

Voorbeeld 1: Golflengte

Golven op open water, zoals die aan het strand, worden veel beschreven aan de hand van de lineaire golftheorie¹. Volgens deze theorie wordt het verband tussen de golflengte L , de waterdiepte H en de golfperiode T gegeven door

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right) \quad (1)$$

waarin g de versnelling van de zwaartekracht.

Deze uitdrukking is impliciet in de golflengte L . Voor voorgeschreven T en h kan L iteratief worden benaderd. Dat kan op meerdere manieren. We noemen er twee en voor beide herschrijven we bovenstaande uitdrukking voor L als

$$\frac{1}{x} = \lambda \tanh(x) \quad ; \quad x = \frac{2\pi h}{L} \quad ; \quad \lambda = \frac{gT^2}{(2\pi)^2 h} \quad (2)$$

Omdat T en h zijn voorgeschreven, is λ dat ook. Door x te benaderen uit de linker gelijkheid in (2), volgt de gezochte benadering voor de golflengte uit $L = 2\pi h/x$.

methode 1

Een methode om x iteratief te benaderen is de zogeheten substitutie-methode. Als x_i de schatting van x is met volgnummer i , dan volgt de volgende schatting uit

$$x_{i+1} = \frac{1}{\lambda \tanh(x_i)} \quad (3)$$

Een gebruikelijke beginschatting x_0 voor dit iteratieve proces is $x_0 = 1/\lambda$. Deze beginschatting past bij de situatie waarin $\tanh(x) = 1$ (ofte wel $x = \infty$). Fysisch gezien kan dat niet omdat h altijd eindig is en L altijd groter dan nul (anders zouden er geen golven zijn). Daarom is deze beginschatting steeds een overschatting.

Het verloop van het iteratieve proces (3) dat met deze beginschatting leidt tot een steeds nauwkeuriger benadering van de x die voldoet aan de linker gelijkheid in (2), is geschetst in de linker grafiek in figuur 1.

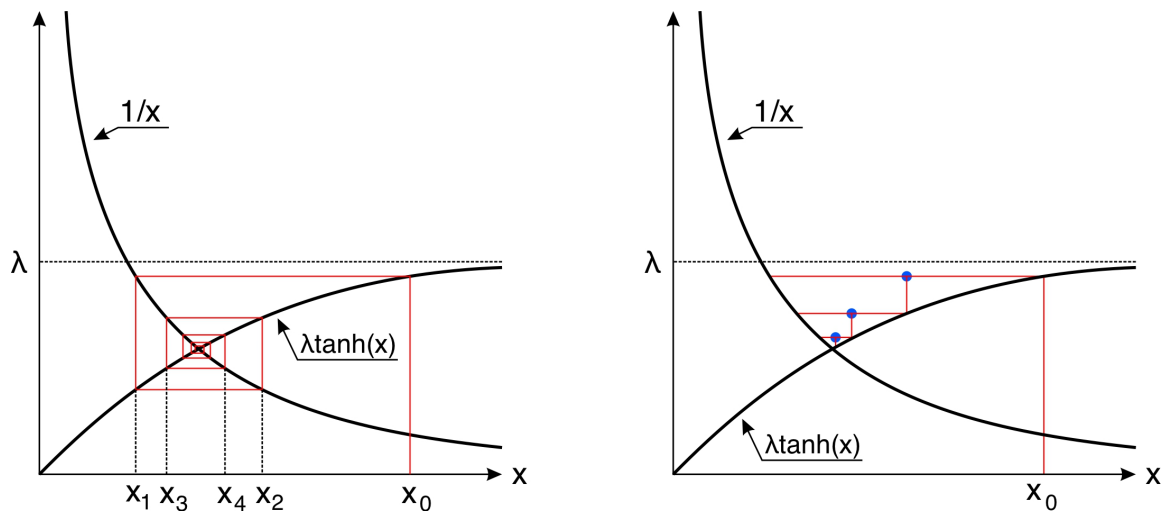


Figure 1: Verloop van het iteratieve proces dat leidt tot een steeds nauwkeuriger schatting van de oplossing van de linker gelijkheid in (2). De linker grafiek heeft betrekking op (3) en de rechter op (6).

¹zie bijvoorbeeld Holthuijsen, LH (2004) *Waves in oceanic and coastal waters*, doi:10.1017/CBO9780511618536.

In deze grafiek is x uitgezet langs de horizontale as. De twee krommen in de grafiek komen overeen met $1/x$ (het linker lid in de linker gelijkheid in (2)) en $\lambda \tanh(x)$ (het rechter lid in die gelijkheid). De gezochte x ligt op het snijpunt van de beide krommen. Het iteratieve proces (3) spiraalt als het ware naar dat snijpunt. Dat proces verloopt langs de rode lijn en de grafiek. Elke knik in de rode lijn komt overeen met een schatting van x en elke volgende schatting benadert het snijpunt beter dan het voorgaande.

