . \end{array}$$

   (2 pt.)

   (c) De oplossing van dit stelsel wordt gegeven door $\alpha_0 = \frac{1}{2}$, $\alpha_1 = -2$ en $\alpha_2 = \frac{3}{2}$. Geef voor deze waarden een uitdrukking voor de afbreekfout $d'(2h) - Q(h)$. (1 pt.)

   (d) Gebruik $\alpha_0 = \frac{1}{2}$, $\alpha_1 = -2$ en $\alpha_2 = \frac{3}{2}$ in $Q(h)$ en geef opnieuw een schatting van de snelheid op $t = 20$. (1 pt.)

3. We leiden de Newton–Raphson methode af en gebruiken deze om een niet-lineair probleem op te lossen.

   (a) Gegeven het scalaire niet-lineaire probleem:

$$\text{Bepaal } p \in \mathbb{R} \text{ zo dat } f(p) = 0. \tag{4}$$

   Leid de formule van Newton–Raphson,

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} - \frac{f(y^{(k)})}{f'(y^{(k)})}, \tag{5}$$

   af om het probleem op te lossen. Leg de methode ook uit aan de hand van een figuur. (2pt.)

   (b) Gegeven het niet-lineaire probleem: Bepaal $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ zo dat $\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$, waarbij $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$. Geef de Newton–Raphson formule voor dit probleem. (1pt.)

   (c) Voer één Newton–Raphson stap uit op het volgende stelsel voor p_1 en p_2:

$$\begin{cases} 18p_1 - 9p_2 + p_1^2 = 0, \\ -9p_1 + 18p_2 + p_2^2 = 9. \end{cases} \tag{6}$$

   Gebruik $p_1 = p_2 = 0$ als de beginschatting. (2pt.)

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html