

Oefenopgaven Serie 4 (cursus 2001/2002)
wi3097mt: Numerieke methoden voor differentiaalvergelijkingen ¹

Behandelde begrippen

- numerieke stabiliteit bij stelsels differentiaalvergelijkingen, stabiliteitsgebied
- stijve stelsels differentiaalvergelijkingen
- norm vector, norm matrix, conditiegetal, Gershgorin, randwaarde problemen

Opgaven

1. Gegeven het stelsel $y'_1 = 1195y_1 - 1995y_2$, $y_1(0) = 2$, $y'_2 = 1197y_1 - 1997y_2$, $y_2(0) = -2$. De exacte oplossing wordt gegeven door $y_1(t) = 10e^{-2t} - 8e^{-800t}$, $y_2(t) = 6e^{-2t} - 8e^{-800t}$.
 - (a) Doe één stap met E.V. en E.A. met $h = 0.1$ en vergelijk met het exacte antwoord.
 - (b) Bepaal voor welke stapgrootte E.V. stabiel is.
 - (c) Doe één stap met E.V. en E.A. met $h = 0.0001$ en vergelijk met het exacte antwoord. Conclusie?
2. Gegeven de differentiaalvergelijking $y' = y - t^2 + 1$ en $y(0) = \frac{1}{2}$. Benader $y(0.1) = 0.6574145$ met E.V. met $h = 0.025$ en de RK methode met $h = 0.1$. Welke methode verdient de voorkeur?
3. Gegeven de matrices A_1 en A_2 :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ en } A_2 = \begin{pmatrix} 100 & 99 \\ 99 & 100 \end{pmatrix}$$

Bepaal van beide matrices het conditiegetal. Bepaal de oplossing van $A_2x = b$ waarbij $b = (199, 199)$. Neem $\Delta b = (1, 0)$. Schat $\|\Delta x\|$ met behulp van het conditiegetal. Bepaal Δx en vergelijk $\|\Delta x\|$ met de schatting.

4. Gegeven het randwaarde probleem

$$y''(x) = 2(y(x) - x), \quad x \in [0, 1], \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

- (a) Discretisatie geeft het volgende stelsel vergelijkingen $A \mathbf{u} = \mathbf{b}$. Geef A en $\mathbf{b}$.
- (b) Geef een schatting voor de grootste en de kleinste eigenwaarde van A .
- (c) Geef een schatting van $\frac{\|\Delta \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|}$ als $\frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \leq 10^{-4}$.

¹voor de antwoorden zie: <http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/answer4.html>