Dit iteratieve proces leidt na oneindig veel stappen tot de exacte oplossing van (2). In de praktijk is het echter niet mogelijk om oneindig veel stappen uit te voeren. Hoeveel stappen echt nodig zijn, hangt af van de gewenste nauwkeurigheid van de uitkomst en die hangt weer af van de toepassing.

Voor de planning van offshore operaties op de Noordzee, bijvoorbeeld voor de aanleg van een windmolenpark, is inzicht gewenst in de golfcondities die zich enkele tientallen kilometers uit de kust voordoen. De waterdiepte h is daar van de orde 10m en een veel voorkomende golfperiode T is tussen 6 en 10 seconden. De bijbehorende golflengte is circa 70m.

Voor de genoemde planning maakt het niet echt uit of de golflengte 69m is of 71m. Kortom, een fout van zo'n 1% in de schatting van de golflengte heeft geen significante invloed op de planning van de operatie. Vanwege het alternerende karakter van het iteratieve proces (van twee opeenvolgende schattingen is de ene altijd te hoog en de andere altijd te laag; zie de linker grafiek in figuur 1), kan dat proces worden gestaakt zodra twee opeenvolgende schattingen minder dan 1% van elkaar verschillen.

methode 2

De tweede iteratieve methode die we in deze notitie noemen, is een verfijning van de eerste. Ook in deze tweede methode gaan we uit van een beginschatting $x_0 = 1/\lambda$. Met (3) leidt die eerste methode tot opeenvolgende schattingen van x die afwisselend te groot en te klein zijn. Dat inzicht kunnen we gebruiken om het iteratieproces te versnellen.

Als van twee opeenvolgende schattingen volgens (3) de ene een overschatting is en de andere een onderschatting, dan ligt het gemiddelde van die twee schattingen dicht bij het exacte antwoord dan die beide schattingen afzonderlijk. Met andere woorden, als x het exacte antwoord is, dan geldt dat

$$\left| \frac{x_{i+1} + x_i}{2} \right| < \min \{ |x_{x+1} - x|, |x_i - x| \} \quad ; \quad x_{i+1} = \frac{1}{\lambda \tanh(x_i)} \quad (4)$$

Voor de volgende schatting x_{i+2} geldt een overeenkomstige betrekking:

$$|x_{i+2} - x| < \min \{ |x_{x+1} - x|, |x_i - x| \} \quad ; \quad x_{i+2} = \frac{1}{\lambda \tanh(x_{i+1})} \quad (5)$$

Gegeven x_i en x_{i+1} kunnen we ervoor kiezen om x_{i+2} als volgende schatting te nemen of $(x_i + x_{i+1})/2$. Met een keuze voor die laatste, wordt een stap in het iteratieproces gegeven door

$$x_{k+1} = \frac{x_k + x'}{2} \quad ; \quad x' = \frac{1}{\lambda \tanh(x_k)} \quad (6)$$

Deze aanpak is geschetst in de rechter grafiek in figuur 1. De blauwe stippen daarin verwijzen naar schattingen x_k volgens (6).

Het voordeel is dat het berekenen van $(x_i + x_{i+1})/2$ (of $(x_k + x')/2$ volgens (6)) minder tijd kost dan het berekenen van $1/(\lambda \tanh(x_{i+1}))$. Of daarmee het hele proces wordt versneld, hangt af van het aantal stappen dat nodig is om dezelfde nauwkeurigheid te bereiken. Dat blijft in deze notitie buiten beschouwing.

Voorbeeld 2: Verhanglijn

De term verhanglijn verwijst naar het verloop van de waterstand in lengterichting in een rivier. Een schatting van dat verloop kan worden verkregen door de stroming in de rivier te zien als een 1-dimensionaal verschijnsel. Als de stroming bovendien stationair is, dan geldt voor deze benadering dat

$$u \frac{du}{dx} = -g \frac{dh}{dx} - c_f \frac{u|u|}{h} - g \frac{db}{dx} \quad (7)$$

waarin x een horizontale coördinaat langs de as van de rivier, u de stroomsnelheid, ζ de waterstand (ten opzichte van een of andere referentie), b het bodemniveau (ten opzichte van dezelfde referentie) en h is de waterdiepte ($h = \zeta - b$). Voorts is g de versnelling van de zwaartekracht en c_f is een coëfficiënt voor de ruwheid van de bodem.

Uitdrukking (7) is de impulsbalans voor 1-dimensionale, stationaire stroming. Bij een voorgeschreven bodemligging b zijn hierin u en h onbekenden. Als er geen zijdelingse toe- of afvoer van water is, dan is het volume water dat per eenheid van tijd passeert, op alle lokaties x gelijk. Dat wil zeggen dat het produkt uh niet varieert met x . Dit produkt wordt genoteerd als q .

