

Verantwoordelijk examiner: C. Vuik

Reviewer tentamen: D. den Ouden-van der Horst

**TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR
DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN
(CTB2400)**

Donderdag 26 juni 2025, 13:30-16:30

Aantal vragen: Dit is een tentamen met 12 open vragen, onderverdeeld in 3 hoofdvragen.

Antwoorden: Alle antwoorden moeten beargumenteerd worden en/of berekeningen bevatten.

Antwoorden zonder argumenten of berekeningen leveren geen punten op.

Hulpmiddelen: Alleen een niet-grafische, niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan.

Alle andere elektronische hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

Beoordeling: In totaal kunnen 20 punten verdiend worden. Het onafgeronde eindcijfer is gegeven door $P/2$, waarin P het aantal behaalde punten is.

1. Een methode om het beginwaardeprobleem gedefinieerd door $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$, te integreren is gegeven door

$$\begin{cases} k_1 &= f(t_n + \theta \Delta t, w_n + \theta \Delta t k_1) \\ w_{n+1} &= w_n + \Delta t k_1 \end{cases} \quad (1)$$

waarin Δt de tijdstap is, $\theta \in [0, 1]$ en w_n is de numerieke oplossing op tijd t_n .

- (a) Geef de versterkingsfactor van deze methode. (2 $\frac{1}{2}$ pt.)

Vanaf nu nemen we $\theta = \frac{1}{2}$.

- (b) Voor $\theta = \frac{1}{2}$ is de versterkingsfactor gegeven door $Q(\lambda \Delta t) = \frac{1 + \frac{1}{2} \lambda \Delta t}{1 - \frac{1}{2} \lambda \Delta t}$. Laat zien dat de lokale afbreekfout van bovenstaande methode van de orde $O(\Delta t^2)$ is voor de testvergelijking $y' = \lambda y$.

(Hint: $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$ en $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$) (2 $\frac{1}{2}$ pt.)

We beschouwen nu het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\pi t) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

met beginvoorwaarden $x_1(0) = 1$ en $x_2(0) = 0$.

- (c) Bepaal voor welke $\Delta t > 0$ de gegeven methode stabiel is, als deze toegepast wordt op bovenstaand stelsel. (2 $\frac{1}{2}$ pt.)

- (d) Voer één stap uit met deze methode voor $\Delta t = 1$ en $t_0 = 0$. (2 $\frac{1}{2}$ pt.)

2. We willen een benadering voor $\sqrt{3}$ vinden. Daarom beschouwen we het vaste-puntprobleem

$$x = g(x),$$

op het interval $[1, 2]$, met de functie g gedefinieerd als

$$g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + x + 1. \quad (3)$$

In de volgende opdrachten zal je bewijzen dat $p = \sqrt{3}$ inderdaad het unieke vaste punt is van g op het interval $[1, 2]$ en dat voor elk startpunt $p_0 \in [1, 2]$ de vaste-puntiteratie

$$p_{n+1} = g(p_n), \quad (4)$$

convergeert naar $p = \sqrt{3}$, en je voert deze vaste-puntiteratie uit.

- (a) *Laat zien* dat $p = \sqrt{3}$ een vast punt van de functie g is. (1 pt.)
- (b) *Beargumenteer* waarom g continu is op $[1, 2]$. (1 pt.)
- (c) *Laat zien* dat $1 \leq g(x) \leq 2$ voor alle $x \in [1, 2]$. (1 pt.)
- (d) *Vind* de kleinste waarde k zodanig dat $|g'(x)| \leq k < 1$ voor alle $x \in [1, 2]$. (1 pt.)
- (e) *Benader* $p = \sqrt{3}$ door p_1 en p_2 te berekenen met 4 significante cijfers, gegeven dat $p_0 = 2,000$. (1 pt.)

3. We beschouwen we het volgende randwaardeprobleem

$$\begin{cases} -y''(x) + (x+1)y(x) = 1, & 0 < x < 1, \\ y'(0) = 0, \quad y(1) = 1. \end{cases} \quad (5)$$

- (a) We willen het randwaardeprobleem (5) met behulp van de eindige differentie methode oplossen. Laat $x_j = j\Delta x$, $(n+1)\Delta x = 1$ waarin de stapgrootte Δx constant is. Geef een discretisatie (+ bewijs) met
 - locale afbreekfout van $\mathcal{O}((\Delta x)^2)$;
 - verwerking van de randvoorwaarden;
 - en een symmetrische discretisatie matrix.

Gebruik een virtueel gridpunt voor de randvoorwaarde op $x = 0$.

Hint: in een inwendig punt is de vergelijking: $\frac{-w_{j-1} + 2w_j - w_{j+1}}{\Delta x^2} + (x_j + 1)w_j = 1$. (2.5 pt.)

- (b) Gebruik een stapgrootte van $\Delta x = 1/3$ om het stelsel vergelijkingen $\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{f}$ voor de discretisatie uit deel (a) af te leiden. Verwerk de randvoorwaarden. Het afgeleide stelsel moet 3×3 zijn (drie onbekenden en drie vergelijkingen). (1 pt.)
- (c) Omdat de 3×3 discretisatie matrix $\mathbf{A}$ symmetrisch is, zijn alle eigenwaarden reëel. Maak gebruik van de Gershgorin-cirkel stelling om een schatting voor de kleinste eigenwaarde $|\lambda|_{\min}$ te berekenen. Concludeer hieruit dat het eindige differentie schema uit (a) stabiel is. Dat betekent dat $\mathbf{A}^{-1}$ bestaat en dat er een constante C bestaat zó dat $\|\mathbf{A}^{-1}\| \leq C$ als $\Delta x \rightarrow 0$.

Gershgorin stelling: alle eigenwaarden liggen in cirkels $|z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$ met $z \in \mathbb{C}$.

(1.5 pt.)