TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
FACULTEIT ELEKTROTECHNIEK, WISKUNDE EN INFORMATICA

Verantwoordelijk examinator: C. Vuik
Reviewer tentamen: D. den Ouden-van der Horst

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (CTB2400) Dinsdag 16 juli 2024, 13:30-16:30

Aantal vragen: Dit is een tentamen met 12 open vragen, onderverdeeld in 3 hoofdvragen.
Antwoorden: Alle antwoorden moeten beargumenteerd worden en/of berekeningen bevatten. Antwoorden zonder argumenten of berekeningen leveren geen punten op.
Hulpmiddelen: Alleen een niet-grafische, niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan. Alle andere elektronische hulpmiddelen zijn niet toegestaan.
Beoordeling: In totaal kunnen 20 punten verdiend worden. Het onafgeronde eindcijfer is gegeven door $P/2$, waarin P het aantal behaalde punten is.

1. Een methode om het beginwaardeprobleem gedefinieerd door $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$, te integreren is gegeven door

$$w_{n+1} = w_n + (1-\theta)\Delta t f(t_n, w_n) + \theta \Delta t f(t_{n+1}, w_{n+1}),$$

waarin Δt de tijdstap is, w_n de numerieke oplossing op tijd t_n is en $0 \leq \theta \leq 1$.

(a) De *versterkingsfactor* van deze methode is gegeven door

$$Q(\lambda\Delta t) = \frac{1 + (1-\theta)\lambda\Delta t}{1 - \theta\lambda\Delta t}.$$

Leid deze versterkingsfactor af voor de gegeven methode. ($1\frac{1}{2}$ pt.)

(b) Laat zien dat de *lokale afbreekfout* van de gegeven methode in het algemeen $\mathcal{O}(\Delta t)$ is voor de testvergelijking $y' = \lambda y$. Bepaal ook voor welke waarde van θ de methode $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ is. . ($3\frac{1}{2}$ pt.)
Hint: $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3)$.
Hint: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \mathcal{O}(x^3)$ for $|x| < 1$.

(c) Neem $\theta = \frac{1}{2}$. Gegeven is het beginwaardeprobleem

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

met beginvoorwaarden $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$.
Is de gegeven tijdsintegratie methode toegepast op dit beginwaardeprobleem *stabiel* voor $\Delta t = 1$? ($3\frac{1}{2}$ pt.)

(d) Voer *één stap* uit met de gegeven methode met $\Delta t = 1$, $\theta = \frac{1}{2}$ en $t_0 = 0$ voor het beginwaardeprobleem (1) en de gegeven beginvoorwaarden. ($1\frac{1}{2}$ pt.)

voor vervolg z.o.z.

2. We willen een benadering voor $\sqrt{3}$ vinden. Daarom beschouwen we het vaste-puntprobleem

$$x = g(x),$$

op het interval $[1, 2]$, met de functie g gedefinieerd als

$$g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + x + 1. \tag{2}$$

In de volgende opdrachten zal je bewijzen dat $p = \sqrt{3}$ inderdaad het unieke vaste punt is van g op het interval $[1, 2]$ en dat voor elk startpunt $p_0 \in [1, 2]$ de vaste-puntiteratie

$$p_{n+1} = g(p_n), \tag{3}$$

convergeert naar $p = \sqrt{3}$, en je voert deze vaste-puntiteratie uit.

(a) *Laat zien* dat $p = \sqrt{3}$ een vast punt van de functie g is. (1 pt.)

(b) *Bargumenteer* waarom g continu is op $[1, 2]$. (1 pt.)

(c) *Laat zien* dat $1 \leq g(x) \leq 2$ voor alle $x \in [1, 2]$. (1 pt.)

(d) *Vind* de kleinste waarde k zodanig dat $|g'(x)| \leq k < 1$ voor alle $x \in [1, 2]$. (1 pt.)

(e) *Benader* $p = \sqrt{3}$ door p_1 en p_2 te berekenen met 4 significante cijfers, gegeven dat $p_0 = 2{,}000$. (1 pt.)

3. We onderzoeken **Lagrange interpolatie**. Voor gegeven steunpunten x_0, x_1, …, x_n met bijbehorende functiewaarden $f(x_0)$, $f(x_1)$, …, $f(x_n)$, wordt het interpolatiepolynoom $L_n(x)$, gegeven door

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_{kn}(x), \text{ met} \\ L_{kn}(x) &= \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)}. \end{aligned} \tag{4}$$

(a) Geef het *lineaire interpolatiepolynoom van Lagrange* $L_1(x)$ met steunpunten x_0 en x_1. (1 pt.)

(b) Geef het *kwadratische interpolatiepolynoom van Lagrange* $L_2(x)$ met steunpunten x_0, x_1 en x_2. (2 pt.)

(c) Bereken $L_n(2)$ en $L_n(3)$ eerst met lineaire interpolatie en dan met kwadratische interpolatie voor de volgende meetwaarden gegeven in tabelvorm:

k	x_k	$f(x_k)$
0	1	3
1	3	6
2	4	5

(2 pt.)

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
https://diamhomes.ewi.tudelft.nl/~kvuik/wi3097/tentamen.html