

Oefenopgaven Serie 3 (cursus 2001/2002)
wi3097mt: Numerieke methoden voor differentiaalvergelijkingen ¹

Behandelde begrippen

- Richardson's foutschatting voor differentiaalvergelijkingen
- stabiliteit differentiaalvergelijking, numerieke stabiliteit
- testvergelijking, versterkingsfactor
- convergentie, globale fout, efficiency
- numerieke methoden voor stelsels en hogere orde beginwaardeproblemen.

Opgaven

1. Bepaal de versterkingsfactor voor de Trapeziumregel. Schat hiermee de afbreekfout voor de testvergelijking. Laat zien dat de Trapeziumregel stabiel is voor alle $h > 0$, als $\lambda \leq 0$.
2. Gegeven het niet-lineaire beginwaardeprobleem: $y' = 1 + (t - y)^2$. Geef de stabiliteitsvoorwaarde voor de methode van Modified Euler in het punt $t = 2$ en $y = 1$.
3. Gegeven is de numerieke integratiemethode:

$$u^* = u_n + \beta h f(t_n, u_n), \quad u_{n+1} = u^* + (1 - \beta) h f(t_n + \beta h, u^*)$$

- (a) Laat zien, dat de afbreekfout $O(h)$ is voor elke waarde van β .
 - (b) Bepaal de versterkingsfactor van deze methode.
 - (c) Beschouw de niet-lineaire differentiaalvergelijking: $y' = 2y - 4y^2$. Bepaal de maximale stapgrootte zodanig, dat de methode (met $\beta = \frac{1}{2}$) stabiel is in de buurt van $y = \frac{1}{2}$.
4. Voer een stap uit met de voorwaartse Euler methode met stapgrootte $h = 0.1$ voor het stelsel:

$$u_1' = -4u_1 - 2u_2 + e^t,$$

$$u_2' = 3u_1 + u_2,$$

met beginvoorwaarde $u_1(0) = 0$ en $u_2(0) = -1$.

5. Doe één stap met voorwaarts Euler voor de vergelijking $y'' - 2y' + y = te^t - t$ met $y(0) = y'(0) = 0$ met stapgrootte $h = 0.1$. Bepaal de fout met de echte oplossing: $y(t) = \frac{1}{6}t^3e^t - te^t + 2e^t - t - 2$.
6. Stel we hebben de vergelijking voor de mathematische slinger: $\phi'' + \frac{g}{L}\phi = 0$ met $\phi(0) = \phi'(0) = 0$. Schrijf dit als een stelsel. Is dit stelsel stabiel?

¹voor de antwoorden zie: <http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/answer3.html>