Zonder op de afleiding in te gaan, stellen we dat deze impulsbalans in combinatie met een constante $q = hu$, te herleiden is tot

$$\frac{y^3 - \alpha \frac{dy}{dx}}{y^3 - 1} = -\beta \quad (8)$$

waarin de coëfficiënten α en β afhankelijk zijn van de bodelhelling db/dx en we veronderstellen dat die is voorgeschreven en niet varieert met x .

De y in (8) is de relatieve waterdiepte, gedefinieerd als $y = h/h_e$, waarin h_e de zogeheten evenwichtsdiepte. Dat is de waterdiepte die zich van nature instelt bij de gegeven bodemhelling, bodemruwheid (c_f) en afvoer q en in afwezigheid van obstructies. Onder die omstandigheden is $y(x) = 1$.

Ingeval van een obstructie van de stroming, zoals bij een stuw in een rivier, wijkt $y(x)$ bovenstrooms van die obstructie af van 1. Een voorbeeld hiervan is geschetst in figuur 2.

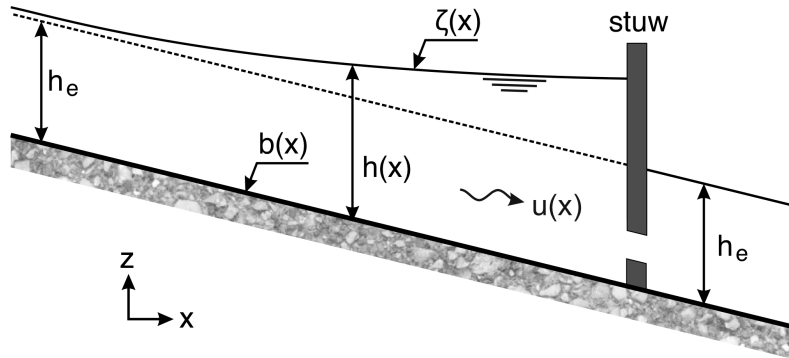


Figure 2: Schets van de langsdoorsnede van een rivier met een constante bodemhelling en ergens een stuw. Bovenstrooms van die stuw wijkt de waterdiepte h af van de evenwichtsdiepte.

Het verloop van de waterdiepte $h(x)$ is te bepalen uit (9). Integratie hiervan geeft

$$(\alpha - 1)H(y) + y = -\beta x + I \quad (9)$$

waarin

$$H(y) = \frac{1}{6} \ln \frac{y^2 + y + 1}{(y - 1)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2y - 1}{\sqrt{3}} \quad (10)$$

en I is een integratieconstante die bepaald moet worden uit een randvoorwaarde waarin bijvoorbeeld de waterdiepte op een lokatie wordt voorgeschreven ($h(x_b) = h_b$, wat leidt tot $y(x_b) = h_b/h_e$). Dat is bijvoorbeeld de waterdiepte ter plaatse van de stuw.

²Dat lijkt niet te corresponderen met (8) tenzij de $\beta = 0$. Echter in de evenwichtssituatie waarin $h(x) = h_e$ is ook $du/dx = 0$ en in de afleiding van (9) is dat uitgesloten.

Dit resultaat heeft de vorm $x = x(y)$ waaruit rechtstreeks kan worden bepaald op welke lokatie x zich een voorgeschreven y voordoet. In praktische toepassingen is ook het omgekeerde ($y = y(x)$) vaak nodig. Dat kan niet rechtstreeks, maar wel iteratief, bijvoorbeeld met behulp van de Newton-Raphson methode.

Met deze methode kan het nulpunt van een functie worden gezocht. In dit geval zijn we echter niet op zoek naar een nulpunt, maar naar een relatieve waterdiepte y_p die zich voordoet op een voorgeschreven lokatie x_p . Om de methode te kunnen toepassen, moeten we een functie $f(y)$ definiëren waarvoor geldt dat $f(y_p) = 0$ bij een voorgeschreven x_p . Met $x(y_p) = x_p$ is $f(y) = x(y) - x_p$ zo'n functie.

