

Oefenopgaven wi3097: Numerieke methoden voor differentiaalvergelijkingen

1 Introductie

Behandelde begrippen

- Taylor polynoom, floating point getal, afrondfout
- Orde symbool Landau

Opgaven

1. Laat $f(x) = x^3$. Bepaal het tweede orde Taylor polynoom voor het steunpunt $x = 1$. Bepaal de waarde van dit polynoom in $x = 0.5$. Geef een schatting van de fout en vergelijk dit met de echte fout.
2. Laat $f(x) = e^x$. Geef het Taylor polynoom van de orde n en de restterm voor het steunpunt $x = 0$. Hoe groot moet n zijn opdat de fout kleiner is dan 10^{-6} op het interval $[0, 0.5]$?
3. Het polynoom $P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$ wordt gebruikt om $f(x) = \cos(x)$ te benaderen op $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Geef een bovengrens voor de fout in de benadering.
4. Neem $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{5}{7}$. We rekenen met 3 cijfers. Schrijf x en y als floating point getallen. Bepaal voor $\circ = +, -, *, /$, $f\ell(f\ell(x) \circ f\ell(y))$, $x \circ y$ en de afrondfout.

2 Interpolatie

Behandelde begrippen

- Lineaire interpolatie, interpolatiefout, Lagrange interpolatie
- Lineaire splines, kubische splines

Opgaven

1. Bepaal het tweede graads Lagrange polynoom van $f(x) = 1/x$ gebruikmakend van de steunpunten $x_0 = 2$, $x_1 = 2.5$ en $x_2 = 4$. Benader hiermee $f(3)$.
2. Bepaal $s(\frac{1}{2})$, waarbij s de kubische spline is met steunpunten 0, 1 en 2 voor de functie $f(x) = x$. Doe dit ook voor de functie $f(x) = x^2$.

3 Numeriek differentieren

Behandelde begrippen

- voorwaartse, achterwaartse en centrale differenties, hogere orde afgeleide
- afbreekfout, afrondfout, Richardson' s foutschatting

Opgaven

1. Bewijs voor $f \in C^3[x - h, x + h]$, dat de afbreekfout bij centrale differenties $O(h^2)$ is.
2. Stel dat de positie van een schip bepaald kan worden met een meetfout van hoogstens 10 meter. Verder veronderstellen we dat de werkelijke plaats van het schip tijdens het op gang komen geven wordt door de functie $S(t) = 0.5at^2$, waarbij S in meters en t in seconden uitgedrukt wordt. De snelheid wordt benaderd met een achterwaartse differentie met stapgrootte h . Geef de afbreekfout en de meetfout in deze formule. Als $a = 0.004$ bepaal dan de waarde van h waarvoor de fout in de bepaalde snelheid minimaal is. Hoe groot is de fout?
3. Gegeven $f(x)$, $f(x + h)$ en $f(x + 2h)$. Bepaal een formule om $f'(x)$ te benaderen waarbij de fout minimaal is.
4. Gegeven de functie $f(x) = \sin x, x \in [0, \pi]$. Bepaal $f'(1)$ met behulp van een centrale differentie voor $h = 0.1$. Geef een schatting van de fout via Richardson' s foutschatting.

4 Numerieke methoden voor beginwaardeproblemen

Behandelde begrippen

- Methode van Euler, Trapeziumregel en Runge-Kutta methoden
- impliciet, expliciet
- Richardson' s foutschatting voor differentiaalvergelijkingen
- stabiliteit differentiaalvergelijking, numerieke stabiliteit
- testvergelijking, versterkingsfactor
- convergentie, globale fout, efficiency
- numerieke methoden voor stelsels en hogere orde beginwaardeproblemen.
- numerieke stabiliteit bij stelsels differentiaalvergelijkingen, stabiliteitsgebied
- stijve stelsels differentiaalvergelijkingen

Opgaven

1. Gebruik de Modified Euler methode om de oplossing te benaderen van het volgende beginwaardeprobleem: $y' = 1 + (t - y)^2$, $2 \leq t \leq 3$, $y(2) = 1$, met $h = 0.5$. De exacte oplossing wordt gegeven door $y(t) = t + \frac{1}{1-t}$. Bepaal de fout in de numerieke benadering.
2. Laat zien dat de lokale afbreekfout bij de midpuntregel $O(h^2)$ is. De midpuntregel wordt gegeven door:

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}f(t_i, w_i))$$

3. Bepaal de versterkingsfactor voor de Trapeziumregel. Schat hiermee de afbreekfout voor de testvergelijking. Laat zien dat de Trapeziumregel stabiel is voor alle $h > 0$, als $\lambda \leq 0$.
4. Gegeven het niet-lineaire beginwaardeprobleem: $y' = 1 + (t - y)^2$. Geef de stabiliteitsvoorwaarde voor de methode van Modified Euler in het punt $t = 2$ en $y = 1$.
5. Gegeven is de numerieke integratiemethode:

$$u^* = u_n + \beta hf(t_n, u_n), \quad u_{n+1} = u^* + (1 - \beta)hf(t_n + \beta h, u^*)$$

- (a) Laat zien, dat de afbreekfout $O(h)$ is voor elke waarde van β .
 - (b) Bepaal de versterkingsfactor van deze methode.
 - (c) Beschouw de niet-lineaire differentiaalvergelijking: $y' = 2y - 4y^2$. Bepaal de maximale stapgrootte zodanig, dat de methode (met $\beta = \frac{1}{2}$) stabiel is in de buurt van $y = \frac{1}{2}$.
6. Voer een stap uit met de voorwaartse Euler methode met stapgrootte $h = 0.1$ voor het stelsel:

$$\begin{aligned} u_1' &= -4u_1 - 2u_2 + e^t, \\ u_2' &= 3u_1 + u_2, \end{aligned}$$

met beginvoorwaarde $u_1(0) = 0$ en $u_2(0) = -1$.

7. Doe één stap met voorwaarts Euler voor de vergelijking $y'' - 2y' + y = te^t - t$ met $y(0) = y'(0) = 0$ met stapgrootte $h = 0.1$. Bepaal de fout met de echte oplossing: $y(t) = \frac{1}{6}t^3e^t - te^t + 2e^t - t - 2$.
8. Stel we hebben de vergelijking voor de mathematische slinger: $\phi'' + \frac{g}{L}\phi = 0$ met $\phi(0) = \phi'(0) = 0$. Schrijf dit als een stelsel. Is dit stelsel stabiel?
9. Gegeven het stelsel $y_1' = 1195y_1 - 1995y_2$, $y_1(0) = 2$, $y_2' = 1197y_1 - 1997y_2$, $y_2(0) = -2$. De exacte oplossing wordt gegeven door $y_1(t) = 10e^{-2t} - 8e^{-800t}$, $y_2(t) = 6e^{-2t} - 8e^{-800t}$.

- (a) Doe één stap met E.V. en E.A. met $h = 0.1$ en vergelijk met het exacte antwoord.
 - (b) Bepaal voor welke stapgrootte E.V. stabiel is.
 - (c) Doe één stap met E.V. en E.A. met $h = 0.0001$ en vergelijk met het exacte antwoord. Conclusie?
10. Gegeven de differentiaalvergelijking $y' = y - t^2 + 1$ en $y(0) = \frac{1}{2}$. Benader $y(0.1) = 0.6574145$ met E.V. met $h = 0.025$ en de RK methode met $h = 0.1$. Welke methode verdient de voorkeur?

5 Numerieke methoden voor randwaardeproblemen

Behandelde begrippen

- norm vector, norm matrix, conditiegetal, Gershgorin,
- randwaarde problemen, afbreekfout, globale fout
- Neumann randvoorwaarde, conditie discretisatie matrix, upwind discretisatie

Opgaven

1. Gegeven de matrices A_1 en A_2 :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ en } A_2 = \begin{pmatrix} 100 & 99 \\ 99 & 100 \end{pmatrix}$$

Bepaal van beide matrices het conditiegetal. Bepaal de oplossing van $A_2x = b$ waarbij $b = (199, 199)$. Neem $\Delta b = (1, 0)$. Schat $\|\Delta x\|$ met behulp van het conditiegetal. Bepaal Δx en vergelijk $\|\Delta x\|$ met de schatting.

