TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
FACULTEIT ELEKTROTECHNIEK, WISKUNDE EN INFORMATICA

Verantwoordelijk examinator: C. Vuik
Reviewer tentamen: D. den Ouden-van der Horst

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (CTB2400)

Donderdag 27 juni 2024, 13:30-16:30

Aantal vragen: Dit is een tentamen met 11 open vragen, onderverdeeld in 3 hoofdvragen.
Antwoorden: Alle antwoorden moeten beargumenteerd worden en/of berekeningen bevatten. Antwoorden zonder argumenten of berekeningen leveren geen punten op.
Hulpmiddelen: Alleen een niet-grafische, niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan. Alle andere elektronische hulpmiddelen zijn niet toegestaan.
Beoordeling: In totaal kunnen 20 punten verdiend worden. Het onafgeronde eindcijfer is gegeven door $P/2$, waarin P het aantal behaalde punten is.

1. Een methode om het beginwaardeprobleem gedefinieerd door $y' = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$, te integreren is gegeven door

$$\begin{cases} k_1 &= \Delta t\, f\left(t_n, w_n\right) \\ k_2 &= \Delta t\, f\left(t_n + \frac{1}{2}\Delta t, w_n + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 &= \Delta t\, f\left(t_n + \Delta t, w_n - k_1 + 2k_2\right) \\ w_{n+1} &= w_n + \left(\alpha k_1 + \beta k_2 + \gamma k_3\right) \end{cases} \tag{1}$$

waarin Δt de tijdstap is en w_n de numerieke oplossing op tijd t_n is.

(a) De *versterkingsfactor* van deze methode is gegeven door

$$Q(\lambda\Delta t) = 1 + (\alpha+\beta+\gamma)\,\lambda\Delta t + \left(\frac{\beta}{2}+\gamma\right)(\lambda\Delta t)^2 + \gamma\,(\lambda\Delta t)^3 .$$

Leid deze versterkingsfactor af voor de gegeven methode. ($2\frac{1}{2}$ pt.)

(b) Laat zien dat de *lokale afbreekfout* van de gegeven methode voor de testvergelijking $y' = \lambda y$ van orde $\mathcal{O}(\Delta t^3)$ is, *alleen* voor $\alpha = \gamma = \frac{1}{6}$ en $\beta = \frac{2}{3}$. ($2\frac{1}{2}$ pt.)

(c) Gegeven is het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} 2\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + y = 2t, \\ \\ y(0) = 1, \quad \dfrac{dy}{dt}(0) = 1. \end{cases} \tag{2}$$

Laat zien dat dit probleem geschreven kan worden als

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Geef ook de beginvoorwaarden voor $x_1(0)$ en $x_2(0)$. ($1\frac{1}{2}$ pt.)

(d) Neem $\alpha = \gamma = \frac{1}{6}$ en $\beta = \frac{2}{3}$.
Is de gegeven methode toegepast op dit beginwaardeprobleem stabiel voor $\Delta t = 2$? ($1\frac{1}{2}$ pt.)

(e) Voer *één stap* uit met de gegeven methode met $\Delta t = 2$, $t_0 = 0$, $\alpha = \gamma = \frac{1}{6}$ en $\beta = \frac{2}{3}$ voor het beginwaardeprobleem en de gegeven beginwaarden uit (2). (2 pt.)

voor vervolg z.o.z.

2. We beschouwen de convectie–diffusie vergelijking met Dirichlet randvoorwaarden:

$$\begin{cases} -u'' + u' = 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ \\ u(0) = 0, & u(1) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

waarin $u = u(x)$, $u' = \frac{du}{dx}$ en $u'' = \frac{d^2u}{dx^2}$.

(a) Laat zien dat

$$u(x) = x - \frac{1 - e^x}{1 - e}, \tag{5}$$

de exacte oplossing is van randwaardeprobleem (4). (1 pt.)

(b) We lossen randwaardeprobleem (4) op met eindige differenties, waarin $x_j = j\Delta x$, $(n+1)\Delta x = 1$, met Δx als stapgrootte. Geef een discretisatiemethode (+bewijs) waarvoor de afbreekfout van orde $O((\Delta x)^2)$ is. Behandel ook de randvoorwaarden. (2 pt.)

(c) Gebruik een stapgrootte van $\Delta x = \frac{1}{4}$ om het stelsel vergelijkingen $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$ af te leiden. Verwerk de randvoorwaarden. Het afgeleide stelsel heeft drie vergelijkingen met drie onbekenden, dat betekent dat A een 3×3 matrix is en $\mathbf{y}$ en $\mathbf{b}$ 3×1 kolomvectoren zijn. Dit stelsel vergelijkingen hoeft **niet** opgelost te worden. (2 pt.)

3. We willen een benadering vinden van het nulpunt p van een functie f, d.w.z. we willen p vinden zodat $f(p) = 0$. Echter, we weten de functie f niet, maar alleen een paar waardes van f in een aantal punten x zijn bekend, die in de tabel aan de rechterkant staan.

x	$f(x)$
1	-1
$4/3$	$-2/9$
$7/5$	$-1/25$
$10/7$	$2/49$
2	2

Daarom overwegen we om de Secant-methode te gebruiken:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{K_{n-1}}, \tag{6}$$

met K_{n-1} een benadering van $f'(p_{n-1})$, en waarin p_{n-2}, p_{n-1} en p_n drie opeenvolgende benaderingen van het nulpunt p zijn.

Vergelijking (6) is gebaseerd op het opstellen van het lineaire interpolatiepolynoom L van f gebaseerd op p_0 en p_1:

$$L(x) = f(p_0) + \frac{f(p_1) - f(p_0)}{p_1 - p_0}(x - p_0),$$

waarna p_2 gevonden wordt door $L(p_2) = 0$ op te lossen voor p.

(a) *Laat zien* dat, voor $n = 2$, K_1 gegeven is door

$$K_1 = \frac{f(p_1) - f(p_0)}{p_1 - p_0},$$

door $L(p_2) = 0$ op te lossen voor p_2. (2 pt.)

(b) Neem $p_0 = 1$ en $p_1 = 2$. *Benader* het nulpunt p van f door p_2 te berekenen. Hint: je mag p_2 afronden tot een waarde van x zoals gegeven in de tabel. (1 pt.)

(c) Herhaal de bovenstaande stappen met $n = 3$ door de formule voor K_2 te *geven* en door p_3 te *berekenen*. Hint: je mag p_3 afronden tot een waarde van x zoals gegeven in de tabel. (2 pt.)

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
https://diamhomes.ewi.tudelft.nl/~kvuik/wi3097/tentamen.html