

Verantwoordelijk examiner: C. Vuik

Reviewer tentamen: D. den Ouden-van der Horst

**TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR
DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN
(CTB2400)**

Dinsdag 15 juli 2025, 13:30-16:30

Aantal vragen: Dit is een tentamen met 12 open vragen, onderverdeeld in 3 hoofdvragen.

Antwoorden: Alle antwoorden moeten beargumenteerd worden en/of berekeningen bevatten.

Antwoorden zonder argumenten of berekeningen leveren geen punten op.

Hulpmiddelen: Alleen een niet-grafische, niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan.

Alle andere elektronische hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

Beoordeling: In totaal kunnen 20 punten verdiend worden. Het onafgeronde eindcijfer is gegeven door $P/2$, waarin P het aantal behaalde punten is.

1. Voor het beginwaardeprobleem $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$, gebruiken we de integratiemethode

$$\begin{cases} w_{n+1}^* = w_n + \Delta t f(t_n, w_n) \\ w_{n+1} = w_n + \frac{\Delta t}{2} (f(t_n, w_n) + f(t_{n+1}, w_{n+1}^*)) \end{cases} \quad (1)$$

waarin Δt de tijdstap en w_n de numerieke oplossing op tijdstip t_n voorstelt.

- (a) Toon aan dat de lokale afbreekfout van deze integratiemethode van de orde $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ is. (U mag hier niet de testvergelijking gebruiken.) (3pt.)

Gegeven is het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + \frac{4}{3} y = \cos t, \\ y(0) = 1, \quad \frac{dy}{dt}(0) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

- (b) Laat zien dat bovenstaand beginwaardeprobleem geschreven kan worden als

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{4}{3} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Geef ook de beginvoorwaarden voor $x_1(0)$ en $x_2(0)$. (1pt.)

- (c) Bereken één stap met de methode gegeven in (1), waarbij $\Delta t = 0.1$ en $t_0 = 0$ toegepast op (3) met de gegeven beginvoorwaarden. (2pt.)
- (d) Leid de versterkingsfactor voor deze integratiemethode af. (2pt.)
- (e) Onderzoek voor welke Δt integratiemethode (1) toegepast op het beginwaardeprobleem (3) stabiel is. (2pt.)

2. We hebben een functie f die voldoet aan $f(-1) = 0$, $f(0) = 2$ en $f(1) = 1$ benaderd met een natuurlijke kubische spline s gegeven door

$$s(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 & \text{als } x \in [-1, 0), \\ \frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 & \text{als } x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (4)$$

In de volgende opdrachten ga je bewijzen dat s inderdaad de natuurlijke kubische spline is gebaseerd op f is. Daarna ga je s gebruiken om $f(-\frac{1}{2})$ te benaderen.

- (a) *Laat zien* dat s , s' en s'' continu zijn op het interval $[-1, 1]$. (2 pt.)
- (b) *Laat zien* dat $s''(x)$ gelijk is aan nul in de eindpunten. (1 pt.)
- (c) *Laat zien* dat $s(x)$ gelijk is aan $f(x)$ in de knooppunten. (1 pt.)
- (d) *Benader* $f(-\frac{1}{2})$ met behulp van vergelijking (4). (1 pt.)

3. We leiden de Newton–Raphson methode af en gebruiken deze om een niet-lineair probleem op te lossen.

- (a) Gegeven het scalaire niet-lineaire probleem:

$$\text{Bepaal } p \in \mathbb{R} \text{ zo dat } f(p) = 0. \quad (5)$$

Leid de formule van Newton–Raphson,

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} - \frac{f(y^{(k)})}{f'(y^{(k)})}, \quad (6)$$

af om het probleem op te lossen. Leg de methode ook uit met een figuur. (2pt.)

- (b) Gegeven het niet-lineaire probleem: Bepaal $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ zo dat $\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$, waarbij $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$. Geef de Newton–Raphson formule voor dit probleem. (1pt.)
- (c) Voer één Newton–Raphson stap uit op het volgende stelsel voor p_1 en p_2 :

$$\begin{cases} 2p_1 - p_2 + p_1p_2 = 0, \\ -p_1 + 2p_2 + p_2^3 = 1. \end{cases} \quad (7)$$

Gebruik $p_1 = p_2 = 0$ als de beginschatting. (2pt.)