2. Gegeven het randwaarde probleem

$$y''(x) = 2(y(x) - x), \quad x \in [0, 1], \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

- (a) Discretisatie geeft een stelsel vergelijkingen $A \mathbf{u} = \mathbf{b}$. Geef A en $\mathbf{b}$.
- (b) Geef een schatting voor de grootste en de kleinste eigenwaarde van A .
- (c) Geef een schatting van $\frac{\|\Delta \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|}$ als $\frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \leq 10^{-4}$.

3. Gegeven het randwaarde probleem

$$-y''(x) = \sin x, \quad x \in [0, \pi],$$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

Geef de exacte oplossing. Neem $n = 3$ en bepaal de numerieke oplossing w_j . Bereken $y_j - w_j$, $j = 1, 2$.

4. Gegeven het randwaarde probleem

$$-y''(x) + y(x) = 0, \quad x \in [0, 1],$$

$$y(0) = 1, y'(1) = 0.$$

Discretizeer dit randwaarde probleem met de roosterpunten: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{2}{7}$, $x_2 = \frac{4}{7}$, $x_3 = \frac{6}{7}$ en $x_4 = \frac{8}{7}$. Geef de matrix A. Is de matrix symmetrisch of niet-symmetrisch? Zijn de eigenwaarden positief?

6 Numerieke methoden voor niet-lineaire vergelijkingen

Behandelde begrippen

- niet-lineaire vergelijkingen, afrondfout
- Bisectie, convergentie, stopcriterium
- vaste punt methode, lineaire convergentie
- Newton Raphson, niet-lineaire stelsels, niet-lineair randwaarde probleem

Opgaven

1. Stel $f(x) = 3(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-1)$. Gebruik de Bisectie methode op de volgende intervallen om p_3 te bepalen: $[-2 \ 1.5]$ en $[-1.25 \ 2.5]$.
2. We beschouwen de vaste punt methoden: $p_n = \frac{20p_{n-1}+21/p_{n-1}^2}{21}$ en $p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^3-21}{3p_{n-1}^2}$. Beantwoord voor beide methoden de volgende vragen. Laat zien dat het vaste punt $(21)^{\frac{1}{3}}$ is. Geef een schatting van de convergentie snelheid. Bepaal p_3 met $p_0 = 1$.
3. We gaan een methode afleiden voor het bepalen van een nulpunt van f gebaseerd op interpolatie.
 - (a) Stel er zijn twee startwaarden gegeven p_0 en p_1 . Bepaal het lineaire interpolatiepolynoom van de functie f .
 - (b) Neem voor p_2 het punt waar het interpolatiepolynoom de x-as snijdt.
 - (c) Doe 2 iteraties met de deze methode voor de functie $f(x) = x^2 - 2$ met $p_0 = 1$ en $p_1 = 2$.
4. Gegeven de functie $f(x) = x - \cos x, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Bepaal met behulp van de Newton-Raphson methode een benadering van de oplossing met een fout kleiner dan 10^{-4} .
5. Doe twee iteraties met de Newton-Raphson methode met startvector $(1, 1)$ om het volgende niet-lineaire stelsel op te lossen: $x_1^2 - x_2 - 3 = 0$ en $-x_1 + x_2^2 + 1 = 0$. Vergelijk de benadering met de exacte oplossing $(2, 1)$.

7 Numerieke integratie

Behandelde begrippen

- numerieke integratie, afbreekfout, afrondfout, gerepeteerde integratieregels

Opgaven

1. We willen de volgende integraal bepalen:

$$\int_{-1}^1 [(10x)^3 + 0.001] dx.$$

- (a) De relatieve afrondfout in de functiewaarden is kleiner dan ϵ . Bepaal de relatieve fout in de integraal ten gevolge van de afrondfouten.
 - (b) We nemen de gerepeteerde midpuntregel als numerieke integratie methode en $\epsilon = 4 * 10^{-8}$. Geef een redelijke waarde voor de stapgrootte h .
2. Bepaal $\int_{0.5}^1 x^4 dx$ met de Trapeziumregel. Schat de fout en vergelijk deze schatting met de echte fout. Bereken de integraal ook met de gerepeteerde Trapeziumregel met $h = 0.25$. Schat de fout met Richardson's foutschatting.