TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Verantwoordelijk examinator: C. Vuik
Reviewer tentamen: D. den Ouden-van der Horst

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN
(CTB2400)
Dinsdag 18 Juli 2023, 13:30-16:30

Aantal vragen: Dit is een tentamen met 11 open vragen, onderverdeeld in 3 hoofdvragen.
Antwoorden: Alle antwoorden moeten beargumenteerd worden en/of berekeningen bevatten. Antwoorden zonder argumenten of berekeningen leveren geen punten op.
Hulpmiddelen: Alleen een niet-grafische, niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan. Alle andere elektronische hulpmiddelen zijn niet toegestaan.
Beoordeling: In totaal kunnen 20 punten verdiend worden. Het onafgeronde eindcijfer is gegeven door $P/2$, waarin P het aantal behaalde punten is.

1. Voor het beginwaardeprobleem $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$, gebruiken we de integratiemethode

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, w_n) \\ k_2 = f(t_{n+1}, w_n + \Delta t k_1) \\ w_{n+1} = w_n + \dfrac{\Delta t}{2}(k_1 + k_2), \end{cases} \tag{1}$$

waarin Δt de tijdstap en w_n de numerieke oplossing op tijdstip t_n voorstelt.

(a) Toon aan dat de locale afbreekfout van deze integratiemethode van de orde $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ is. *(U mag hier niet de testvergelijking gebruiken.)* (3pt.)

(b) Gegeven het beginwaardeprobleem

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \pi t \end{pmatrix} \text{ and } \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Bereken één stap met de methode gegeven in (1), waarbij $\Delta t = 0.5$ en $t_0 = 0$ toegepast op (2) met de gegeven beginvoorwaarden. (2pt.)

(c) Laat zien dat de versterkingsfactor voor deze integratiemethode gegeven wordt door $Q(\lambda\Delta t) = 1 + \lambda\Delta t + \frac{(\lambda\Delta t)^2}{2}$. (2pt.)

(d) Onderzoek voor welke Δt integratiemethode (1) toegepast op het beginwaardeprobleem (2) stabiel is. (2pt.)

(e) We kunnen het probleem ook ontkoppeld oplossen, dat wil zeggen we gebruiken eerst de methode om $x_2' = -4x_2 + \cos \pi t$ op te lossen en daarna om $x_1' = -2x_1 + x_2$ op te lossen.
Wat is het voordeel van deze aanpak (+motivatie)? (1pt.)

voor vervolg z.o.z.

2. Van een voertuig wordt de versnelling geschat. De gemeten afstanden van het voertuig vanaf de startlijn staan in de onderstaande tabel.

t (s)	0	10	20
$d(t)$ (m)	0	40	100

   (a) We zoeken een differentieformule voor de tweede afgeleide van d in het punt $2h$ van de vorm:
   $$d''(2h) \approx Q(h) = \frac{\alpha_0}{h^2}d(0) + \frac{\alpha_1}{h^2}d(h) + \frac{\alpha_2}{h^2}d(2h).$$
   In de rest van de opgave werken we verder met deze formule. Laat zien dat de coefficienten $\alpha_0,\ \ \alpha_1$ en α_2 moeten voldoen aan het volgende stelsel:
   $$\begin{array}{rcrcrcl} \frac{\alpha_0}{h^2} & + & \frac{\alpha_1}{h^2} & + & \frac{\alpha_2}{h^2} & = & 0\,, \\ -2\frac{\alpha_0}{h} & - & \frac{\alpha_1}{h} & & & = & 0\,, \\ 2\alpha_0 & + & \frac{1}{2}\alpha_1 & & & = & 1\,. \end{array}$$
   (2 pt.)

   (b) De oplossing van dit stelsel wordt gegeven door $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = -2$ en $\alpha_2 = 1$. Leid voor deze waarden een uitdrukking af voor de afbreekfout $d''(2h) - Q(h)$. (2 pt.)

   (c) Geef een schatting van de versnelling op $t = 20$. (1 pt.)

3. We willen een wortel van de functie $f(x) = -x^3 + 6x - \frac{23}{8}$ vinden.

   (a) We kiezen de *vast-punt iteratie* $p_{n+1} = g(p_n)$, met $g(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{23}{48}$ om een wortel te vinden. *Laat zien* dat een vast punt van $g(x)$ ook een wortel van $f(x)$ is. (1 pt.)

   (b) We beginnen de vast-punt iteratie in $p_0 = 1$. *Bereken* p_1, p_2 en p_3 tot vier decimalen nauwkeurig en *schets* de vast-punt iteratie in een figuur. (2 pt.)

   (c) Laat zien dat de gekozen vast-punt iteratie *convergeert* voor alle $p_0 \in [0, 1]$. (2 pt.)

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
https://diamhomes.ewi.tudelft.nl/~kvuik/wi3097/tentamen.html