Met de Newton-Raphson methode volgen achtereenvolgende schattingen y_n van de gezochte y_p uit

$$y_{n+1} = y_n - f(y_n) \left(\frac{df}{dy} \Big|_{y_n} \right)^{-1} \quad (11)$$

waarin, in dit geval,

$$\begin{aligned} f(y) &= -\frac{1}{\beta} ((\alpha - 1)H(y) + y - I) - x_p \\ \frac{df}{dy} &= -\frac{1}{\beta} \left((\alpha - 1) \frac{dH}{dy} + 1 \right) \end{aligned} \quad (12)$$

met

$$\frac{dH}{dy} = \frac{1}{6} \left(\frac{2y + 1}{y^2 + y + 1} - \frac{2}{y - 1} \right) + \frac{2}{3} \left(1 + \left(\frac{2y - 1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right)^{-1} \quad (13)$$

Bij een gestuwde afvoer (sub-kritische stroming; $\alpha < 1$) neigt de waterdiepte in stroomopwaartse richting asymptotisch naar de evenwichtsdiepte ($y = 1$). Als op een of andere lokatie x de waterdiepte kleiner is dan de evenwichtsdiepte ($y < 1$), dan is dat overal stroomopwaarts van die x ook zo. Op dezelfde manier is de waterdiepte stroomopwaarts van x overal groter dan de evenwichtsdiepte ($y > 1$) als die dat op lokatie x is.

Uitdrukking (9) geldt voor beide situaties. Er zijn waarden voor x zijn waarbij aan (9) wordt voldaan voor twee verschillende waarden van y , waarvan er een groter dan 1 en de ander kleiner dan 1. Slechts één van beide is fysisch relevant. Welke dat is, valt direct af te leiden uit de randvoorwaarde $h(x_b) = h_b$ die wordt gebruikt om de integratieconstante I te bepalen. Als $h_b < h_e$, dan is $y < 1$ overal bovenstrooms van x_b en analoog voor $h_b > h_e$.

Bij toepassing van de Newton-Raphson methode om y te bepalen voor een voorgeschreven x , moet ervoor worden gezorgd dat de fysisch juiste oplossing wordt benaderd. De keuze van een beginschatting y_0 speelt daarin een belangrijke rol. Dit is geïllustreerd in figuur 3.

Stel dat we te maken hebben met een randvoorwaarde waarbij $h_b < h_e$. In dat geval is $y(x_b) < 1$. In overeenstemming daarmee kiezen we een y_0 die ook kleiner is dan 1 en beginnen daarmee het iteratieve proces (11). Stel vervolgens dat zich ergens in dat proces de schatting y_n voordoet die is aangegeven in figuur 3. Die is kleiner dan 1 en past dus bij de randvoorwaarde.

Voor de volgende schatting y_{n+1} geldt dat niet. Zoals geschetst in figuur 3 is $y_{n+1} > 1$. Van daar uit convergeert het iteratieve proces (11) naar een oplossing waarbij $y > 1$ en dat past niet bij de randvoorwaarde. In de stap van y_n naar y_{n+1} zijn we over de asymptoot $y = 1$ gesprongen en daardoor uitgekomen bij de oplossing die, gezien de randvoorwaarde, niet fysisch relevant is.

Dit kan worden voorkomen met een beginschatting y_0 die dicht bij 1 ligt en, afhankelijk van de randvoorwaarde, net daarboven of daaronder. Als in het iteratieve proces een schatting y_n aan de verkeerde kant van $y = 1$ wordt gevonden, kan dit proces opnieuw worden gestart met een y_0 die nog dichter bij 1 ligt. Bedenk overigens dat $y_0 = 1$ geen goede beginschatting is, want dan is $H = \infty$.

Bij super-kritische stroming neigt de waterdiepte in stroomafwaartse richting tot de evenwichtsdiepte. Daarvoor geldt een overeenkomstige redenering.

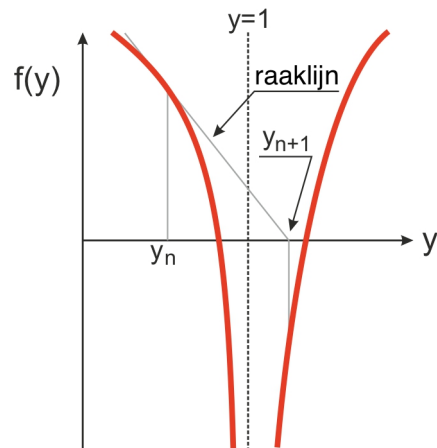


Figure 3: Schets van de functie $f(y)$ volgens (12) en de raaklijn aan deze functie in het punt waar $y = y_n$. Deze raaklijn snijdt de y -as bij $y = y_{n+1}$.

Toepassingen in het vak Waterbouwkunde CTB2410

Golflengte

$$5 \text{ [m]} \leq h \leq 30 \text{ [m]}$$

$$3 \text{ [s]} \leq T \leq 15 \text{ [s]}$$

De combinatie van een relatief grote T en kleine h vereist meer iteratiestappen dan omgekeerd.

Verhanglijn

$$\alpha = 0,0025$$

$$\beta = -9,3 \times 10^{-6} \text{ [m}^{-1}\text{]}$$

$$x_b = 141000 \text{ [m]}$$

$$y_b = 0,444$$

Gevraagd: y op $x = 27000 \text{ [m]}$.

Antwoord: $y = 0,7$.