

Oefenopgaven Serie 2 (cursus 2001/2002)
wi3097mt: Numerieke methoden voor differentiaalvergelijkingen ¹

Behandelde begrippen

- voorwaartse, achterwaartse en centrale differenties, hogere orde afgeleide
- afbreekfout, afrondfout, Richardson' s foutschatting
- Methode van Euler, Trapeziumregel en Runge-Kutta methoden
- impliciet, expliciet

Opgaven

1. Bewijs voor $f \in C^3[x - h, x + h]$, dat de afbreekfout bij centrale differenties $O(h^2)$ is.
2. Stel dat de positie van een schip bepaald kan worden met een meetfout van hoogstens 10 meter. Verder veronderstellen we dat de werkelijke plaats van het schip tijdens het op gang komen geven wordt door de functie $S(t) = 0.5at^2$, waarbij S in meters en t in seconden uitgedrukt wordt. De snelheid wordt benaderd met een achterwaartse differentie met stapgrootte h . Geef de afbreekfout en de meetfout in deze formule. Als $a = 0.004$ bepaal dan de waarde van h waarvoor de fout in de bepaalde snelheid minimaal is. Hoe groot is de fout?
3. Gegeven $f(x)$, $f(x + h)$ en $f(x + 2h)$. Bepaal een formule om $f'(x)$ te benaderen waarbij de fout minimaal is.
4. Gegeven de functie $f(x) = \sin x, x \in [0, \pi]$. Bepaal $f'(1)$ met behulp van een centrale differentie voor $h = 0.1$. Geef een schatting van de fout via Richardson' s foutschatting.
5. Gebruik de Modified Euler methode om de oplossing te benaderen van het volgende beginwaardeprobleem: $y' = 1 + (t - y)^2$, $2 \leq t \leq 3$, $y(2) = 1$, met $h = 0.5$. De exacte oplossing wordt gegeven door $y(t) = t + \frac{1}{1-t}$. Bepaal de fout in de numerieke benadering.
6. Laat zien dat de lokale afbreekfout bij de midpuntregel $O(h^2)$ is. De midpuntregel wordt gegeven door:

$$w_{i+1} = w_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}f(t_i, w_i)\right)$$

¹voor de antwoorden zie: <http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/answer2.html>